Ciência & Educação (Bauru)
ISSN: 1516-7313
revista@fc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

Pastre Oliveira, Gerson; Vilhena Fonseca, Rubens

A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética

Ciência & Educação (Bauru), vol. 23, núm. 4, octubre-diciembre, 2017, pp. 881-898
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
São Paulo, Brasil

doi: https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015

A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética

Number theory in training of Mathematics teachers: (mis)understandings about primality and fundamental theorem of Arithmetic

Gerson Pastre Oliveira[1] . Rubens Vilhena Fonseca[2]

Resumo: Este artigo aborda as formas pelas quais um grupo de licenciandos em Matemática compreendem alguns conceitos da Teoria dos Números, entre os quais o de números primos e o teorema fundamental da aritmética. Por meio de uma abordagem qualitativa, foram recolhidas respostas de dez sujeitos a duas questões, que foram analisadas à luz do conceito de transparência/opacidade das representações numéricas, para verificar se haveria coerência entre os conceitos enunciados nas respostas em relação ao problema que deveria ser resolvido. Assim, o texto evidencia estratégias usadas pelos participantes da investigação, relacionadas às questões que envolvem a primalidade dos números naturais, bem como a importância do conhecimento formal da teoria dos números por parte dos professores de Matemática em formação. Além disso, surgiram elementos que indicam que o apelo à intuição, nem sempre correto, e às soluções prescritivas ocorreram consideravelmente, tanto no contexto pesquisado como nos trabalhos empregados como referências teóricas.

Palavras-chave: Representações numéricas. Números primos. Educação matemática. Teoria dos números. Teorema fundamental da aritmética.

Abstract: This article discusses the ways in which a group of undergraduates in Mathematics understand concepts related to number theory, including "prime numbers" and "fundamental theorem of arithmetic". Through a qualitative approach, the answers for two questions were collected from ten subjects, which were analyzed in the light of the concept of transparency/opacity of numerical representations, in order to verify whether there was consistency between the concepts set out in one answer in comparison to the problem that should be solved in the other. The text highlights strategies used by research participants related to issues involving the primality of natural numbers, and the importance of formal knowledge of number theory by the mathematics teachers in training. In addition, there were elements that allowed us to conclude that the appeal to intuition, though not always correct, and too prescriptive often occurred, both in the context researched and in the works used as theoretical references.

Keywords: Numerical representations. Prime numbers. Mathematics education. Number theory. Fundamental theorem of arithmetic.

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), São Paulo, SP, Brasil. E-mail: <gpastre@pucsp.br>.
[2] Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, PA, Brasil.

Introdução

Talvez a ninguém que de alguma forma esteja vinculado aos processos de formação de professores de Matemática ocorra pensar que os temas e conteúdos relativos à Teoria Elementar dos Números careçam de relevância. Neste sentido, admitir que o professor de Matemática do ensino fundamental deva dominar conhecimentos desta natureza parece questão resolvida, em uma análise mais superficial. Entretanto, de outro ponto de vista, o da pesquisa acadêmica, a temática não parece merecer tanta atenção: eventualmente considerados demasiadamente simples por envolverem questões como divisibilidade e primalidade, por exemplo, é certo que poucas perquirições têm sido levadas a efeito neste campo. Assim, neste artigo, procura-se evidenciar alguns elementos que apontam para a importância de temas ligados à Teoria dos Números na formação docente, tomando como ponto de vista as formas pelas quais podem se dar as representações numéricas e a importância do domínio conceitual neste contexto. Na verdade, a pesquisa que aqui se relata traz resultados ligados aos projetos "Tecnologias e educação matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces"[3] e "Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEAMAT/ DIMAT"[4], ainda que não se trate, especificamente, de tecnologias, mas de um dos objetos matemáticos sobre os quais, em outras frentes, e empregando resultados como os aqui trazidos, se utilizou a partir de uma abordagem com interfaces (como em OLIVEIRA, 2015, por exemplo).

De fato, por diversas trajetórias, o percurso histórico, responsável pela consolidação de temas relativos à teoria dos números, aportou na escola, por meio de inserções curriculares. Em perspectiva, então, era de se esperar que a formação dos professores em cursos de Licenciatura em Matemática permitisse um amplo contato com elementos relativos à teoria dos números, mas não tem sido assim. Em sua investigação de temas correlatos àqueles tratados aqui, Resende (2007) menciona que as possibilidades de formação abertas por este ramo da Matemática têm sido negligenciadas nos mais diversos segmentos escolares. O descarte das chances de aprendizagem abertas com a exploração deste tema representa lamentável desperdício: trabalhar com a teoria dos números no âmbito escolar pode, por exemplo, "[...] criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da Matemática" (MACHADO; MARANHÃO; COELHO, 2005, p. 26).

A Teoria dos Números, que tem parte do seu conteúdo conhecido na escola básica como aritmética, assim como as primeiras noções de geometria, são as portas de entrada das pessoas para a cultura matemática. Em que pese a pouca evidência dada ao tema, sua importância é inegável, uma vez que, considerando a mais óbvia das razões, pode-se identificar elementos da aritmética básica por toda parte. Por isso, o trabalho inicial com os números deveria surgir intimamente relacionado com as questões matemáticas mais relevantes na formação do professor que ensina Matemática, como aventa Resende (2007, p. 7):

[3] Projeto apoiado pelo CNPq e executado no âmbito do grupo PEA-MAT, do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

[4] Projeto apoiado pela FAPESP e executado do contexto da parceria entre os grupos de pesquisa PEA-MAT (PUC/SP) e DIMAT (PUC Peru).

> Tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica, sendo que os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de matemática nesse nível e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor; a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de ideias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar, como a recorrência, a indução matemática, a divisibilidade; a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova, porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova tem diferentes funções e que, no ensino, não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática.

Apesar da sua relevância para a formação de futuros professores, Resende (2007) observa que a Teoria dos Números não é um tema considerado importante nas pesquisas em Educação Matemática, o que pode ser constatado pelo número escasso de investigações conduzidas sobre este assunto. Entretanto, no âmbito da investigação que aqui se relata, o tema, no âmbito da aprendizagem dos números naturais, é de grande importância, bem como a necessidade de apropriação de seus pressupostos epistemológicos e de estratégias pertinentes de ensino, por parte de professores de Matemática em formação. Por outro lado, é preciso considerar que as crianças, ao chegarem à escola, não encaram os números e as operações elementares relativas a eles como fatos inéditos, o que permitiria que seu ensino considerasse esta premissa, em caráter progressivo. Justamente neste sentido, afirmam Friederich, Kruger e Nehring (2009, p. 4):

> As crianças ao chegarem à escola, já possuem certa noção dos números e algumas operações básicas, portanto o estudo dos números, como objeto matemático, precisa envolver o reconhecimento da existência de diferentes tipos de números e de suas representações e classificações, exemplo os números primos, compostos, pares, ímpares, fracionários etc. É importante salientar que partir dos conhecimentos que as crianças possuem não significa restringir-se a eles, pois é papel da escola ampliar esse universo de conhecimento e dar condições a elas de estabelecerem vínculos entre o que conhecem e os novos conteúdos que vão construir, possibilitando uma aprendizagem significativa.

Justamente, para trabalhar com os exemplos e problematizações elencadas na fala dos autores supramencionados, faz-se imprescindível apresentar domínio sobre os temas em questão. Desta forma, o trabalho com a Teoria dos Números, no recorte exibido pela pesquisa que aqui se evidencia, pretendeu identificar, por meio de problematizações, os conhecimentos e dificuldades evidenciados por um grupo de alunos de um curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará acerca dos conceitos/propriedades dos números primos e do teorema fundamental da aritmética. Como potenciais futuros professores, esta investigação tem grande parte de sua importância ligada à atuação destes sujeitos nos ambientes escolares, e na sala de aula, em particular, no que se refere ao trabalho didático com os números primos.

A compreensão sobre saberes e dificuldades neste ponto pode auxiliar, eventualmente, no que se refere a ações que interfiram positivamente na formação de professores de matemática para o trabalho com tópicos da teoria dos números.

Estes objetos matemáticos surgem bem cedo na vida escolar dos estudantes. Os sistemas escolares preveem a introdução do conhecimento relativo aos números primos, por exemplo, geralmente no 6º ano do Ensino Fundamental. De fato, os Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) recomendam, naquilo que chamam de terceiro ciclo (os atuais 6º e 7º anos) um trabalho continuado com os números naturais "em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números 'grandes' e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza" (BRASIL, 1998, p. 66).

Neste contexto, a introdução dos números primos não pode surgir de forma descolada em relação ao princípio multiplicativo, nem exposta sem a contextualização proposta por situações problema:

> Conceitos como os de 'múltiplo' e 'divisor' de um número natural ou o conceito de 'número primo' podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (BRASIL, 1998, p. 66).

Em atenção a esta proposição, observa-se que o que se apresenta nos livros usados nas escolas do Pará, contexto de realização da pesquisa em questão, não difere dos parâmetros curriculares nacionais (PCN) e é muito semelhante ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) que propõe a introdução do conceito de números primos no 6º ano do Ensino Fundamental. Como é possível observar na Figura 1, o conteúdo está relacionado não à mera identificação dos primos, mas ao seu significado.

Em relação ao conceito de primalidade, as situações de aprendizagem devem fornecer condições didáticas para que os estudantes percebam que alguns números são o produto de outros, como etc., ou seja, que são números compostos. Neste contexto, devem os estudantes entender que os demais números são aqueles que não têm outros fatores além deles mesmos e da unidade. Em outras palavras, é importante que os discentes registrem que primo é todo número, maior do que 1, divisível somente por si mesmo e pela unidade, compreendendo que os primeiros números primos são 2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, etc. Outra compreensão valiosa neste sentido é aquela por meio da qual se pode afirmar que, quando um número não é primo, o mesmo pode ser decomposto em fatores primos, como 2 x 2 x 3 = 12, 2 x 3 x 5 = 30, 5 x 11 x 17 = 935. Pelo seu caráter basilar no estudo dos números inteiros, essa propriedade é conhecida como o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Ela significa que os números primos são, por assim dizer, os "átomos" ou "tijolos" da construção numérica pela multiplicação.

Figura 1. Números primos em uma abordagem curricular

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números naturais • Múltiplos e divisores • Números primos • Operações básicas (+, −, . , ÷) • Introdução às potências Frações • Representação • Comparação e ordenação • Operações	• Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional • Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores • Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação) • Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações • Saber realizar as operações de adição e subtração de frações de modo significativo

Fonte: São Paulo (2011, p. 57).

Assim, é preciso pensar na maneira como podem ser construídos elementos didáticos que estimulem o trabalho com os números primos com os futuros professores, do ponto de vista da formação matemática dos mesmos. A construção da aprendizagem relacionada a estes objetos representa um desafio para o professor, à medida que os processos relacionados ao significado deste tema precisam fornecer elementos para que o estudante não apenas compreenda as características intrínsecas destes números e a importância da apropriação do conhecimento relativo aos mesmos no âmbito da aritmética, como também desenvolvam competência para o emprego das propriedades dos primos em situações matemáticas contextuais, caracterizadas por argumentações, demonstrações, provas e usos específicos (compreensão de códigos criptográficos é um caso típico) e, também, fundamentalmente, em situações em que se solicite a resolução de problemas (COUTINHO, 2000).

Uma vez que a descrição sobre os números primos e sua inserção na aprendizagem de elementos da teoria dos números tenha sido exposta, uma questão importante a pensar é em como este conceito é mobilizado pelos licenciandos. Como poucas pesquisas no âmbito dessa teoria foram conduzidas sob a égide da Educação Matemática, parece haver espaço para discutir questões relativas aos objetos que lhe sejam associados, como os números primos e o teorema fundamental da aritmética. Neste aspecto, muitas construções conceituais sobre a primalidade, as propriedades referentes aos números primos e sobre o TFA têm se mostrado frágeis na formação dos professores de Matemática (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996).

Sobre este segundo ponto, Zazkis e Campbell (1996) efetuaram um estudo, essencial para a pesquisa aqui descrita, com professores em formação, no intuito de levantar e analisar dados sobre a compreensão dos mesmos acerca do teorema fundamental da aritmética. A investigação, realizada por meio de questionários e entrevistas contendo elementos objetivos, concluiu que os professores apresentam substancial dificuldade na compreensão da unicidade da decomposição de números inteiros em fatores primos. Quando confrontados com as questões objetivas, os professores em formação recorreram a diversos recursos, como aplicação de regras de divisibilidade, cálculo de raízes, verificação do fato de determinada divisão ser exata, entre outros. Entretanto, se compreendido e aplicado o teorema aqui mencionado, este esforço em aplicar operações sucessivas e por vezes demoradas poderia ser dispensado.

Em outro estudo, também crucial para esta investigação, Zazkis e Liljedahl (2004) trataram do tema que pode ser visto como ainda mais básico, buscando investigar a compreensão dos professores de escolas básicas em formação acerca dos números primos e de suas propriedades. Aqui, os autores identificaram uma série de dificuldades conceituais por parte dos professores em formação, entre as quais a dificuldade de aplicação do próprio conceito de primalidade, que surgiu quando alguns sujeitos não conseguiram determinar (ou o fizeram de forma errônea) se $m(2k + 1)$ poderia ser um número primo, com m e k inteiros. Desta forma, considerando a escassez de estudos desta natureza, achou-se pertinente abordar este tema sob o enfoque da compreensão e uso do conceito de número primo e do teorema fundamental da aritmética.

Assim, a pesquisa relatada neste artigo, de caráter qualitativo, procurou investigar como os conceitos e propriedades dos números primos, elementos essenciais da teoria dos números, e os conceitos do Teorema Fundamental da Aritmética são apropriados por potenciais professores em formação (estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará), e a maneira pela qual tais professores compreendem e resolvem problemas relativos a estes temas.

Com o intuito de lidar com esta problemática, os licenciandos mencionados foram submetidos a atividades formatadas a partir de pressupostos ligados a representações numéricas e suas características, cuja visão neste texto mais adiante se explicita. As análises são conduzidas com aportes ligados aos estudos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedhal (2004), de modo a aprofundar as questões relativas à primalidade, tendo por foco o teorema fundamental da aritmética. Desta forma, um objetivo secundário pode ser alinhado, consistindo na comparação entre os resultados obtidos nos estudos originais e aqueles obtidos neste trabalho, cujos elementos teóricos essenciais são discutidos em seguida.

Principais aportes teóricos

O conceito central considerado na investigação aqui evidenciada se refere à *transparência* e à *opacidade* das representações numéricas, a partir do encaminhamento do mesmo no âmbito do grupo Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) a partir dos trabalhos de Oliveira (2015) e Fonseca (2015). Neste sentido, o estudo de Zazkis e Liljedahl (2004) discute o papel das representações no âmbito dos números naturais. Em seu trabalho, os autores trouxeram à tona e analisaram os dados obtidos a partir de uma investigação também realizada com professores de ensino fundamental em formação, com foco na compreensão dos mesmos acerca dos números primos, de modo a detectar os fatores que influenciam este entendimento. A argumentação empregada nas análises dos dados coletados é que a falta de transparência da representação dos números primos configura um obstáculo para a compreensão sobre os mesmos.

Esta ideia é apropriada a partir do trabalho de Lesh, Behr e Post (1987). Referindo-se às múltiplas representações dos números racionais, os autores indicam que as mesmas "incorporam" as estruturas matemáticas, no sentido de que as retratam em termos materiais. Desta forma, os sistemas representacionais podem ser vistos como opacos ou transparentes. Neste sentido, para os autores, uma representação transparente teria nem mais, nem menos significado do que as ideias ou estruturas que exprime, enquanto uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estruturas e esconde outros. De posse de variadas possibilidades, caberia a uma estratégia didática, por exemplo, capitalizar os pontos fortes de um determinado sistema representacional e minimizar suas fraquezas – tais fatores seriam, segundo os autores, de extrema importância para a aquisição e o uso de ideias matemáticas.

A partir da proposta de Lesh, Behr e Post (1987), Zazkis e Gadowsky (2001), focando as representações numéricas, introduzem a noção de transparência e opacidade relativas. Os autores sugerem, em seu trabalho, que todas as representações relativas a números são opacas, justamente no sentido em que, de alguma forma, sempre escondem algumas características de um número, embora possam revelar outras, em relação às quais podem ser transparentes. Como exemplo, os autores indicam uma lista com os seguintes componentes: (a) 216^2; (b) 36^3; (c) 3 x 15552; (d) 5 x 7 x 31 x 43 + 1; (e) 12 x 3000 + 12 x 888. As autoras mencionam que tais expressões não aparentam simbolizar o mesmo número, 46656, e citam Mason (1998 apud ZAZKIS; GADOWSKY, 2001, p. 45) para indicar que "[...] cada representação desloca a atenção para diferentes propriedades do número". Quanto à transparência e opacidade representacionais, as autoras indicam que a representação (a) é transparente em relação ao fato de o número em questão ser um quadrado perfeito, enquanto que a (b) é transparente no sentido de evidenciar que 46656 é um cubo perfeito. A representação (c), por sua vez, indica, de forma transparente, que o número é múltiplo de 3 e de 15552. De outro modo, ainda que (a) e (b) também permitam concluir que 46656 é múltiplo de 3, nada revelam a respeito de 15552 – ou seja, as representações (a) e (b) são opacas quanto ao fato de 46656 ser um múltiplo de 15552.

Outro exemplo significativo sobre a opacidade invariável das representações numéricas refere-se à extensão do conceito feita por Zazkis e Liljedahl (2004), partindo de números específicos para conjuntos de números que possuam a mesma propriedade verificável por meio de uma notação algébrica. Por exemplo, $17k$ é uma representação transparente para um múltiplo de 17, no sentido de que esta propriedade está embutida (ou "pode ser vista") nesta forma; todavia, não é possível determinar se $17k$ é múltiplo de 3 considerando tão-somente esta representação. Neste caso, aponta-se que a mesma é opaca no que se refere à divisibilidade por 3 (ZAZKIS, 2002).

Desta forma, pode-se considerar que o trabalho de Zazkis e Liljedahl (2004) caracteriza um marco importante no conceito de representações transparentes e opacas utilizado nesta pesquisa. A partir da apropriação deste conceito na representação numérica, os autores argumentam que todas as representações desta natureza são opacas, mas que possuem características transparentes. Para exemplificar semelhante afirmação, os autores indicam que a representação do número 784 como 28^2 enfatiza que o mesmo é um quadrado perfeito, mas de certa forma oculta a divisibilidade deste número por 98. Ou seja, ao representar 784 como 28^2, a propriedade de 784 como quadrado perfeito é transparente, enquanto que a propriedade da divisibilidade deste número por 98 é opaca.

Em relação ao trabalho aqui discutido, atividades envolvendo as características das representações numéricas foram apresentadas aos sujeitos. As descrições relativas aos procedimentos metodológicos se encontram a seguir.

Principais aportes metodológicos

O trabalho aqui descrito tem caráter qualitativo, caracterizando-se, desta forma, por dados descritivos, por um planejamento aberto e pelo foco na realidade de maneira complexa e contextual (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Em sua pesquisa, ao descrever a abordagem qualitativa na pesquisa educacional, Oliveira (2007, p. 27) assim se expressa:

> A opção pela pesquisa qualitativa mostrou-se, desde os estágios iniciais do planejamento, aquela que me parecia mais adequada. As questões que surgiam e que causavam o impulso em direção da busca de sentidos e elucidações tinham caráter particular, não podiam ser generalizadas em torno de quantidades sempre aplicáveis e de percentuais infalíveis, pedindo, antes, descrições que apontassem na busca das respostas direcionadas pelo problema e pelas hipóteses substantivas.

No mesmo estudo, Oliveira (2007) indica que existe uma complementaridade entre dados qualitativos e quantitativos. Para o autor, em que pese o caráter descritivo desta abordagem, cuja finalidade é compreender o significado que as pessoas atribuem aos fenômenos em estudo, os dados quantitativos podem completar o quadro, considerando que o processo tem ampla importância. No caso desta pesquisa, foi possível observar, nos protocolos produzidos pelos sujeitos e em suas falas, indicativos das compreensões e dificuldades acerca dos conceitos de primalidade e do TFA. Estas indicações, levantadas nas análises, têm natureza qualitativa, em que pesem respostas e desenvolvimento de caráter aritmético, que podem ser vistas como quantitativas em certa medida.

Em relação aos sujeitos, participantes da pesquisa aqui descrita, foram voluntários 10 licenciandos em Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA), com idades entre 19 e 23 anos, alunos do segundo ou terceiro ano do curso mencionado.

Nenhum dos dez participantes lecionava oficialmente no ensino fundamental e médio. A maioria declarou, em conversas na sala, que trabalhar com o conjunto dos inteiros positivos não parecia ser algo difícil e que um assunto dentro desse conjunto, como os números primos, não seria objeto de muita atenção e chegaria mesmo a ser negligenciado em circunstâncias comuns. Foram destinados dois sábados pela manhã para a aplicação das questões e três manhãs dos sábados subsequentes para a discussão das questões e suas soluções. Os participantes tiverem duas horas nas duas primeiras sessões para resolverem três questões, totalizando, desta maneira, seis questões, das quais duas são analisadas e discutidas neste texto. Nas outras três manhãs de sábado, foram feitos encontros de uma hora para discussão das propostas apresentadas.

Foram recolhidos os dados a partir da sequência de atividades aplicada e dos diálogos informais ocorridos durante as sessões com os 10 participantes, realizadas no âmbito do Laboratório de Ensino e Educação Matemática (LABEM) da UEPA, câmpus de Belém. Os dados foram coletados, desta forma, por meio das resoluções providas pelos sujeitos aos problemas componentes da sequência, das anotações que produziram e por meio de alguns registros dos diálogos.

O instrumento utilizado na pesquisa foi aplicado no segundo semestre de 2014. Os alunos do terceiro ano já haviam visto, diretamente, os conteúdos de divisibilidade, máximo divisor comum, números primos, TFA, entre outros, na disciplina Teoria dos Números. Entretanto, conforme declararam, os temas matemáticos tratados nesta pesquisa eram conhecidos por todos. De fato, a maioria dos estudantes cursava o terceiro ano, sendo que apenas dois deles cursavam o segundo ano. Como os temas da pesquisa, números primos e o TFA, foram trabalhados na trajetória escolar pregressa dos estudantes, esta distinção não foi considerada importante.

A sequência de atividades utilizada nesta pesquisa foi constituída a partir de problemas empregados nos trabalhos de Zazkis e Campbell (1996) e Zazkis e Liljedahl (2004), e é composta por seis questões problematizadas, ou seja, pensadas para que os estudantes se responsabilizassem pela resolução das mesmas sem a intervenção do professor/pesquisador. A ideia é que se engajassem em um processo investigativo que os conduzisse a evidenciar saberes e/ou dificuldades, cuja descrição fornecesse subsídios para o encaminhamento de respostas à questão de pesquisa. Em relação ao escopo deste artigo, duas das seis questões foram objeto de análise e podem ser vistas em seguida.

1. <u>Como você descreve um número primo? E um número composto? Qual é a relação entre números primos e compostos?</u> (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2004)

Nesta questão, esperava-se que os estudantes indicassem especificamente uma definição para números primos no âmbito dos números naturais como sendo aqueles números que são divisíveis apenas por si mesmos e por um – ou, ainda, aqueles números cuja única decomposição em fatores admitida é a trivial, contendo, como fatores, o próprio número e o número um. Definições parciais e/ou incompletas poderiam surgir, como a indicação de que os primos têm apenas dois divisores (sem especificar quais), ou que têm apenas a si mesmos como divisores (ignorando o 1).

Os números compostos possuem, além deles mesmos e do 1, como divisores, outros números menores do que ele mesmo e pertencentes ao conjunto dos números naturais. De forma mais completa, diz-se que os números compostos são aqueles que podem ser decompostos em fatores primos de forma única, a não ser pela ordem.

2. <u>Considere F = 151 x 157. F é um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão</u> (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2004).

Para esta questão, os estudantes deveriam anotar, como resposta, a alternativa "Não", uma vez que a representação indicada, pretensamente transparente, indica que F é composto, relacionando, inclusive, os fatores primos componentes. Os estudantes deveriam recorrer ao TFA para concluírem que a referida decomposição é única, a não ser pela ordem.

De outro modo, os sujeitos poderiam efetuar o produto indicado, obtendo 23707, uma representação opaca quanto à detecção do caráter composto do número. A partir desta outra representação, apesar de isto não ser necessário, o aluno poderia efetuar testes com os fatores para cogitar se este número seria primo ou não. Poderia ocorrer, inclusive, de o sujeito tentar efetuar divisões pelos primos a partir de 3, desistindo quando percebesse que os fatores menores que 151 não são divisores do número, podendo, inclusive, declarar erroneamente que o número é primo.

Constituídas as descrições necessárias, prosseguiu-se com as análises que tiveram lugar a partir das intervenções dos sujeitos da pesquisa.

Análises das respostas e interações providas pelos estudantes

Podem-se alinhar, em relação às análises, as categorias principais que as direcionam. Considerando o quadro teórico já mencionado, pode-se elencar:

- a natureza das características representacionais numéricas que surgem do trabalho dos alunos ao longo da sequência didática – transparentes ou opacas (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2004);

- a relação conceito/notação, ligada à representação numérica adotada, no sentido de perceber se os alunos preservam o significado conceitual ou se ficam restritos às formas de representação por eles conhecidas, ou, ainda, a eventuais abordagens intuitivas;

- as estratégias adotadas na resolução dos problemas componentes – de que forma se conectam com o conceito de números primos, compostos e o TFA – e se são adotados outros procedimentos operatórios/algoritmos.

Os quadros 1 e 2 trazem as respostas dos sujeitos à questão 1 do instrumento empregado na pesquisa. Os títulos das colunas, representando, de certa forma, categorias de respostas encontradas, referem-se à menção explícita dos licenciandos sobre certa característica que julgavam presentes nos números primos, nos números compostos ou na relação entre eles.

Na maioria das respostas indicadas pelos dez sujeitos, o conceito de números primos parece claro – apenas dois deles não mencionaram o fato de que os números primos podem ser divididos por 1.

De outro modo, entretanto, apenas três estudantes (Aluno 1, Aluno 4 e Aluno 10) indicam, quando se referem aos números compostos, que os números primos estão presentes na decomposição dos mesmos em fatores. Nenhum dos estudantes indica que a decomposição dos compostos em fatores primos é única, exceto pela ordem dos fatores. A dificuldade em relacionar o conceito de número composto com sua única decomposição em fatores primos indica o caráter opaco deste conceito e de sua representação, como mencionado por Zazkis e Liljedahl (2004), do ponto de vista do TFA. Trata-se, na verdade, de uma extensão do argumento dos autores, que indicam não haver representação transparente para os números em geral, e os primos, em particular – ainda que possam haver características transparentes em algumas representações, características estas ligadas a determinadas propriedades. Deste ponto de vista, uma vez que a relação entre os números primos e compostos, e a própria representação dos compostos, depende daquela relativa aos primos, por extensão, entende-se que existem representações para os números compostos que não são vistas como transparentes do ponto de vista do TFA. Assim, em relação a eventuais problemas envolvendo tais conceitos, a resolução dos mesmos pode depender de outros instrumentos, como a divisibilidade, o que pode concorrer por aumentar o custo cognitivo das resoluções ou torná-las menos acessíveis.

Por outro lado, considerando que o TFA já foi tema de estudo para os sujeitos em suas trajetórias de aprendizagem, a incapacidade relacionar este conhecimento em um contexto de aplicação pode sugerir a adoção daquilo que Molina e Oktaç (2007) chamam de *modelos intuitivos*. Tais modelos tendem a reduzir a complexidade de um conceito por meio da redução da abstração envolvida. Originalmente, esta argumentação é usada no âmbito da álgebra linear, mas podem ser percebidas ideias correlacionadas, à medida que os estudantes indicam outra característica típica de tais modelos: a substituição dos conceitos por criações particulares, utilizadas para dar respostas locais a certa categoria de problemas.

Quadro 1. Conceitos enunciados pelos sujeitos sobre números primos

Participante	Divisíveis pelo próprio número	Divisíveis por um
Aluno 1	Sim	Sim
Aluno 2	Sim	Não
Aluno 3	Sim	Sim
Aluno 4	Sim	Sim
Aluno 5	Sim	Sim
Aluno 6	Sim	Não
Aluno 7	Sim	Sim
Aluno 8	Não	Não
Aluno 9	Sim	Sim
Aluno 10	Sim	Sim

Fonte: elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Quadro 2. Conceitos enunciados pelos sujeitos sobre números compostos e sua relação com números primos

Participante	Compostos possuem mais de dois divisores	Compostos podem, eventualmente, ser decompostos em fatores compostos	São decomponíveis em fatores primos	Se um número não é primo, então é composto
Aluno 1	Sim	Não	Sim	Não
Aluno 2	Sim	Não	Não	Não
Aluno 3	Sim	Não	Não	Sim
Aluno 4	Sim	Não	Sim	Não
Aluno 5	Não	Não	Não	Não
Aluno 6	Sim	Sim	Não	Não
Aluno 7	Sim	Não	Não	Sim (exclui o 1)
Aluno 8	Não	Não	Não	Não
Aluno 9	Sim	Não	Não	Sim
Aluno 10	Sim	Não	Sim	Não

Fonte: elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Indiretamente, também, pode tratar-se de um efeito proveniente da própria trajetória didática à qual os sujeitos foram submetidos: para determinar se um número é primo ou não, eventualmente pode-se estabelecer, como técnica, um esquema de divisões sucessivas por seus antecessores (opcionalmente tendo a raiz quadrada do número como limite) e, no caso de se encontrar um divisor, estabelecer a conclusão de que o número é composto. Ao adotar esta técnica como forma de identificação dos compostos, o conceito relativo aos mesmos é ignorado.

Além disto, algumas respostas distintas ocorreram no âmbito da questão 1, de tal forma que não seria possível expressá-las de forma completa nos quadros 1 e 2. É o caso de Aluno 2, que escreveu: "*número primo é o número divisível por ele mesmo e números compostos são* números amplos [sic] *que podem ser divididos por qualquer outro número*".

Aluno 2 fornece uma descrição conceitualmente incompleta dos números primos, não indicando que os mesmos são divisíveis, também e trivialmente, por 1. Da mesma forma, sua definição sobre números compostos enuncia uma classificação particular para os mesmos ("*números amplos*"), talvez se referindo ao fato de que os mesmos têm mais divisores do que os primos; entretanto, ao fazê-lo, indica que os números desta natureza podem ser divididos por "*qualquer outro número*", o que não corresponde ao conceito em tela, já que, para números compostos, há uma decomposição em fatores primos que é única (muito longe de qualquer). Além disso, mesmo quando se tratar de uma decomposição em fatores quaisquer (não em primos), a mesma não admitirá números indistintos, mas números específicos.

A resposta de Aluno 4 também suscita reflexões importantes. Para este estudante:

> *Número primo é dado por várias formas de obtenção, porém a mais frequente em sala de aula, é aquela que diz que um número primo só possui dois divisores, no caso, 1 e ele mesmo. Número composto já é um número natural que possui mais de dois divisores, de maneira que todo número composto pode ser decomposto em um produto de dois ou mais números primos.*

Ainda que as definições de Aluno 4 estejam corretas em relação aos conceitos de números primos e compostos, o estudante procura assegurar outras eventuais "*formas de obtenção*", indicando que sua propositura é típica de sala de aula – eventualmente, então, deixa ao aluno aberta a possibilidade de outras definições de primalidade, ou, ainda, de outras formas de "obter" números primos. Em relação aos números compostos e o TFA, o sujeito indica ter ciência da decomposição em fatores primos, ainda que não mencione a unicidade da mesma. Chama a atenção o fato de o estudante não compreender o significado embebido na ideia de teorema e, por consequência, do caráter sistêmico do conhecimento matemático (MOLINA; OKTAÇ, 2007), o que se percebe quando indica que a "*obtenção*" (querendo significar definição) de números primos pode ser feita de maneira diversa.

Além das respostas típicas supramencionadas, o Aluno 5 alega desconhecer a definição e o conceito de números compostos. Já o Aluno 8 anota, simplesmente, "*acho que não tem relação entre os dois números*". Pode-se supor, neste ponto, que estes alunos apresentem dificuldades relativas à compreensão do TFA, considerando a correlação entre os conceitos mencionados.

A segunda questão do instrumento de pesquisa estava disponível para o trabalho dos sujeitos, como já se mencionou, da seguinte forma: "Considere $F = 151 \times 157$. F é um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão"**.**

A resposta anotada para a segunda questão pelo Aluno 1 foi "*a multiplicação destes dois valores dá 23707. Utilizando alguns critérios de divisibilidade, percebi que nenhum se adequará e para ser mais preciso seria necessário continuar fazendo testes, logo acredito que este resultado é primo*".

A resposta do Aluno 1 está, evidentemente, errada, já que F não é um número primo. Ainda que na resposta anterior o estudante tenha enunciado o conceito de números compostos relacionado à decomposição em números primos, tal ideia não é levada em consideração para a resposta. Desta forma, pode-se inferir que o conceito não possui significado para o aluno em questão ou que o mesmo acredita que pode haver outra fatoração em números primos que decomponha o número, resultado este também obtido por Zazkis e Campbell (1996). Além disso, destaca-se o método empregado: o sujeito recorre aos critérios de divisibilidade que conhece, que não são suficientes, e para, provavelmente, algoritmos de divisão, os quais representam um custo cognitivo bastante alto, já que o primeiro divisor de F é 151, um dos fatores primos de sua decomposição.

Outra suposição autorizada pelos comentários do estudante é a prevalência de uma crença, segundo a qual, "a decomposição em fatores primos significa, na verdade, a decomposição em fatores primos pequenos" (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996, p. 215). Os números envolvidos na decomposição de F em fatores primos são 151 e 157, e não são vistos como primos por não serem suficientemente "pequenos".

Como resposta à questão de número dois, o Aluno 2 anota, simplesmente, "s*im, pois F só é divisível por ele mesmo*".

A resposta provida pelo Aluno 2 dá poucas pistas sobre o método utilizado para sua conclusão equivocada. Apesar da representação utilizada buscar alguma transparência no que se refere à decomposição de um número em fatores primos, do ponto de vista de Zazkis e Liljedahal (2004), ao mostrar tais fatores primos, o aluno ignora solenemente esta característica para afirmar que o número é primo, indicando ainda, em conformidade com sua definição incompleta para a resposta à questão 1, que o número seria divisível apenas por si mesmo. Em outras palavras, o fato de o número poder ser escrito como uma multiplicação de outros números não o convenceu a considerar os fatores em questão como divisores do número candidato F.

Outra possibilidade que parece bem consistente neste caso é a de o estudante ter, por um critério qualquer, decidido que F seria um número primo e recorrido à sua definição de primalidade para justificar a resposta, ignorando a representação fornecida com a questão. Neste caso, o conceito incompleto ou errôneo funciona como um substituto para o significado, que seria, por sua vez, portador de validade matemática.

O Aluno 3 anota, como resposta à esta questão, "*sim, pois ele possui apenas dois divisores para ter um número inteiro como resultado".*

Da mesma forma que o seu colega anterior, o Aluno 3 indica a resposta incorretamente. Não é possível entender se o aluno considera que 151 e 157 são os únicos divisores do número F, descartando o próprio número e o 1, ou se, apesar de ter disponível a única fatoração de F em primos, não relaciona os fatores como divisores do número candidato, a exemplo do Aluno 2. De todo modo, o conceito de números compostos apresentado pelo sujeito na resposta à primeira questão o induz a procurar por divisores de F, e não por considerar sua decomposição única em fatores primos. Assim, ao não construir a correlação conceitual, a resolução do problema fica prejudicada.

Outra hipótese a ser levantada aqui pode ocorrer em torno de uma possível generalização indevida: uma vez que a fatoração trivial está disponível para todos os números, mas é a única existente para os primos, o estudante pode ter estendido esta propriedade para quaisquer números cuja fatoração em primos resulte em dois fatores.

Em relação à mesma questão, o Aluno 4 responde: "*sim, posto que entre os números 0 e 9, tal valor não possui divisão exata. Sendo assim, só existem dois valores possíveis de divisão exata, 1 e 23707*".

A resposta equivocada do Aluno 4 assemelha-se, de certo modo, àquela provida por Aluno 1, deixando, entretanto, mais pistas sobre as dificuldades conceituais existentes. O aluno evidentemente aplicou testes de divisibilidade, tendo o número 9 como limite para os mesmos. Desta forma, parece acreditar que este seria o limite à descoberta de um número primo. Mais uma vez, ao ignorar o conceito advindo do TFA, o aluno erra em sua resposta. Outro detalhe um tanto aflitivo é a inclusão do zero na lista de possíveis divisores de F.

Zazkis e Liljedahl (2004) indicam que alguns estudantes podem julgar que números vistos por eles como "grandes" devem possuir fatores primos "pequenos", ou seja, números até um certo – e reduzido – limite. Ao encontrarem um número composto cuja fatoração resulta em componentes maiores do que 100, por exemplo, os alunos tendem a considerar o número como primo.

A resposta trazida pelo Aluno 5 foi a seguinte: "*F = 151 x 157F, não, pois estamos diante de uma equação não somente de um número, e mesmo que resolvendo a multiplicação, ainda restaria uma incógnita F, a qual n*ão temos como saber o resultado".

No caso do Aluno 5, a representação supostamente transparente provida para F pareceu concorrer para que o estudante confundisse o número representado por uma multiplicação com uma equação. O mais espantoso é que a representação da multiplicação surge como completamente opaca para o estudante, na definição de Zazkis e Liljedhal (2004), pois, enquanto os fatores 151 e 157 aparecem mediados pelo símbolo "x", significando multiplicação, o símbolo F que aparece do lado direito da "equação" na resposta do sujeito, "misteriosamente", parece multiplicar apenas o 157, o que, aparentemente, impediu o aluno de "simplificar" a "equação" usando o valor F como critério. Assim, o aluno em questão não chega sequer a alinhar qualquer ferramenta conceitual para, efetivamente, prover uma resposta à questão.

A resposta do Aluno 6 para esta questão foi anotada por ele assim: "*F não é primo, pois o produto entre 2 números não gera um primo, pois a, b 0 e 1*".

Esta resposta utiliza indiretamente seu conceito sobre números compostos, anunciado na questão 1, ou seja, o número deve ter divisores além dele próprio e do 1. Ainda que a resposta sobre F esteja correta, Aluno 6 parece acreditar que o número zero poderia estar entre os fatores que comporiam um número – ou que um dos fatores poderia ser F e o outro, zero ou 1, ou, ainda, que zero é um número primo.

Nesta mesma questão, o Aluno 7 escreve "*n*ão, porém não sei explicar o motivo".

O Aluno 7 "arrisca" uma resposta, coincidentemente correta, a respeito da primalidade de F, alegando não saber o motivo de tal escolha. Tal dificuldade permite aventar a hipótese de que os conceitos indicados na questão 1 (corretos, apesar de não se referirem diretamente ao TFA) não têm significado para o sujeito, que não consegue utilizá-los como conhecimentos de base para a eles recorrer na resposta ao problema.

A resposta trazida pelo Aluno 8 continha o seguinte arrazoado: "*sim, eu considerei apenas o último número, "7", por ele ser um primo, então considerei 23707 um número primo*".

A resposta deste aluno traz um típico modelo intuitivo, como indicado por Molina e Oktaç (2007), o qual, neste caso, apresenta-se completamente desligado de conceitos coerentes e de formalismo matemático. Este tipo de erro foi considerado no trabalho de Zazkis e Liljedahl (2004), ocorrendo sob a classificação *misapplication of an algorithm*. Além disso, o aluno chama o algarismo 7, componente de F, de "número". Recorre a um critério pessoal, por assim dizer, ao relacionar o fato de o último algarismo do número ser primo como base para afirmar, erroneamente, que o número é primo. Aqui, também, a representação que pretendia ser transparente do número por meio de seus fatores primos não foi utilizada.

Para a segunda questão, o Aluno 9 anota: "*n*ão, porque como F é uma multiplicação de 2 números sendo eles primos ou não, ele se tornará um número composto".

Ao contrário do que poderia sugerir a justificativa do Aluno 9, o mesmo não emprega, pelo menos diretamente, o TFA. O estudante alude ao fato de F ser o produto de dois outros números, mas sua resposta não indica a compreensão de que a decomposição em fatores primos seria única. Por outro lado, poder-se-ia pensar que o estudante parece não ter certeza de que 151 e 157 são números primos, mas entende que o fato de F ser composto independe disto, uma vez que, provavelmente, neste caso, compreenderia que, se os fatores não fossem primos, poderiam, eles mesmos, sofrer decomposições. A justificativa, então, ocorre por conta da possibilidade de fatoração qualquer, e não àquela prevista no TFA. Assim, a resposta está correta, ainda que sua justificativa careça de maior precisão e rigor matemáticos.

O Aluno 10 anota, como resposta à questão em análise, "*n*ão, pois F pode ser dividido por 151 ou 157".

A resposta do Aluno 10 está correta, ainda que não tenha lançado mão do TFA em sua justificativa, pelo menos em caráter direto. Desta forma, ao afirmar que 151 e 157 são divisores de F sem considerar outros fatores, pode-se entrever certa coerência com sua definição anterior. Trata-se, portanto, de uma resposta correta, ainda que despreocupada com os aspectos formais.

Considerações sobre as respostas da questão 2

Apenas quatro dos sujeitos cujas respostas foram analisadas acertaram a questão 2. Dentre estes alunos, apenas o Aluno 10 recorreu, ainda que de forma indireta, ao TFA, por meio da definição de números compostos; o Aluno 9 recorreu à decomposição do número em fatores, não necessariamente primos; o Aluno 7 recorreu à definição de números primos, sem se referir ao TFA; e o Aluno 8 indicou a resposta correta sem qualquer explicação. Também para estes sujeitos, com exceção, talvez, do Aluno 8, a representação pretensamente transparente de F, dada por 151 x 157, concorreu efetivamente para a mobilização do conhecimento necessário. Justamente neste sentido, funciona a afirmação de Zazkis e Liljedahl (2004, p. 167), segundo a qual "um importante papel da representação em Matemática consiste em ser uma ferramenta para pensar e obter insights". Resultados como estes também foram encontrados pelos autores supramencionados em seu estudo. Em contrapartida, também nele, assim como na pesquisa aqui descrita, existiram sujeitos que afirmaram erroneamente que F seria um número primo. Outro fato que chama a atenção nesta resposta é a estreita correlação com o significado que os alunos atribuem aos conceitos que deram sobre números primos e compostos (e a relação entre eles) e a resposta provida pelos mesmos.

No caso da pesquisa que aqui se descreve, do mesmo modo, as causas de erros foram semelhantes aos estudos de referência: o Aluno 1 e o Aluno 4, por exemplo, aplicaram incorretamente testes de divisibilidade, que têm, no caso, caráter algorítmico – tipicamente, segundo Zazkis e Liljedahl (2004), esta categoria de erros pode ser vista como *misapplication of an algorithm*. O Aluno 2 e o Aluno 3 incorreram em erros conceituais, indicando desconhecerem, ou tratarem de forma incorreta, o significado dos conceitos de números primos e compostos. O Aluno 5 é um caso à parte, em relação às análises realizadas: a confusão conceitual deste participante da pesquisa é tal que o mesmo atribui o *status* de equação à representação de F, como se seu valor fosse desconhecido. Neste caso, o estudante sequer empregou a multiplicação de forma simples, para obter o produto de 151 x 157, pois considerava que não poderia fazê-lo. Percebe-se, assim, por meio destes resultados, uma relação muito estreita entre a compreensão das representações como ferramentas para subsidiar o raciocínio e o uso de conceitos necessários à resolução dos problemas – no caso, de números primos, de números compostos e do TFA.

Assim constituídas as análises das duas questões sobre as quais se debruça este artigo, resta indicar algumas conclusões e recomendações, típicas de um estudo qualitativo como este.

Considerações finais

A trajetória realizada nesta pesquisa trouxe inúmeras oportunidades de revisita aos conceitos da Teoria dos Números, por vezes vistos como óbvios, muito simples, fáceis, a tal ponto que a necessidade de estuda-los em profundidade tem sido praticamente ignorada nos programas de formação dos professores de Matemática nos cursos de Licenciatura no Brasil – e, como se viu pelas referências deste estudo, em outros países também.

Assim, os primeiros destaques deste momento final do texto devem ir para duas constatações importantes, percebidas em função das análises efetuadas por meio do instrumento de pesquisa utilizado: os números primos não apresentam, de fato, como já levantado por Zazkis e Liljedahl (2004), quaisquer representações que sejam sempre transparentes; e as dificuldades conceituais levam os aprendizes a substituírem os saberes organizados na forma de conceitos e seus significados por intuições, nem sempre corretas, e/ou por estratégias de alto custo operatório, alternativas que podem ser limitantes em relação à resolução de problemas. Entram no rol de tais procedimentos a insistência em técnicas prescritivas, o uso de algoritmos desnecessários e a checagem das respostas, mesmo as corretas, como se, por exemplo, pudesse existir qualquer outra decomposição em fatores primos que não a única evidenciada no problema em exame.

Entretanto, mesmo sendo opacas, as representações dos números primos podem oportunizar características transparentes, quando os aprendizes se engajam em um processo de construção do conhecimento que considere a valorização dos significados e dos conceitos. Quando isto não ocorre, percebe-se, como no caso do teorema fundamental da aritmética, que há o apelo a soluções extensas e caras, cognitivamente falando. Boa parte dos erros constatados tiveram origem na dificuldade em estender os conceitos de números primos e compostos – e do TFA – desde seus significados, de certa forma enunciados formalmente em questões específicas, para os problemas que solicitavam o uso deste aporte cognitivo.

Esta dificuldade pode ser ilustrada quando se decompõe um número composto. O número 30, por exemplo, pode ser decomposto como 6 x 5, 3 x 10 ou 2 x 15. Como pode se ver, a decomposição não é única. A unicidade dessa decomposição se dará apenas se o número for completamente decomposto em fatores primos. Esta diferença da decomposição entre fatores e fatores primos precisa, também, de um trabalho mais amplo do ponto de vista didático e de outras pesquisas. O conceito de decomposição em fatores primos – e a unicidade deste procedimento – é o conceito chave para que o aluno diferencie números primos de compostos em diversas situações. Se os conceitos de primos e compostos não foram adequadamente construídos, essa ocorrência provavelmente inibirá uma conceituação significativa de decomposição em primos, bem como o reconhecimento de representações que dependam de conhecimentos assim constituídos.

Outro elemento que pode ser levantado se refere à constatação de que os estudantes não estão habituados a pensar e manipular números primos "grandes". Com base nas experiências advindas desta pesquisa e no fato desse assunto ter apenas breves apresentações na escola básica, e seu uso posterior limitar-se a exemplos não muitos complexos, não se vê nenhuma preocupação com primos vistos como grandes (maiores que 100 ou 1000, por exemplo). Os problemas propostos nos livros didáticos deixam a entender que uma pequena quantidade de primos basta para esgotar este tema – e estes números são, geralmente, os primeiros naturais primos. A pesquisa demonstrou ser necessária uma compreensão adequada do conceito de decomposição em fatores primos para avançar no sentido de que se entenda a estrutura dos números inteiros.

Assim, julga-se que seria relevante para os futuros professores a clareza sobre a importância do significado do TFA. Neste trabalho, fez-se uma discussão dos aspectos matemáticos envolvidos neste teorema. Zazkis e Campbell (1996) admitem que a prova do TFA pode ser omitida em cursos para professores de Matemática do ensino básico, mas argumenta que alguma alternativa pedagógica é necessária como compensação. Levanta-se aqui, como possibilidade de continuidade desta investigação, outros estudos que procurem evidenciar se uma abordagem de validações (provas e/ou demonstrações) pode ser eficiente no sentido de trabalhar aspectos conceituais da teoria dos números, uma das questões essenciais vistas ao longo deste texto. De todo o modo, ao contrário do que se poderia pensar, o assunto está longe de ser esgotado, e merece a devida atenção no âmbito da Educação Matemática.

Agradecimentos

Os autores agradecem a colaboração do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 477783/2013-9, e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), processo 13/23228-7.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática 5ª a 8ª série. Brasília, 1998.

COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA-SBM, 2000.

FONSECA, R. V. **O conhecimento sobre números primos**: uma investigação entre estudantes de licenciatura em matemática. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2015.

FRIEDERICH, D. M. J.; KRUGER, J.; NEHRING, C. M. Compreendendo os parâmetros curriculares nacionais como articulador da prática do professor dos anos iniciais em relação à matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃOMATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais…** Ijuí, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_58.pdf>. Acesso em: 4 out. 2017.

LESH, R.; BEHR, M.; POST, T. Rational number relations and proportions. In: JANIVER, C. (Ed.). **Problems of representations in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 41-58

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C.; COELHO, S. P. Como é utilizado o teorema fundamental da aritmética por atores do ensino fundamental. In: CONGRESO IBEROMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2005. **Actas...** Porto: Editora da Associação de Professores de Matemática, 2005. v. l, p. 1-12. 1 CD-ROM.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ, A. Concepciones de la transformación linear en contexto geométrico. **Relime**, Mexico, v. 10, n. 2, p. 241-273, 2007.

OLIVEIRA, G. P. **Avaliação em cursos on-line colaborativos**: uma abordagem multidimensional. 2007. 330 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

______. Numerical representations and technologies: possibilities from a configuration formed by teacher-with-Geogebra. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 5, p. 897-918, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/26324/18903>. Acesso em: 4 out. 2017.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: matemática e suas tecnologias. São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acesso em: 4 out. 2017.

ZAZKIS, R. Language of number theory: metaphor and rigor. In: CAMPBELL, S. R.; ZAZKIS, R. (Ed.). **Learning and teaching number theory**: research in cognition and instruction. Westport: Ablex Publishing, 2002. p. 83-96. (Monograph serie of the Journal of Mathematics Behavior, v. 2).

ZAZKIS, R.; CAMPBELL. S. R. Prime decomposition: understanding uniqueness. **Journal of Mathematical Behavior**, Kidlington, v. 15, n. 2, p. 207-218, 1996.

ZAZKIS, R.; GADOWSKY, K. Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In: CUOCO, A. (Ed.). **NCTM 2001 yearbook**: the roles of representation in school mathematics. Reston: NCTM, 2001. p. 41-52.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Understanding primes: the role of representation. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 35, n. 3, p. 164-186, 2004.

Artigo recebido em 01/08/2016. Aceito em 06/05/2017.

Endereço para contato: PUCSP, Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, CEP 01303-050, São Paulo, SP, Brasil.