



Revista de Métodos Cuantitativos para la
Economía y la Empresa
E-ISSN: 1886-516X
ed_revmetcuant@upo.es
Universidad Pablo de Olavide
España

Escartin, Eduardo; Velasco, Francisco; González-Abril, Luis
La tasa de variación del PIB en un modelo simple de determinación de la renta
Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, vol. 23, 2017, pp. 210-
222
Universidad Pablo de Olavide
Sevilla, España

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=233151826010>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

La tasa de variación del PIB en un modelo simple de determinación de la renta

ESCARTIN, EDUARDO

Grupo SEJ442: Métodos Cualitativos y Optimización en Sistemas Dinámicos

Económicos

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: escartin@us.es

VELASCO, FRANCISCO

Grupo SEJ442: Métodos Cualitativos y Optimización en Sistemas Dinámicos

Económicos

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: velasco@us.es

GONZÁLEZ-ABRIL, LUIS

Grupo SEJ442: Métodos Cualitativos y Optimización en Sistemas Dinámicos

Económicos

Universidad de Sevilla (España)

Correo-e: luisgon@us.es

RESUMEN

En este artículo se demuestra que en un modelo simple de determinación de la renta, cuando se tienen en cuenta funciones de consumo lineales, la tasa de variación del producto interior bruto (PIB) es igual al cociente entre el incremento de la inversión y la suma del consumo exógeno más la inversión inicial. Esto significa que la pendiente de la función de consumo no influye en la tasa de variación del PIB y que lo relevante para esa tasa de variación es el consumo exógeno y la inversión inicial.

Palabras claves: macroeconomía; producto interior bruto (PIB); modelo de determinación de la renta; tasa de crecimiento.

Clasificación JEL: E10.

MSC2010: 37N40; 91B02; 91B55.

Artículo recibido el 17 de marzo 2015 y aceptado el 19 de diciembre de 2017.

The Variation of GDP in a Simple Model of Income Determination

ABSTRACT

In this paper, we prove that in a simple model of income determination, when taking into account linear functions, the change rate for the gross domestic product (GDP) is equal to the quotient of the increase in investment and the sum of exogenous consumption plus the initial investment. This means that the slope of the consumption function does not influence the change rate for the GDP and what matters for this variation rate is the exogenous consumption and the initial investment.

Keywords: Macroeconomics; gross domestic product (GDP); model of income determination; growth rate.

JEL classification: E10.

MSC2010: 37N40; 91B02; 91B55.



1 Introducción

La tasa de variación del producto interior bruto (PIB), aunque es un concepto de por sí claro, plantea la siguiente pregunta: ¿a qué equivale la tasa de variación del PIB, o $\Delta Y/Y$?

En este artículo se expone una solución a esta cuestión, derivándola de un modelo simple de análisis de la renta; esto es una aportación original, porque, según nuestro conocimiento, no hay ningún manual donde se aborde este tema. Permítasenos resaltar que, al tratarse de una demostración personal sin referencias previas, no hay bibliografía a la que acudir para tratar sobre esta demostración, pues, evidentemente, no sería una novedad. Por tal motivo las referencias bibliográficas son necesariamente mínimas.

El enunciado a demostrar es el siguiente:

La tasa de variación del producto interior bruto (PIB), en un modelo simple de determinación de la renta (Y), teniendo en cuenta funciones de consumo lineales con pendiente positiva y menor que la unidad, es igual al cociente entre el incremento de la inversión y la suma del consumo exógeno (C_0) más la inversión inicial (I); es decir, su fórmula es:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{C_0 + I}$$

Aunque la inspiración de la pregunta proviene de la *Teoría General* de Keynes (1989: 126)¹, se señala que la enunciación y la demostración son totalmente ajenas a su teoría y que no se pretende entrar en ella ni establecer cuestión ni crítica sobre la misma. Se presenta una demostración y se extrae de ella determinadas conclusiones útiles para la práctica política del crecimiento económico y del empleo. Así pues, el artículo pone su foco en la demostración y se ruega al lector que se centre en la exposición y permanezca al margen de lo que dijo o pretendió decir Keynes².

¹ En la nota 2 a pie de la página 126 de *The General Theory*, Keynes indica: «la razón entre el cambio proporcional de la demanda total respecto al cambio proporcional de la inversión

$$= \frac{\Delta Y}{Y} : \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta Y}{Y} \cdot \frac{Y - C}{\Delta Y - \Delta C} = \frac{1 - \frac{C}{Y}}{1 - \frac{dC}{dY}}$$

² Keynes ya tuvo tempranamente inquietudes para analizar la mejoría del empleo en Keynes y Henderson (1929: 112-116) y en Keynes (1933: 340-341).

2 Demostración analítica

Se considera el modelo tradicional:

Sea una función de demanda agregada (D) que, en equilibrio, es igual a la oferta agregada, es decir, al producto agregado (PIB); a su vez el PIB es igual a la renta (Y), o retribución de los factores de la producción, porque éstos son remunerados del valor del producto agregado. Así pues: $D=Y$.

La función de demanda agregada es la suma de dos componentes: el consumo (C) y la inversión (I); por lo que: $D=C+I$. Pero como en el equilibrio la demanda agregada debe ser igual a la oferta agregada (es decir, $D=Y$), resulta que $Y=C+I$.

Adicionalmente, se considera que el consumo es función de la renta, $C = f(Y)$. Esta función tiene pendiente, dC/dY , positiva, constante y menor que la unidad. A su vez, se consideran funciones lineales, $C = C_0 + cY$; es decir, dicha función consta de dos elementos: un consumo exógeno constante³, C_0 , y un consumo inducido por la renta, cY , siendo c una constante que actúa de factor de escala sobre la renta e indica una cierta propensión al consumo de esa renta.

La inversión es una variable exógena, I.

Sustituyendo y operando en todas estas ecuaciones, una vez logrado el equilibrio, se sigue:

$$Y = C_0 + cY + I$$

$$Y - cY = C_0 + I$$

$$(1-c)Y = C_0 + I$$

$$Y = \frac{1}{1-c}(C_0 + I)$$

$$Y = m(C_0 + I)$$

si se usa la notación $m = \frac{1}{1-c}$.

Los montos de estos componentes, alcanzados al final del periodo anterior, son los que se consideran los iniciales para el siguiente periodo, que es el que se va a analizar.

Así pues, manteniendo el valor de estos componentes iniciales (C_0+I), se añade exógenamente una inversión nueva (ΔI), cuyos efectos son los que se pretenden analizar.

³ Exógeno significa, en este modelo, que no proviene de la renta del periodo.

De las igualdades anteriores y tras incrementar sólo la inversión, se deduce que⁴:

$$\Delta Y = m \Delta I$$

La tasa de variación de la renta al final de esa adición es $\Delta Y/Y$, cuyo valor es:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{m \Delta I}{Y} = \frac{m \Delta I}{m(C_0 + I)} = \frac{\Delta I}{C_0 + I}$$

que es lo que se quería demostrar.

3 Ilustración gráfica y demostración geométrica

La fórmula (o solución) recién deducida en la sección anterior se ilustra geométricamente mediante la Figura 1.

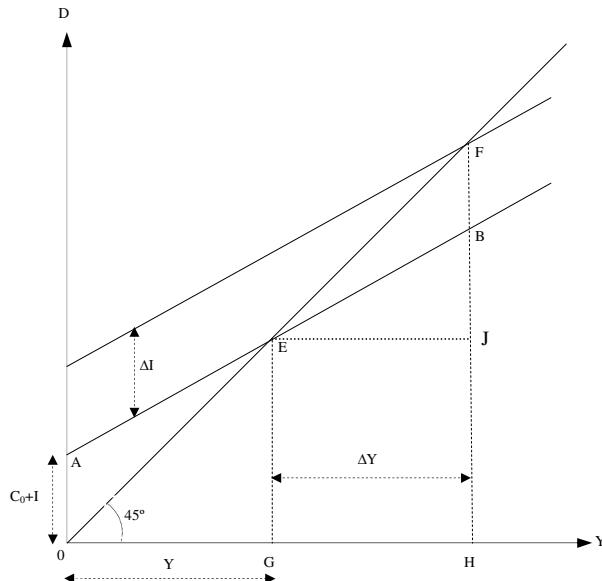


Figura 1: Incremento de la inversión y nuevo equilibrio, resultando que $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{C_0 + I}$

Se denota por «E» el punto que marca la situación inicial y representa el último nivel de renta alcanzado, cuya condición de equilibrio es $Y=D$. Por tanto, se encuentra en la bisectriz del primer cuadrante: $OG=GE$.

Se traza por «E» cualquier recta de pendiente positiva y menor que la unidad (la cual representa la demanda agregada), de modo que el punto de corte con el eje de ordenadas es

⁴ Esta expresión coincide con la dada por Keynes (1989: 115).

«A». La pendiente de tal recta es «c». OA representa el nivel de consumo exógeno más la inversión exógena inicial (C_0+I) que permite que la renta, $Y=OG$, alcance en el equilibrio el volumen de la demanda agregada GE ($OG=GE$). Por lo tanto, la ecuación de tal recta es $Y=C_0+cY+I$.

El punto «A» es de lo más importante en esta demostración geométrica. Determinados «A» y «E» se conoce implícitamente la pendiente «c» de la recta que representa la demanda agregada (y de la de consumo). No obstante, esta «c», que se tomó arbitrariamente, es por completo irrelevante para el resultado de la demostración. Así pues, lo único decisivo es tener determinado el punto inicial de partida «A», pero para efectuar la demostración se necesita el apoyo de cualquier función lineal de demanda agregada.

Supongamos que, sobre la situación inicial, se origina un incremento exógeno de la inversión cuyo monto viene representado por el segmento BF, del cual resulta al final el incremento de la renta GH; de modo que $GH=EJ=JF$.

Debido a la proporcionalidad de los triángulos semejantes OAE y EBF se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{BF}{OA} = \frac{EF}{OE}$$

Los triángulos OGE y EJF también son semejantes, por lo que:

$$\frac{EF}{OE} = \frac{EJ}{OG} = \frac{GH}{OG}$$

En ambas parejas de triángulos semejantes se obtiene el mismo valor de proporcionalidad: $\frac{EF}{OE}$. Así pues:

$$\frac{GH}{OG} = \frac{BF}{OA}$$

Puesto que GH representa a ΔY , OG es el segmento que muestra el nivel de renta Y, BF es el representativo del incremento de la inversión (es decir, ΔI) y OA es la suma del consumo exógeno y la inversión inicial (esto es, C_0+I), la igualdad se convierte en la misma fórmula obtenida en la demostración analítica:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{C_0 + I}$$

A continuación, en la Figura 2 se muestra que esta solución no está supeditada a la pendiente de la función de demanda agregada, pese a haber ya quedado de manifiesto.

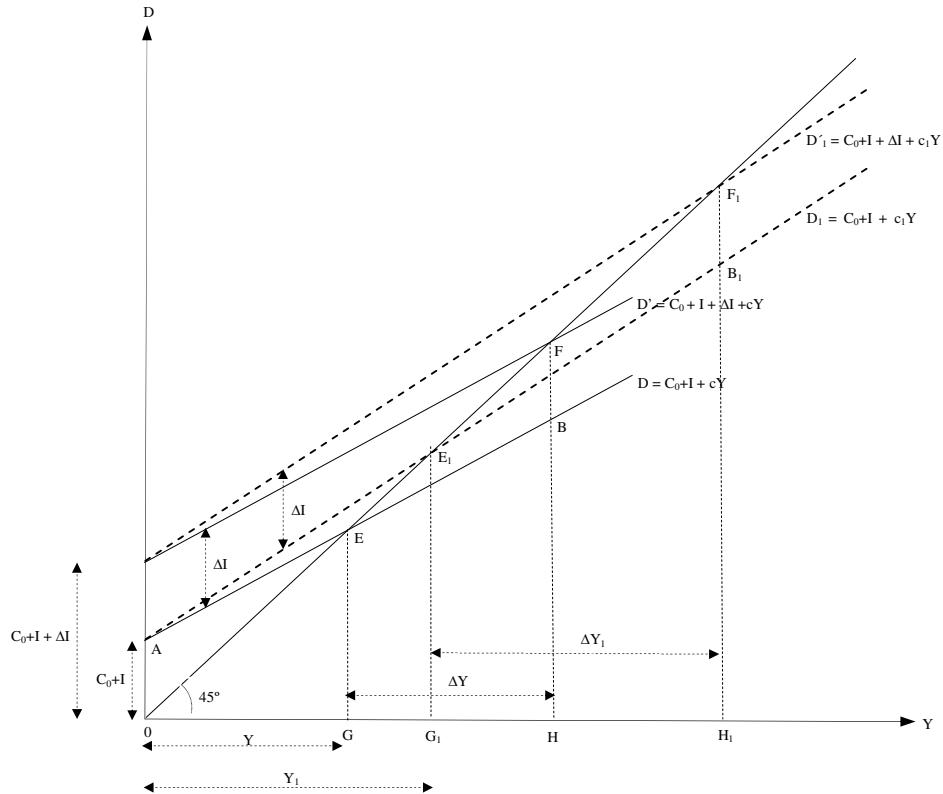


Figura 2: Independencia de la pendiente de la Función de Demanda, ya que $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{C_0 + I} = \frac{\Delta Y_1}{Y_1}$

Para ello se consideran dos funciones que pasan por el punto «A» (que representa al valor C_0+I): la una con poca pendiente, $D=C_0+I+cY$, y la otra con mayor pendiente que la anterior (mas siempre menor que la unidad), $D_1=C_0+I+c_1Y$, a las que se aplica el mismo incremento de la inversión (ΔI), y, en ambos casos, el resultado es el mismo.

En efecto: la primera de estas funciones conlleva un equilibrio inicial a un bajo nivel de PIB (OG) en comparación con la segunda, que implica un PIB más cuantioso (OG_1). Al incrementarse la inversión en idéntico monto para ambos supuestos ($BF=B_1F_1$), en el primer caso crece poco el PIB (GH), habiendo sido bajo su PIB inicial; mientras que en el segundo caso aumenta mucho el PIB (G_1H_1), siendo alto su PIB inicial. Al dividir sus respectivos incrementos de PIB por sus respectivos PIB iniciales, resulta que sus incrementos proporcionales son exactamente iguales (recuérdese que $BF=B_1F_1$):

$$\frac{GH}{OG} = \frac{BF}{OA} = \frac{G_1H_1}{OG_1} = \frac{B_1F_1}{OA}$$

En resumidas cuentas, la solución, no depende de la pendiente de la función de demanda agregada que, pudiendo ser cualquiera, no afecta a la solución, como ya se ha tenido

ocasión de apreciar en su fórmula:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{C_0 + I} = \frac{\Delta Y_1}{Y_1}$$

4 Interpretación

Si esta solución (o fórmula) puede parecer extraña es debido al rechazo inicial de la mente, acomodada a ideas preconcebidas, que suele bloquear lo desconocido (para lo que se requiere adaptación). Pero la ciencia matemática es una de las más lógicas y sus derivaciones son totalmente ciertas en la medida que se acepten las hipótesis de partida y no haya errores en el proceso deductivo. Si se asume que hay gastos exógenos, en consumo y en inversión⁵ (lo que parece tan evidente que no precisa demostración), y se acepta que de un periodo al siguiente una aproximación lineal es suficientemente satisfactoria, lo demás es resultado de la lógica matemática y sólo requiere interpretación.

La interpretación más inmediata de esta demostración es que lo relevante para la tasa de variación del PIB es el gasto exógeno agregado inicial ($C_0 + I$ en este modelo simple). Lo cual no desentona con lo dicho por Skidelsky (2009: 38): si «el PIB se espera que caiga un 5%, el Gobierno inyectará un 5% de gasto extraordinario en la economía». El fomento del gasto extraordinario debe ser tanto en consumo exógeno (ΔC_0) como en inversión exógena (ΔI); lo cual no significa que se niegue la existencia de un consumo e inversión inducidos por la renta generada en el periodo⁶. Lo que resulta notable, tras la demostración matemática, es que el gasto inducido no afecta al porcentaje de variación del PIB al considerar funciones lineales.

Otra interpretación concierne a los términos de la fórmula de la demostración. Es preciso recordar que C_0 e I quedaron prefijados al principio del periodo a considerar. Aunque siempre con carácter de prefijados, para su estudio se pueden contemplar valores altos o bajos de C_0 e I y comprobar su repercusión en la fórmula; pero, en el modelo, sólo se considera la

⁵Se aprovecha la introducción del término gasto para indicar que se entiende por «demanda» lo que se pide, es decir, una potencialidad o expectativa, y por «gasto» lo que se ha realizado. En la medida en que la expectativa se realice, ambos términos coinciden. Dando esto por supuesto, a veces se usan como sinónimos.

⁶ Hace años, hubo autores seguidores de Keynes, como Samuelson (1969: 272) y Lipsey (1968: 614-615), que tuvieron en cuenta la inversión inducida por la renta; pero en ediciones posteriores de sus manuales la suprimieron, dejando sólo la inversión exógena.

variación de I en el periodo, la cual está recogida en ΔI .

Por otra parte, se debe tener en cuenta que el resultado está vinculado a la condición de equilibrio. Por cierto, el efecto de la Contabilidad Nacional, que está diseñada bajo la perspectiva de la igualdad entre producto interior bruto y gasto interior bruto, es que en ella siempre se da la condición de equilibrio $D=Y$ (los errores y demás descuadres son corregidos en la rúbrica de variación de existencias). Su consecuencia es que siempre, en cualquier periodo y para cualquier cuantía, el cálculo estadístico del PIB da un punto, en su representación gráfica, que se halla sobre la bisectriz del primer cuadrante, y en él ha de cortar a la bisectriz cualquier recta representativa de la función de demanda agregada ($C+I$) y, por encima de ella, ha de figurar la nueva función de demanda agregada que, incorporando la adición del nuevo gasto exógeno en inversión (ΔI), proporciona un nuevo punto de equilibrio sobre la bisectriz.

Además, conviene resaltar las siguientes consideraciones:

- 1) El porcentaje de variación de la renta siempre será inferior a la variación porcentual de la inversión, ya que el denominador de la fórmula satisface $C_0+I > I$; lo que quiere decir que, en este modelo, la elasticidad de la renta respecto a la inversión ($\varepsilon_{Y/I}$) siempre es rígida, o menor que la unidad: $\varepsilon_{Y/I} = \frac{\Delta Y}{\frac{Y}{I}} < 1$ (cuya demostración es inmediata a partir de la fórmula que se ha demostrado).

Esto significa que la sensibilidad de la renta ante variaciones de la inversión es moderada; es decir, para obtener un determinado porcentaje de aumento del PIB, se requiere incrementar la inversión en un porcentaje bastante más elevado que el deseado del PIB. Pero si consideráramos variables los gastos exógenos, tanto en consumo como en inversión, en $Y = C+I$, resultaría que: $\Delta Y = \Delta C_0 + \Delta I$ (siempre y cuando no haya dependencia funcional entre C_0 e I , cuya independencia parece plausible dado que quienes deciden consumir no suelen ser los mismos que deciden invertir, y, si en algún caso lo fueran, sus decisiones en ambos campos no se vinculan entre sí). Dividiendo ésta última ecuación por la anterior igualdad se tendrá:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta C_0 + \Delta I}{C+I}.$$

De ahí que, si a la vez se consiguen subir todos los gastos exógenos (consumo e inversión, en este modelo simplificado), entonces el PIB ascendería en idéntica

proporción a la que lo hicieron todos los gastos exógenos. Así pues, en la medida que el aumento del empleo dependa del porcentaje de incremento del PIB, los elementos exógenos del gasto agregado son los que cobran importancia.

Acerca de esto conviene señalar que, en modelos que contemplaran otros gastos, pueden suscitarse incrementos de cualquiera de los componentes del gasto agregado sin que haya que limitarse exclusivamente a la inversión; es decir, tan importante es fomentar el consumo exógeno como la inversión, como las exportaciones, como la reducción de las importaciones.

- 2) El consumo exógeno puede jugar un papel moderador en las variaciones de la renta nacional ante alteraciones exógenas de la inversión, porque cuanto más alto sea el consumo exógeno tanto menor será la elasticidad de la renta respecto a la inversión y, por lo tanto, el porcentaje de variación de la renta nacional respecto a la variación porcentual de la inversión será tanto menor (tanto al alza como a la baja). Según esto, aplicando este principio ahora al caso de una recesión económica, cuando merma la inversión, nuevas prestaciones sociales cuantiosas y el fomento de más consumos exógenos (sanidad, educación, pensiones, seguros sociales, etc.) ayudan a moderar la intensidad de la crisis. También es verdad que al invertirse el ciclo se modera la magnitud del crecimiento económico medido en porcentaje de aumento del PIB (por eso, entre otras cosas, resulta difícil remontar una recesión). La norma, insistimos, es que, en todo caso, tanto en crisis como en auge, las fluctuaciones de la renta se moderan con un consumo exógeno elevado.
- 3) El razonamiento anterior es extensible, con idénticos resultados, a la inversión, cuyos valores de partida pueden ser altos o bajos. Está claro, que niveles altos de inversión también moderan las fluctuaciones de la renta nacional (al alza y a la baja), como así suele suceder en los países desarrollados (excepto cuando en una profunda crisis, la inversión se recorta drásticamente).
- 4) Del modelo simplificado y sus equivalencias ampliamente aceptadas y recogidas por la Contabilidad Nacional (CN), es posible extraer otra consideración. En ese modelo quedó establecida, mediante la condición de equilibrio, que la producción de un periodo es la suma del consumo más la inversión en dicho periodo, implantándose con nitidez un modelo económico de demanda (o de gasto agregado, pues, según lo que antes dijimos del efecto de la CN, ambos conceptos son siempre

iguales en la CN): $Y=D=C_1+I$. Por otra parte, también se considera que de la renta del periodo, lo que no se consume se ahorra, es decir, $Y=C_2+S$. Pero hay que dudar que verdaderamente al final de cada periodo (arbitrario de por sí), la economía esté en equilibrio y de que en esas dos igualdades sean equivalentes los respectivos consumos; antes bien se puede suponer que son distintos: $C_1 \neq C_2$, porque en C_1 intervienen partidas no provenientes de la renta del periodo, mientras que todo C_2 , por definición, está generado por dicha renta. Por eso, pudiendo ser uno mayor que el otro, no hay que descartar una insuficiencia de demanda para llegar al pretendido equilibrio, o a cualquier nivel de ocupación prefijado (o un exceso de la demanda que se resuelva con una inflación); y, en el caso de una insuficiencia, ésta es debida tanto al consumo como a la inversión (y también al tandem de las exportaciones e importaciones que también conviene introducir ampliando el modelo a estos componentes).

- 5) Además, es preciso recordar que del valor del PIB se retribuyen los factores de la producción en forma de salarios (W), beneficios del capital (B) y rentas de la propiedad (R), de modo que⁷: $Y=W+B+R$.

De esta equivalencia resulta evidente que $W < PIB$, por lo que, para superar la insuficiencia de la demanda, en aras de lograr un aumento del empleo, o sencillamente remontar una recesión económica aumentando el PIB, el peso del incremento del gasto agregado no debe esperarse de la elevación del consumo de los asalariados, porque los asalariados de un país jamás podrán adquirir todo lo producido en ese periodo con sus retribuciones del periodo y mucho menos consumir más para alcanzar el objetivo de elevar el PIB. Forzosamente, para retirar todo el PIB se necesita inyectar en el sistema económico íntegramente un montante equivalente al valor de $B+R$, y más si se precisa un crecimiento económico. Y resulta que esto es harto difícil de lograr, porque en cuanto alguien ahorre un poco sin dedicarlo a promover trabajo productivo, o llevando su ahorro a un paraíso fiscal, o donándolo en el extranjero, o consumiendo productos foráneos, prácticas habituales con dineros

⁷ Smith decía: «El precio total o el valor en cambio de aquel producto anual no puede por menos de resolverse necesariamente en esas tres partes, y distribuirse entre los habitantes del país, como salarios del trabajo, o como beneficios del capital, o como renta de la tierra» (Smith, 1994: 259). No obstante, algunos impuestos, como los indirectos (IVA), no forman parte de la retribución a esos tres factores de la producción; de ahí la distinción de PIB a coste de los factores y PIB a precios de mercado.

procedentes de los beneficios y las rentas (y los tributos, detraídos de la remuneración de los factores) o reduciendo los salarios, ya se ponen las bases para que la economía entre en crisis por insuficiencia de la demanda, que es sistémica y solo se palia temporalmente (hasta su estallido) mediante el consumo a crédito y el déficit público, los cuales causan inflación y ahorro forzoso (que merma el consumo de los perceptores de rentas fijas o cuya variación sea con apreciable retardo). El déficit público es un arma de doble filo, pues mientras por un lado fomenta la demanda (en consumo e inversión), a la vez, por el otro lado, suscita la inflación, que merma el gasto real (es decir, provoca un injusto ahorro forzoso⁸).

En definitiva, parece ser que el fomento de la iniciativa privada, fallando ésta, para promover el dinamismo económico, aumentando los gastos exógenos agregados (en consumo, inversión, sustitución de importaciones, o promoción de programas de investigación y desarrollo), debe provenir del sector público que ha de aplicar a ello todos los recursos posibles con eficaz gestión y controlando al máximo el déficit.

5 Conclusión

En lo que respecta a la tasa de variación del PIB, cuando se contempla un modelo lineal de determinación de la renta, lo único influyente es el gasto exógeno inicial, $C_0 + I$, y el incremento de los gastos autónomos, mientras que es absolutamente irrelevante la pendiente de la función de consumo.

Referencias

- Keynes, J. M. (1933). *The Means to Prosperity*. Londres: Macmillan. Traducido al español bajo el título *Medios para la prosperidad*, en Keynes, J. M. (1997): *Ensayos de Persuasión*. Vol. II, Barcelona: Ediciones Folio, pp. 337-366.
- Keynes, J. M. (1989 [1936]). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Londres: Macmillan.
- Keynes, J. M. y Henderson, H. D. (1929). *Can Lloyd George Do it? The Pledge Examined*. Londres:

⁸ Según dijo Thornton (2000: 232): «Pero este ahorro, como todo ahorro adicional proveniente de un desfalco de los ingresos de los miembros de la sociedad, irá acompañado de una privación e injusticia proporcionales».

- The Nation and Athenaeum. Traducido al español bajo el título *¿Puede hacerlo Lloyd George? Examen de la promesa*, en Keynes J. M. (1997): *Ensayos de Persuasión*. Vol. I, Barcelona: Ediciones Folio, pp. 96-133.
- Lipsey, R. G. (1968). *An Introducción to Positive Economics*. 2nd Edition. Londres: Weisenfeld and Nicholson.
- Samuelson, P. A. (1969). *Curso de Economía Moderna*. Madrid: Aguilar Ediciones.
- Skidelsky, R. (2009). *El regreso de Keynes*. Barcelona: Crítica.
- Smith, A. (1994 [1776]). *Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Thornton, H. (2000 [1802]). *Crédito papel*. Madrid: Ediciones Pirámide.