Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
E-ISSN: 1886-516X
ed_revmetcuant@upo.es
Universidad Pablo de Olavide
España

Sánchez, Francisca J.
Reglas igualitarias para los problemas de reparto con referencias múltiples
Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, vol. 22, diciembre, 2016, pp. 250-262
Universidad Pablo de Olavide
Sevilla, España

REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (22). Páginas 250–262.
Diciembre de 2016. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2350

Reglas igualitarias para los problemas de reparto con referencias múltiples

Sánchez, Francisca J.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)
Correo electrónico: fsansan@upo.es

RESUMEN

En los problemas de reparto que consideramos, hay que repartir un recurso con arreglo a unas referencias de los agentes. Analizaremos estos problemas en un contexto multidimensional pues consideraremos que los agentes tienen referencias múltiples. Para obtener repartos de la cantidad disponible en estas situaciones, es necesario diseñar reglas que tengan en cuenta la multidimensionalidad de las referencias de cada agente. Proponemos y analizamos distintas reglas de reparto que se basarán en un principio igualitario y proporcionamos un procedimiento para la selección de una única asignación.

Palabras claves: problemas de reparto; referencias múltiples; regla de igual pérdida; juegos cooperativos.
Clasificación JEL: C71.
MSC2010: 91A12; 91A80.

Artículo recibido el 17 de septiembre de 2015 y aceptado el 15 de noviembre de 2016.

Egalitarian Rules for Division Problems with Multiple References

ABSTRACT

We consider the division problems in which a resource must be distributed considering agents' references. We analize this problems in a multidimensional context, we consider that agents have multiple references. For division of the amount available in these situations, we design rules that take into account the multidimensionality of the references of each agent. We propose and we analyze different rules based on an egalitarian principle and provide a procedure for the selection of a single allocation.

Keywords: division problems; multiple references; egalitarian allocation; cooperative games.
JEL classification: C71.
MSC2010: 91A12; 91A80.

1. Introducción

Un problema de reparto consiste en dividir una determinada cantidad de un bien o de varios bienes entre un conjunto de agentes de acuerdo con ciertas "características" o "referencias" asociadas a estos agentes.

El caso más simple de estos problemas y el más estudiado en la literatura es aquel en el que cada agente está caracterizado por una única cantidad o un único parámetro que es la referencia o característica de dicho agente. A este modelo nos referiremos como "el problema de reparto clásico".

Un ejemplo de problema de reparto clásico es el problema de bancarrota, donde la referencia de cada agente (los agentes son los acreedores de la empresa) es la reclamación (derecho consolidado) que este hace sobre el valor de liquidación de la empresa en bancarrota. Este modelo ha sido muy estudiado en la literatura; véase, por ejemplo, Thomson (2003). El objetivo fundamental de esta literatura es identificar "reglas de reparto", que permitan asociar a cada problema una división de la cantidad disponible. Una excelente revisión sobre este tema puede verse en Thomson (2007).

En nuestra investigación extenderemos el modelo de reparto clásico para poder representar y analizar situaciones más complejas de la vida cotidiana de una manera más realista. En concreto, plantearemos una extensión multidimensional del problema de reparto clásico.

Algunas situaciones reales que pueden representarse mediante el modelo de reparto con referencias múltiples son las siguientes: en un problema de bancarrota, los derechos o reclamaciones (referencias) de los acreedores sobre una empresa en bancarrota están clasificadas por categorías (por ejemplo, diferentes valores o activos financieros). Las referencias múltiples pueden también representar las distintas evaluaciones que hacen diferentes expertos de las necesidades o derechos que tienen unos agentes. El modelo también es apropiado para representar problemas en los que hay incertidumbre sobre las referencias. Por ejemplo si varios acreedores tienen derecho a recibir de una empresa, en una fecha futura, ciertas cantidades de activos financieros y la empresa deudora quiebra antes de cumplir con esta obligación, entonces para dividir el valor de liquidación de la empresa entre los acreedores se podrían tener en cuenta distintos escenarios económicos futuros. La incertidumbre sobre las reclamaciones de los acreedores se podría incluir en el modelo considerando los valores de los activos en diferentes escenarios. Estos valores serían las referencias a tener en cuenta en el reparto.

Los problemas de reparto con referencias múltiples han sido estudiados en la literatura desde dos puntos de vista. En el primero, el reparto de la cantidad (generalmente insuficiente para satisfacer todas las reclamaciones) se realiza con arreglo a diferentes conceptos y, dentro de estos conceptos, cada agente recibe su asignación (por ejemplo la Unión Europea divide su presupuesto en distintas partidas, tales como agricultura, medio ambiente, etc. y los distintos países tienen unas reclamaciones en estos diferentes conceptos). En estos problemas se procede en dos pasos: en el primero se agregan las reclamaciones de los agentes en cada concepto y se reparte la cantidad total entre los distintos conceptos con arreglo a dichas referencias agregadas y, en un segundo paso, cada una de estas asignaciones se repartan entre los agentes. Este análisis es el que se sigue en Lorenzo-Freire *et al.* (2010), Moreno-Ternero (2009) y Bergantiños *et al.* (2010, 2011).

El otro punto de vista es el que se aborda en este trabajo. Hay distintas referencias a tener en cuenta para obtener una asignación a los agentes (una de las posibles situaciones que se representan mediante este modelo es, por ejemplo, aquella en la que se pide la colaboración de expertos o árbitros para valorar las necesidades de los agentes y cada experto da unas referencias distintas que se quieren tener en cuenta en el reparto). Estos modelos se han estudiado también en los trabajos de Sánchez (2012), Hinojosa *et al.* (2012, 2013, 2014), Calleja *et al.* (2005), González-Alcón *et al.* (2007) y Ju *et al.* (2007). El objetivo fundamental de esta literatura es identificar "reglas de reparto", que permitan asociar a cada problema una división de la cantidad disponible.

En este modelo proponemos reglas de reparto que estarán basadas en un principio igualitario; en concreto, nos centraremos en las pérdidas que sufren los agentes en el reparto. Analizaremos el problema de reparto también desde el punto de vista de la Teoría de Juegos Cooperativos (O'Neill, 1982). Para ello, asociaremos a cada problema de reparto con referencias múltiples un juego cooperativo de valoración vectorial. Para nuestra propuesta de regla en este juego, nos basaremos en la generalización de nucleolo que se presenta en Hinojosa *et al.* (2005) para un juego multi-escenario. Dada la multidimensionalidad del problema que estudiamos, la solución que proporcionarán dichas reglas no será única por lo que tendremos que buscar algún procedimiento que permita seleccionar asignaciones.

En este trabajo la estructura es la siguiente: en la Sección 2 se realiza una breve introducción del problema de reparto clásico y de la regla de igual pérdida restringida. En la Sección 3 se define el problema de reparto con referencias múltiples. Para este modelo proponemos una extensión de la regla de igual pérdida y proporcionamos un procedimiento que permitirá la selección de una única asignación en el conjunto de resultados del problema. En la Sección 4, definiremos el juego asociado al problema de reparto con múltiples referencias. En paralelo con lo realizado en la Sección 3, propondremos una regla de reparto para el juego. En la Sección 5 exponemos las conclusiones del trabajo.

2. El problema de reparto clásico

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes. Un problema de reparto clásico consiste en dividir una cantidad $E \in \mathbb{R}_+$[1] de un bien infinitamente divisible, entre N agentes de acuerdo con unas referencias, representadas por el vector $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, donde $c_i \in \mathbb{R}_+$ representa la referencia o característica del agente $i \in N$. También podemos representar el vector $\mathbf{c}$ como $(c_i)_{i \in N}$. Representamos el problema de reparto clásico por la terna $(N, \mathbf{c}, E)$ y denotamos por $\mathcal{C}_N$ a la clase de estos problemas. Si no hay confusión posible, al problema de

[1] $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_{++}$) denota el conjunto de todos los números reales (resp. no negativos y positivos) y $\mathbb{R}^N$ (resp. $\mathbb{R}^N_+$ y $\mathbb{R}^N_{++}$) el producto cartesiano de $|N|$ copias de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_{++}$), donde $|N|$ denota el cardinal de N.

reparto clásico lo denotamos simplemente por $(\mathbf{c}, E)$.

Si para cada $i \in N$, la cantidad c_i representa la reclamación legítima del agente i sobre la cantidad a repartir, y ésta no es suficiente para satisfacer las reclamaciones de todos los agentes, esto es $c(N) = \sum_{i \in N} c_i > E$, entonces $(\mathbf{c}, E)$ es un *problema de bancarrota* (Aumann y Maschler, 1985). En este caso, E puede interpretarse como el valor de liquidación de una empresa y cada coordenada de $\mathbf{c}$ representa la reclamación que hace cada uno de los acreedores.

En un problema de reparto clásico se trata de determinar lasbcantidades que deben asignarse a cada agente de manera que la suma total sea la cantidad a repartir. Formalmente, una asignación o reparto para un problema $(\mathbf{c}, E)$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$, que cumple la condición de eficiencia, $\sum_{i \in N} x_i = E$. Cada componente, x_i, representa la cantidad asignada al agente i en el reparto. Denotamos por $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^N$ el conjunto de todas las asignaciones de la cantidad a repartir, E.

Una *regla de reparto* es una función, R, que asocia a cada problema de reparto $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$ una asignación $R(\mathbf{c}, E) \in X(E)$.

2.1. Regla de igual pérdida restringida

Son muchas las reglas de reparto que proporcionan soluciones para el problema de reparto; véase, por ejemplo, Thomson (2003). En este trabajo, nos centramos en una regla que incorpora la noción de igualdad en el reparto, como es la de igual pérdida restringida.

Esta regla es una de las más utilizadas en problemas de bancarrota. En ella se pretende que sean iguales todas las pérdidas (entendiendo éstas como la diferencia entre las reclamaciones y las asignaciones) en las que pueden incurrir los agentes, siempre que nadie reciba una cantidad negativa. La regla da prioridad a los agentes con reclamaciones más elevadas sobre los agentes con reclamaciones menores.

Para cada $(\mathbf{c}, E) \in \mathcal{C}_N$, y para cada $i \in N$,

$$CEL_i(\mathbf{c}, E) = \text{máx}\{0, c_i - \lambda\},$$

donde $0 \leq \lambda < \infty$ es tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} CEL_i(\mathbf{c}, E) = E$.

El proceso se desarrollaría de la siguiente forma: Se suman las reclamaciones de todos los agentes y se obtiene la cantidad que falta por cubrir de las reclamaciones de éstos; i.e. $c(N) - E$. Esta pérdida se reparte a partes iguales entre los agentes con la condición de que a ninguno se le asigne una cantidad negativa en el reparto final. Por tanto, si en la primera fase a algunos agentes les corresponden cantidades negativas (i.e. $(c_i - \frac{c(N)-E}{n}) < 0$ para algún i), a dichos agentes se les asigna 0 y las pérdidas que tendrían que asumir se reparten a partes iguales entre el resto de los agentes. El proceso continuaría hasta que $c(N) - E$ se reparta totalmente entre los agentes.

El caso de dos agentes podría representarse gráficamente, asignándose el punto más cercano a las reclamaciones que esté sobre la recta de posibles soluciones y que sea factible (véase Figura 1).

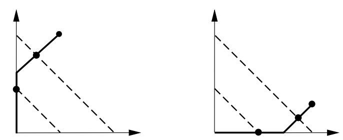

Figura 1: Regla de reparto de igual pérdida restringida.

3. El problema de reparto con referencias múltiples

Un *problema de reparto con referencias múltiples* es una terna (N, C, E) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de agentes, $E \in \mathbb{R}_{++}$ es la cantidad que hay que repartir y $C \in \mathbb{R}_{+}^{N \times M}$ es la matriz de referencias. Denotamos por c_i^j un elemento de la matriz C. Para cada $i \in N$, la columna i de la matriz C, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^M$, representa las referencias del agente i con respecto a los diferentes atributos[2]. Para cada $j \in M$, la fila $\mathbf{c}^j \in \mathbb{R}^N$ representa las referencias de todos los agentes respecto al atributo j. También podemos representar a la matriz C como $(\mathbf{c}_i)_{i \in N}$ o como $(\mathbf{c}^j)^{j \in M}$. Cuando no haya confusión posible, al problema de reparto con referencias múltiples se lo denota por (C, E).

Denotamos por $\mathcal{C}_N^M$ a la clase de todos los problemas de reparto con referencias múltiples asociado a un conjunto de agentes N y al conjunto de atributos M.

Una *asignación* para $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$, que cumple la propiedad de eficiencia, $\sum_{i \in N} x_i = E$. Sea $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^N$ el conjunto de todas las asignaciones para el problema de reparto con referencias múltiples, $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$.

Una *regla* de reparto para $\mathcal{C}_N^M$ es una función, R,[3] que asocia a cada problema $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ una asignación $R(C, E) \in X(E)$.

El objetivo fundamental de este trabajo es definir reglas de reparto para el problema con referencias múltiples, que permitan asociar a cada problema una división de la cantidad disponible.

3.1. Generalización de la regla de igual pérdida restringida

La idea que subyace en la regla de igual pérdida es que el agente con mayor grado de descontento o pérdida esté lo mejor posible. La regla proporciona un reparto en el que estos descontentos tienden a igualarse, es decir, proporciona resultados que minimizan las máximas pérdidas de los agentes. Nuestro propósito es obtener una generalización de la regla de igual pérdida restringida al caso de referencias múltiples.

En primer lugar formalizamos la extensión de la noción de pérdida por medio de un principio minimax para el caso multidimensional, es decir, generalizamos la idea de minimizar el descontento máximo de los agentes.

[2]Adoptaremos esta terminología, aunque en vez de atributos podriamos referirnos a distintos bienes, o diferentes escenarios futuros, o a las distintas evaluaciones que hacen un conjunto de expertos.

[3]Por simplicidad, si no hay confusión posible, denotamos por R tanto a la regla para el problema de reparto clásico como a la regla para el problema con referencias múltiples.

Consideraremos como medida de la pérdida o descontento de los agentes con respecto al reparto $\mathbf{x}$, el vector $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (p^1(\mathbf{x}), \ldots, p^m(\mathbf{x}))$, donde:

$$p^j(\mathbf{x}) = \max_{i \in N} \{c_i^j - x_i\}, \quad i \in N, \quad j \in M.$$

Las componentes de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ representan el máximo descontento de los agentes con respecto a $\mathbf{x}$ en cada uno de los atributos.

Para cada agente $i \in N$ y cada asignación $\mathbf{x} \in X(E)$, definimos una función de descontento, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, i)$, cuyas componentes vienen dadas por $c_i^j - x_i$, para todo $j \in M$. Esta función mide el descontento del agente $i \in N$ bajo la asignación $\mathbf{x}$ en cada uno de los atributos.

Sean a^j, $j = 1, \ldots, m$ los componentes del vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, usamos la siguiente notación: $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ si $a^j \leq b^j$ para todo $j = 1, \ldots, m$; $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ si $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$; $\mathbf{a} \nleqq \mathbf{b}$ (resp. $\mathbf{a} \nleq \mathbf{b}$) si $\mathbf{a} \leqq \mathbf{b}$ (resp. $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$) no es cierto.

Definición 3.1. *$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^k$ es un vector de descontento máximo no dominado para el problema $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$, si existe $\boldsymbol{x} \in X(E)$ tal que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ y no existe $\boldsymbol{y} \in X(E)$ tal que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{p}$.*

Con objeto de obtener resultados que minimicen el descontento de los agentes, definimos la regla de igual pérdida restringida para el problema de reparto con referencias múltiples.

Definición 3.2. *La regla de igual pérdida restringida, $CEL(C, E)$, asigna a cada problema $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ el conjunto de asignaciones $\boldsymbol{x} \in X(E)$ para las que el vector de descontento máximo, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$, es no dominado.*

Cada asignación que se obtiene con la regla de igual pérdida restringida, $CEL(C, E)$, pertenece al siguiente conjunto:

$$T(C, E) = \{\mathbf{x} \in X(E) | \mathbf{p}(\mathbf{x}, i) \leqq \mathbf{p}(\mathbf{x}), \ \forall\, i \in N\}.$$

Para obtener las asignaciones en las que el máximo descontento de los agentes sea no dominado, podemos formular un problema vectorial cuya solución proporcionará el conjunto de asignaciones que da la regla $CEL(C, E)$ para el problema $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & p^1(\mathbf{x}), \ldots, p^m(\mathbf{x}). \\ s.a. & \mathbf{x} \in X(E) \end{array}$$

Este problema equivale al siguiente problema de programación lineal multiobjetivo; problema al que nos referiremos como (P.1.):

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & \{t^1, \ldots, t^m\} \\ s.a. & c_i^j - x_i \leq t^j, \quad \forall\, i \in N, \quad j \in M \\ & \mathbf{x} \in X(E). \end{array}$$

La generalización de la regla de igual pérdida que acabamos de definir proporciona un conjunto de repartos; por lo que sería necesario utilizar algún criterio adicional que nos permita realizar una selección en el conjunto de asignaciones. En lo que sigue nos proponemos definir un procedimiento que nos permita elegir una única asignación del conjunto de repartos posibles.

3.1.1. Selección de asignaciones

Para la selección de una asignación en el conjunto de todas las posibles, buscaremos la asignación más justa en el sentido de que el agente que resulte más desfavorecido en el reparto esté lo menos perjudicado posible. Para dicha selección, nos hemos inspirado en el procedimiento introducido por Nishizaki y Sakawa (2001) para la selección de un único punto en el problema de producción multiobjetivo.

La regla de igual pérdida restringida indicada en la Definición 3.2 también puede formularse como sigue:

$$CEL(C,E) = arg \min_{\mathbf{x}\in X(E)} \max_{i\in N} \mathbf{p}(\mathbf{x},i).$$

Así, podemos proponer el siguiente problema de programación lineal, al que nos referiremos como problema (P.2.):

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x},\epsilon} & \epsilon \\ s.a. & \mathbf{p}(\mathbf{x},i) \leq \epsilon, \quad \forall\, i \in N \\ & \mathbf{x} \in T(C,E). \end{array}$$

La solución óptima del problema (P.2.) la denotaremos por $\overline{CEL}(C,E)$ y será la asignación que elegiremos en el conjunto de asignaciones que proporciona la regla $CEL(C,E)$.

4. El juego

En esta Sección el principal objetivo es el estudio de cómo la Teoría de Juegos Cooperativos es capaz de proporcionar una regla de reparto en los problemas de referencias múltiples.

4.1. La regla

Para definir el juego, asociaremos a cada problema de reparto con referencias múltiples un juego de valoración vectorial. Para ello, nos basaremos en el procedimiento propuesto por O'Neill (1982).

A cada problema de reparto con referencias múltiples, $(C,E) \in \mathcal{C}_N^M$, podemos asociar un juego de valoración vectorial $(N, v_{(C,E)})$, donde $v_{(C,E)}(S) \in \mathbb{R}^M$ representa la función característica del juego. Las componentes de $v_{(C,E)}(S)$ vienen dadas por:

$$v^j_{(C,E)}(S) = \max\left\{E - c^j(N\setminus S),\, 0\right\}, \quad \forall\, j \in M,\ S \subseteq N,$$

donde

$$c^j(N\setminus S) = \sum_{i\in N\setminus S} c^j_i.$$

El valor $v^j_{(C,E)}(S)$ es una valoración pesimista de lo que la coalición S puede conseguir en el atributo $j \in M$, puesto que primero asigna a los agentes que no pertenecen a S lo que determina su referencia y, si después de ésto, queda algo de la cantidad que se reparte, E, eso sería lo que la coalición S podría asegurarse. Obsérvese que en el juego, el valor de la gran coalición en cada atributo coincide con el estado E; i.e.:

$$v^j_{(C,E)}(N) = E, \quad j \in M.$$

Como en los juegos convencionales, una asignación del juego es un vector, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N_+$, cuyas componentes representan el pago que recibe cada jugador, de forma que $\sum_{i \in N} x_i = E$. La suma $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ es el pago de la coalición S. Denotamos por $X(v)$ al conjunto de las asignaciones del juego.

De entre el conjunto de asignaciones de la cantidad que se reparte, que cumplen la propiedad de eficiencia, la propuesta de solución que haremos está basada en la diferencia entre lo que las coaliciones obtienen con respecto a una asignación y su valor en el juego cooperativo definido anteriormente.

Para cada asignación, $\mathbf{x} \in X(v)$, y cada coalición, $S \subseteq N$, podemos definir una *función de descontento* con valoración vectorial, $e(\mathbf{x}, S)$, cuyas componentes vienen dadas por:

$$e^j(\mathbf{x}, S) = v^j_{(C,E)}(S) - x(S),$$

para $j \in M$. Esta función mide el descontento de la coalición S con la asignación $\mathbf{x}$ en cada atributo. Para un atributo $j \in M$, si el descontento es positivo, indica que en la asignación $\mathbf{x}$ la coalición S recibe menos de lo que podría obtener sin contar con el resto de los jugadores fuera de S, lo que sugiere la interpretación de $e^j(\mathbf{x}, S)$ como el *sacrificio* que se pide a la coalición S para implementar la asignación $\mathbf{x}$. Cuando $e^j(\mathbf{x}, S)$ es negativo, la coalición S recibe en la asignación $\mathbf{x}$ más de lo que podría garantizarse una vez que se le ha asignado toda su demanda a los jugadores fuera de S; en este caso el descontento mide la *satisfacción* que la coalición S obtiene con la asignación $\mathbf{x}$.

Esta función de descontento jugará un papel muy importante en la definición de nuestra regla de reparto. Para nuestra propuesta de regla, nos basaremos en la generalización de nucleolo que para el juego multi-escenario se presenta en Hinojosa *et al.* (2005).

El objetivo es encontrar asignaciones que minimicen el máximo descontento de los agentes. Como medida de pérdida o descontento, consideraremos un vector de descontento máximo que considerará el peor valor de una asignación $\mathbf{x} \in X(v)$ en todo el conjunto de coaliciones.

Definición 4.1. *El vector de descontento máximo para la asignación $\boldsymbol{x} \in X(v)$, es el vector $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^M$, cuyas componentes vienen dadas por $q^j(\boldsymbol{x}) = \max_{S \subset N} e^j(\boldsymbol{x}, S)$, $j \in M$.*

Formalizamos la idea de seleccionar las asignaciones que minimizan el máximo descontento.

Definición 4.2. *$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^M$ es un vector de descontento máximo no dominado para el juego $(N, v_{(C,E)})$, si existe $\boldsymbol{x} \in X(v)$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ y no existe $\boldsymbol{y} \in X(v)$ tal que $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{q}$.*

Definición 4.3. *La regla de descontento igualitario, $N(v_{(C,E)})$, asigna a cada juego $(N, v_{(C,E)})$ el conjunto de asignaciones $\boldsymbol{x} \in X(v)$ para las que el vector de descontento máximo, $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$, es no dominado.*

Nótese que las asignaciones que proporciona esta regla pueden obtenerse como las soluciones del siguiente problema de programación lineal multiobjetivo, problema al que nos referiremos como (P.3.):

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & \{s^1, \ldots, s^m\} \\ s.a. & v^j_{(C,E)}(S) - x(S) \leq s^j, \quad \forall\, S \in N, \quad j \in M \\ & \mathbf{x} \in X(v) \end{array}$$

4.1.1. Selección de asignaciones

Ahora la idea para elegir una asignación entre todas las posibles es buscar un equilibrio entre las posibles objeciones que las coaliciones pueden presentar, es decir, reducir el descontento de una coalición S sin incrementar el de otra en mayor medida. Las asignaciones que seleccionaremos minimizarán el mayor descontento que una coalición pueda tener.

Para cada $S \subset N$ y cada $\mathbf{x} \in X(v)$ definimos una función de descontento, $q(\mathbf{x}, S)$, cuyas componentes son $e^j(\mathbf{x}, S) = v^j_{(C,E)}(S) - x(S)$, $\forall\, j \in M$. Esta función mide el descontento de la coalición $S \subset N$ bajo la asignación $\mathbf{x}$ en cada uno de los atributos.

Cada asignación que proporciona la regla descrita antes, pertenece al conjunto $R(v_{(C,E)}) = \{\mathbf{x} \in X(v) | q(\mathbf{x}, S) \leqq \mathbf{q}(\mathbf{x}), \ \forall\, S \subset N\}$.

La regla de descontento igualitario indicada en la Definición 4.3 también puede formularse como:

$$N(v_{(C,E)}) = arg \min_{\mathbf{x} \in X(v)} \max_{S \subset N} \mathbf{q}(\mathbf{x}, S).$$

Equivalentemente a esta definición podemos proponer el siguiente problema de programación lineal, al que nos referiremos como problema (P.4.), que nos permitirá elegir una única asignación entre las posibles:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x},\epsilon} & \epsilon \\ s.a. & \mathbf{q}(\mathbf{x}, S) \leq \epsilon, \quad \forall\, S \subset N \\ & \mathbf{x} \in R(v_{(C,E)}) \end{array}$$

A la solución óptima del problema (P.4.) la denotaremos por $\underline{N}(v_{(C,E)})$ y será la asignación que seleccionaremos en el conjunto solución que proporciona la regla $N(v_{(C,E)})$.

Ejemplo 4.4. Consideremos un problema de reparto con referencias múltiples con tres agentes y tres atributos. Se dispone de una cantidad a repartir de $E = 4$ y las referencias en los atributos vienen dadas por $\mathbf{c}^1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{c}^2 = (1, 5, 2)$ y $\mathbf{c}^3 = (2, 1, 2)$.

Para obtener las asignaciones que proporciona la regla $CEL(C, E)$, formulamos y resolvemos el problema (P.1.) cuya resolución nos da los siguientes cinco puntos extremos: $\overline{\mathbf{x}}_1 = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$, $\overline{\mathbf{x}}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3})$, $\overline{\mathbf{x}}_3 = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3})$, $\overline{\mathbf{x}}_4 = (0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ y $\overline{\mathbf{x}}_5 = (0, 1, 3)$. Estas asignaciones definen el conjunto poliédrico representado en la Figura 2.

Para la selección de una asignación en el conjunto de asignaciones antes obtenido, formulamos el problema (P.2.). La resolución de dicho problema proporciona una única solución óptima, que en este problema coincide con el punto extremo $\overline{\mathbf{x}}_5 = \overline{CEL}(C, E) = (0, 1, 3)$.

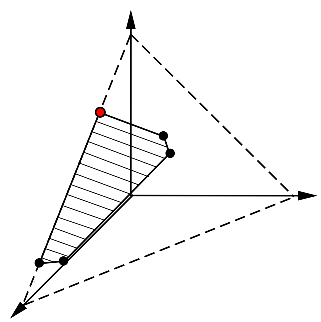

Figura 2: Generalización de la regla de igual pérdida.

Ahora vamos a buscar otra solución al problema de reparto con referencias múltiples pero esta vez desde la perspectiva de la Teoría de Juegos Cooperativos. En primer lugar, obtenemos el juego cooperativo $(N, v_{(C,E)})$ asociado al problema de reparto con referencias múltiples (C, E):

S	$v^1_{(C,E)}(S)$	$v^2_{(C,E)}(S)$	$v^3_{(C,E)}(S)$
{1}	0	0	1
{2}	0	1	0
{3}	0	0	1
{1,2}	0	2	2
{1,3}	1	0	3
{2,3}	2	3	2
{1,2,3}	4	4	4

Para obtener las asignaciones que proporciona la regla $N(v_{(C,E)})$ formulamos y resolvemos el problema (P.3.), obteniéndose los siguientes tres puntos extremos: $\underline{\mathbf{x}}_1 = (1, 1, 2)$, $\underline{\mathbf{x}}_2 = (\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2})$ y $\underline{\mathbf{x}}_3 = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$. El conjunto poliédrico que definen se representa en la Figura 3.

Para la selección de una asignación en dicho conjunto, formulamos y resolvemos el problema (P.4.). Este problema tiene una única solución óptima, $\underline{N}(v_{(C,E)}) = (1, 1, 2)$, que en este caso además coincide con la asignación obtenida anteriormente por el punto extremo $\underline{\mathbf{x}}_1$.

5. Conclusiones

En este trabajo estudiamos el problema de reparto en un contexto multidimensional pues consideramos que los agentes tienen referencias múltiples. El

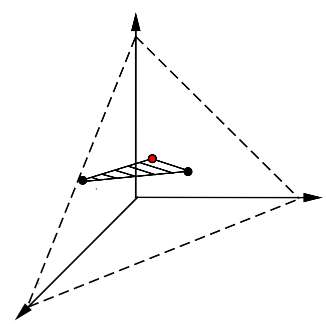

Figura 3: Regla de descontento igualitario.

problema tratado es aplicable a problemas reales como son las situaciones de bancarrota, la distribución de impuestos, el reparto de beneficios, y las herencias cuando el reparto indicado en el testamento no coincide con la herencia a repartir.

Para el problema analizado, proponemos reglas de reparto que pueden considerarse racionales independientemente del atributo considerado. Cuando se extienden las reglas de reparto al caso de múltiples referencias el inconveniente principal es que la solución no consiste en un único reparto si no en un conjunto de repartos entre los que elegir. En el caso de la generalización de la regla de igual pérdida es posible un refinamiento del conjunto de soluciones mediante un procedimiento lexicográfico análogo al utilizado en Hinojosa *et al.* (2005) para juegos cooperativos multi-escenario. Sin embargo, nuestra propuesta consiste en elegir una asignación entre todas las posibles, que será la mejor en el sentido de que el agente que resulte más desfavorecido en el reparto esté lo menos perjudicado posible.

Se podría dar otra visión sobre los procedimientos para reducir los conjuntos de repartos que consistiría en incorporar información adicional sobre la importancia de las referencias; para ello, se podrían considerar distintas ponderaciones de las referencias en los atributos.

Referencias

Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985): Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, 36, 195-213.

Bergantiños, G.; Lorenzo, L. y Lorenzo-Freire, S. (2010): A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations. *Operations Research Letters*, 38, 17–19.

Bergantiños, G.; Lorenzo, L. y Lorenzo-Freire, S. (2011): New characterizations of the constrained equal awards rule in multi-issue allocation situations. *Mathematical Methods of Operations Research*, 74, 311-325.

Calleja, P.; Borm, P. y Hendrickx, R. (2005): Multi-issue allocation situations. *European Journal of Operational Research*, 164, 730-747.

González-Alcón, C.; Borm, P.; Hendrickx, R. (2007): A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations. *Mathematical Methods of Operations Research*, 65, 339-352.

Hinojosa, M.A.; Mármol, A.M. y Thomas, L.C. (2005): Core, least core and nucleolus for multiescenario cooperative games. *European Journal of Operational Research*, 164, 225-238.

Hinojosa, M.A.; Mármol, A.M. y Sánchez, F.J. (2012): A consistent Talmudic rule for division problems with multiple references. *TOP*, 20, 3, 661-678.

Hinojosa, M.A.; Mármol, A.M. y Sánchez, F.J. (2013): Extended proportionality in division problems with multiple references. *Annals of Operations Research*, 206, 183-195.

Hinojosa, M.A.; Mármol, A.M. y Sánchez, F.J. (2014): Leximin rules for bankruptcy problems under uncertainty. *International Journal of Systems Science*, 45, 20-28.

Ju, B-G.; Miyagawa, E. y Sakai, T. (2007): Non-manipulable division rules in claim problems and generalizations. *Journal of Economic Theory*, 132, 1-26.

Lorenzo-Freire, S.; Casas-Méndez, B. y Hendrickx, R. (2010): The Two-stage Constrained Equal Awards and Losses Rules for Multi-issue Allocation Situations. *TOP*, 18, 465–480.

Moreno-Ternero, J.D. (2009): The proportional rule for multi-issue bankruptcy problems. *Economics Bulletin*, 29, 483-490.

Nishizaki, I. y Sakawa, M. (2001): On computational methods for solutions of multiobjective linear production programming games. *European Journal of Operational Research*, 129, 386-413.

O'Neill, B. (1982): A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, 2, 345-371.

Sánchez, F.J. (2012): An algorithm to compute a rule for division problems with multiple references. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. Rect@*, 13, 107-118.

Thomson, W. (2003): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: A survey. *Mathematical Social Sciences*, 45, 249-297.

Thomson, W. (2007): How to divide when there isn't enough. From the Talmud to game theory. Manuscript. University of Rochester.