Ciência & Educação (Bauru)
ISSN: 1516-7313
revista@fc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

Saito, Fumikazu

Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI

Ciência & Educação (Bauru), vol. 23, núm. 4, octubre-diciembre, 2017, pp. 917-940
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
São Paulo, Brasil

doi: https://doi.org/10.1590/1516-731320170040012

Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI

Number and magnitude: discussing the concept of measurement by means of a sixteenth-century mathematical instrument

Fumikazu Saito[1]

Resumo: Este trabalho apresenta alguns resultados de uma investigação que procurou valorizar condicionantes manipulativos no processo da construção do conhecimento por meio do manuseio de um instrumento matemático do século XVI. A investigação teve por base uma situação-problema elaborada a partir de questões de ordem epistemológica e matemática que emergiram da construção de uma interface entre história e ensino de matemática. O manuseio deste instrumento desencadeou uma série de ações que propiciaram aos professores refletirem e discutirem sobre as noções de grandeza, número e medida. A análise dos resultados sugere que existe uma lacuna de ordem epistemológica entre o observador que mede, o instrumento que medeia, e o ente medido. Lacuna esta que compromete a adequada compreensão do significado próprio de medida e das relações entre número e grandeza no processo de mensuração.

Palavras-chaves: Ensino de matemática. Número. Medida. Grandeza. Instrumentos matemáticos.

Abstract: This paper presents some results of a study that valued manipulative conditions in the process of knowledge construction by handling a sixteenth-century mathematical instrument. The study was based on a problem-situation elaborated by epistemological and mathematical questions, which emerged from an interface built between the history of mathematics and teaching. The handling of this instrument triggered a series of actions that led teachers to reflect and discuss the very notion of magnitude, number and measurement. The results of the study suggest an epistemological gap between the observer who measures, the instrument that mediates the measuring, and the measured object. This gap compromises the proper understanding of measuring and the relationship between number and magnitude in measurement process.

Keywords: Mathematics teaching. Number. Measure. Magnitude. Mathematical instruments.

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), Departamento de Matemática, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: <fsaito@pucsp.br>.

Introdução

Neste trabalho apresentamos alguns resultados recolhidos de uma atividade elaborada a partir da articulação entre história e ensino de matemática proposta por Dias e Saito (2013). Essa atividade, desenvolvida por professores de matemática, em quatro encontros, teve por base uma proposta de articulação entre história e ensino de matemática, que busca promover um diálogo entre historiadores da matemática e educadores matemáticos, com vistas a construir interfaces entre história e ensino.

Por interface, compreendemos, tal como observam Saito e Dias (2013, p. 92), um "[...] conjunto de ações e de produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático com vistas a elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática". Entendida nesses termos, a construção de interfaces tem em vista articular não só aspectos epistemológicos e metodológicos ligados à história da matemática, mas também à educação matemática, procurando aproximar as concepções historiográficas do historiador de outras, didáticas (e também pedagógicas), do educador matemático[2]. Desse modo, a atividade aqui desenvolvida pelos professores teve por objetivo promover uma discussão que os conduzisse a atribuir significados à noção de medida, especialmente no que diz respeito às relações entre grandeza, número e medida. Por meio do diálogo entre historiador da matemática e educador matemático, construído na interface entre história e ensino, e mediada por alguns pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, buscamos refletir sobre algumas questões de ordem teórica que poderiam contribuir para os atuais debates sobre o papel da história no processo de ensino e de aprendizagem de matemática.

Este artigo está organizado em três partes. Na primeira, apresentamos os aportes teóricos e metodológicos que nortearam a elaboração da atividade desenvolvida pelos professores. Na segunda, discorremos sobre o desenvolvimento da atividade e, na terceira e quarta, tecemos algumas considerações com base em alguns resultados.

Aportes teóricos e metodológicos

Há muitas propostas que buscam aproximar a história do ensino aos professores de matemática. Tais propostas, pautadas em diferentes tendências historiográficas da História da Matemática alinhadas a diferentes teorias da didática da matemática, têm sido apreciadas não só no Brasil, mas também em outros centros internacionais[3]. Com vistas a compreender os

---

[2] Sobre as concepções historiográficas aqui consideradas, consulte: Alexander (2002, 2006); Alfonso-Goldfarb e Beltran (2004); Beltran, Saito e Trindade (2014); Conner (2005); Golinski (2005); Goulding (2010); Gray (2011); Mann (2011); Nobre (2004); Saito (2015).

[3] Ver estudos publicados, por exemplo, em Fauvel e Van Maanen (2000); consulte também estudos de Belhoste (1998); Brito (2007, 2016); D'Ambrosio (2013); Dias; Moretti (2011); Faria (2010); Furinghetti (2007); Mendes (2009, 2012, 2013); Mendes; Fossa; Nápoles (2006); Miguel (1997); Miguel; Brito (1996); Miguel; Miorim (2005); Miguel et al. (2009); Miorim; Vilela (2009); Pereira (2015); Sousa (2004); Sousa; Panossian; Cedro (2014).

fenômenos ligados ao ensino e à aprendizagem da matemática, a história da matemática tem exercido significativo papel como provedora de questões epistemológicas referentes não só ao objeto matemático, mas também à natureza do conhecimento matemático.

Embora a história da matemática tenha contribuído de diferentes maneiras para viabilizar estratégias de ensino, a articulação entre história e ensino, entretanto, parece ainda carecer de bases teóricas mais sólidas, visto que, como bem observam Baroni e Nobre (1999), grande parte dos estudos nessa direção resume-se apenas a ensaios e a relatos de aplicações. Assim, com vistas a contribuir com o debate e a discussão sobre as possíveis articulações entre história e ensino, esforçamo-nos em aprofundar o diálogo entre historiadores da matemática e educadores da matemática de modo a alinhavar concepções de natureza epistemológica e historiográfica da história da matemática com outras diferentes propostas da didática matemática por meio da construção de interfaces entre história e ensino[4].

A ideia de construção de interfaces está baseada na proposta de Saito e Dias (2013) e tem por objetivo articular história e ensino de matemática com vistas a refletir sobre os processos de ensino e de aprendizagem de matemática. Desse modo, mais do que uma estratégia voltada para o ensino, a proposta tem em vista refletir sobre as possíveis formas de articulação entre história e ensino que nos conduza a uma metodologia de abordagem em que o histórico é incorporado ao ensino e à aprendizagem de matemática. Segundo essa proposta, devemos tomar alguns cuidados e evitar que essa articulação se reduza apenas a um procedimento que sobrepõe temas e propósitos. Assim, os autores propõem, ao invés de fazer a história guiar o pensamento de tal modo a impor o processo histórico no ensino, extrair da malha histórica a formação das ideias com vistas a compor a lógica do movimento do pensamento. Isso porque, de acordo com Saito e Dias (2013, p. 93), não devemos ensinar matemática por meio da história, nem repetir o percurso histórico na formação de um conceito matemático, mas "[...] buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto de formação deste conceito". Desse modo, como enfatiza Saito (2016b), ao invés de "pinçarmos" no passado um conteúdo matemático específico e reconstruirmos de modo racional o seu percurso para então aplicá-lo, seria muito mais interessante buscarmos na rica trama do tecido histórico "[...] um conjunto de ações, regras, critérios e outros conhecimentos (não necessariamente matemáticos) que possam reorientar a visão do que vem a ser matemática e o conhecimento matemático" (SAITO, 2016b, p. 9).

A esse respeito, Saito (2016a, 2016b) observa que muitas das propostas geralmente têm buscado no passado a história dos conteúdos (ou conceitos) matemáticos para então ensiná-los por meio da história. Diferentemente dessas propostas, Saito (2016b, p. 8) propõe buscar na história, além dos conteúdos matemáticos, os processos de sua elaboração de modo a compreender, por exemplo, o papel que tiveram "[...] a representação, a visualização, a abstração, o raciocínio, a demonstração, os métodos, as definições, etc., na construção do conhecimento, bem como outros aspectos da matemática e de sua prática". Entretanto, ele também observa que não basta apenas a compreensão do contexto nos quais os conceitos matemáticos foram

[4] A esse respeito, bem como outras questões de ordem teórica e epistemológica, consulte os estudos de Saito e Dias (2013); Saito (2010, 2013c, 2016a), que tecem comentários e apontam para novas questões que enriquecem a discussão e o debate sobre os usos da história no ensino de matemática.

elaborados, transmitidos e disseminados. É preciso também considerar o processo de apropriação desses conceitos de tal modo a estabelecer um diálogo de uma matemática do passado com outra do presente, ou seja, construindo-se interfaces por um viés epistemológico[5]. Segundo Saito (2016b, p. 9), procedendo-se dessa maneira, "[...] promovemos o deslocamento de concepções matemáticas bastante familiares e bem sedimentadas para outras muito incomuns", de tal modo a fazer com que "[...] esse deslocamento e a dialética proporcionada pela articulação entre duas diferentes concepções de conhecimento (do passado e do presente), favore[çam] a reconstrução de diversos conteúdos matemáticos e, ao mesmo tempo, revel[em] diferentes elementos potencialmente didáticos".

Assim, seguimos de perto as orientações de Dias e Saito e investimos na construção de uma interface que contemplasse não só o contexto em que os conceitos matemáticos foram desenvolvidos, mas também o movimento do pensamento na formação desses conceitos a partir de um documento histórico (DIAS; SAITO, 2009; SAITO, 2016a). Entretanto, com vista a enriquecer o diálogo entre historiadores e educadores, orientamos e desenvolvemos uma atividade, junto a alguns professores, articulando-a com uma das muitas teorias da didática matemática. Assim, as muitas questões de ordem epistemológica e matemática, que emergiram da interface entre história e ensino[6], conduziram-nos à elaboração de uma situação-problema conforme orienta a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

A TSD foi desenvolvida por Brousseau (1986) com o objetivo de modelar o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Esta teoria não tem o sujeito como objetivo principal, mas a situação didática em que são identificadas as interações que se estabelecem entre o professor, o aluno e o saber que, tomadas em conjunto é designado *millieu*. Segundo Brousseau (2008), é nesse *millieu* que são provocadas as mudanças com vistas a desestabilizar o sistema didático (*stricto sensu*) de modo a fazer emergir conflitos que propiciem a aprendizagem de novos conhecimentos. Nesse sentido, sempre haveria uma situação didática na relação triádica (professor, saber e aluno) quando fosse caracterizada a intenção do professor em possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo de matemática.

Podemos dizer que a TSD busca caracterizar um processo de ensino e de aprendizagem por uma série de situações que conduza à modificação de comportamentos de alunos. Tal modificação, caracterizada pela aquisição de determinados conhecimentos, é decorrente de um conjunto de circunstâncias em que se encontra uma pessoa e de sua relação com o *millieu*. A esse respeito, Almouloud (2007) observa que a relação estabelecida entre professor e aluno, que é de natureza pedagógica e didática, deve levar em consideração o saber matemático, com o qual tanto o professor, quanto o aluno, mantêm relações. E, nessas condições, o saber matemático e o

[5] Essa ideia tem por base estudos atualizados em história da ciência, que observa que "a ciência atual não se confunde com essa mesma ciência no seu passado" (CANGUILHEM, 1977, p. 15), e a distinção proposta por Grattan-Guinness entre "história" e "legado" (heritage). A esse respeito, ver: Beltran; Saito; Trindade (2014); Canguilhem (1977, 2012); Grattan-Guinness (2005). Sobre o que vem a ser interfaces de áreas de conhecimento, consulte: Alfonso-Goldfarb (2003). A respeito da possibilidade de construir interfaces por um viés epistemológico, consulte estudos de: Beltran (2009); Beltran; Saito (2011); Beltran; Saito; Trindade (2014).

[6] A esse respeito consulte estudos de Dias e Saito (2010, 2011, 2014); Saito; Dias (2011).

professor devem manter uma relação mediada por questões epistemológicas ligadas ao ensino e à aprendizagem de matemática. A nossa investigação, dessa maneira, direcionou-se para algumas dessas questões que emergem de uma situação-problema envolvendo a história da matemática.

Nesse particular, vale lembrar que, segundo Brousseau (1986), a situação didática está associada à outra, "não-didática" (ou "adidática"). Esta seria uma situação geralmente encontrada por matemáticos ou por quem mobiliza o saber matemático para resolver problemas. Com a série de ações na interface entre história e ensino aqui proposta, buscamos na história da matemática recursos que nos possibilitassem criar situações de ensino com alto potencial "adidático" com vistas a permitir ao professor o acesso a algumas questões de ordem epistemológica e matemática.

Contudo, diferentemente da proposta original de Brousseau, não buscamos na história da matemática recursos para superar obstáculos epistemológicos, uma vez que temos aqui em vista uma história da matemática baseada em atuais tendências historiográficas[7]. Assim, seguindo a sugestão de Saito (2016a), entendemos que a história da matemática não é um repositório fixo de informações em que o educador matemático pinça convenientemente conteúdos matemáticos, algoritmos ou técnicas de resolução de problemas de modo a aplicá-los em sala de aula. Consideramos, de acordo com Saito (2015), que a história da matemática é um laboratório que coloca diferentes questões de ordem epistemológica e matemática a serem exploradas em diferentes contextos de ensino. Desse modo, as ações propostas na interface entre história e ensino nos conduziram a elaborar uma situação-problema com a intenção de propiciar algumas condições favoráveis para que o professor compreendesse a relação entre números e grandezas (e o significado próprio de medida) por meio do uso de um antigo instrumento denominado "báculo" (*baculum*).

O báculo

Trata-se de um instrumento matemático bastante simples e muito disseminado no século XVI[8]. Alguns tratados sobre sua construção e seu uso circularam naquela época, principalmente entre agrimensores e arquitetos, que o utilizaram de diferentes maneiras[9]. Para a atividade aqui desenvolvida, selecionamos a descrição de sua construção e de seu uso dada por Cosimo Bartoli (1503-1572) num tratado intitulado *Del modo di misurare*, publicado em 1564.

---

[7] Cabe observar que na época em que Brousseau formulou suas teses e propôs o estudo das situações didáticas, a ideia de obstáculo epistemológico, proposta originalmente por Gaston Bachelard (1996), estava bem viva entre educadores de diferentes áreas científicas. Essa ideia associada a outras vertentes teóricas (didáticas e epistemológicas) fundamentaram diversas pesquisas e propostas de ensino de ciências no geral. Frente a essas propostas, surgiram críticas severas, inclusive no que diz respeito ao ensino de matemática. A esse respeito, consulte: Beltran (2009); Beltran; Saito (2011); Miguel; Miorim (2005); Saito (2013b).

[8] Sobre os instrumentos matemáticos, consulte: Bennett (1991, 1998, 2003); Gessner (2010, 2013); Richenson (1966). Sobre estudos do uso de instrumentos matemáticos na articulação entre história e ensino de matemático, ver: Saito (2011, 2013a, 2014); Willmoth (2009).

[9] Naquela época existiram diferentes versões e outros aprimoramentos deste instrumento, vide, por exemplo, Digges (1556); Orsini (1586); Ramus (1636).

O báculo faz parte de um rol de instrumentos matemáticos que foi bastante utilizado e disseminado entre artesãos, notoriamente agrimensores e arquitetos, no século XVI. Estudos históricos a seu respeito têm trazido indícios de que este instrumento passou por diversas modificações ao longo dos séculos XVI e XVII, recebendo novos atributos, que permitiram utilizá-lo na navegação e na astronomia[10]. Não vamos aqui discorrer sobre a história deste instrumento, uma vez que já existem estudos a esse respeito que podem ser consultados facilmente. Além disso, este trabalho não tem por objetivo apresentar a parte histórica, mas apresentar uma proposta de articulação que surgiu do estudo histórico deste instrumento, a partir do qual emergiram questões de ordem epistemológica e matemática, que acabaram também por se revelar no desenvolvimento da atividade[11].

O estudo deste instrumento, na interface entre história da matemática e ensino, revelou que os processos implicados na sua construção e no seu uso poderiam ser explorados de diferentes modos[12]. Optamos por desenvolver uma atividade que, de um lado, explorasse os condicionantes manipulativos que conduzissem à elaboração da noção de medida e, de outro, mobilizassem conhecimentos geométricos que permitissem obter uma medida.

Do ponto de vista histórico, este instrumento foi muito utilizado numa época em que os padrões de medida ainda não haviam sido estabelecidos, o que enriquece a discussão sobre a relação entre grandeza e número, uma vez que inexistia uma unidade de medida padrão. Do ponto de vista didático, o manuseio do instrumento, articulada à proposta da TSD, desencadeia uma situação com alto potencial "adidático", favorecendo a formulação de hipóteses, que estão ancoradas em pressupostos epistemológicos e matemáticos (não reconhecíveis imediatamente pelo docente), para resolver a situação-problema aqui delineada (ver análise *a posteriori*). Esse movimento propicia a discussão e a reflexão sobre a relações geométricas implicadas no processo de mensuração, conjugando procedimentos mecânicos e racionais. Em outros termos, ao manusear o báculo, o observador que procura obter a medida por meio dele deve mobilizar conhecimentos matemáticos bem elementares, tendo em vista uma situação concreta de medida. Assim, duas razões nos motivaram a escolhê-lo entre outros tantos instrumentos apresentados em *Del modo di misurare*.

A primeira razão está relacionada ao conhecimento matemático. O báculo incorpora interessantes questões de ordem matemática, principalmente por mobilizar propriedades encontradas em triângulos isósceles. Diferentemente de muitos instrumentos de medida, que comumente têm por base relações geométricas e trigonométricas em triângulos retângulos[13], o báculo possibilita explorar outras propriedades geométricas promovendo, assim, outras discussões matemáticas. A segunda, estreitamente relacionada à primeira, diz respeito ao uso do

[10] Cf. Basile (2004); Beo (2015); Bryce (1980); Castillo (2016); Castillo; Saito (2016); Harkness (2007); Roche (1981); Saito (2014); Saito; Dias (2011); Simonson (2016).

[11] Cf., por exemplo, Dias; Saito (2010, 2014); Saito; Dias (2011).

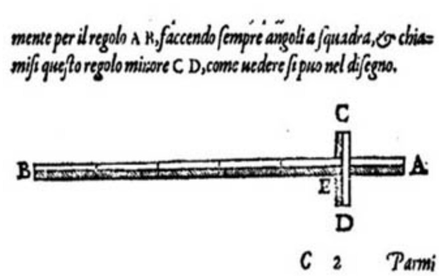
[12] Referimos aqui às potencialidades didáticas dos instrumentos matemáticos antigos. A esse respeito consulte estudos de Dias e Saito (2010, 2014); Saito (2016a, 2016b).

[13] Ver, por exemplo, o quadrante num quarto de círculo, ou um quadrante geométrico em Bartoli (1564) e Fineo (1556).

instrumento. Além do conhecimento matemático nele incorporado (tanto na sua feitura, quanto no seu uso), o báculo conduz a interessantes questões de ordem epistemológica, que apontam para diversos condicionantes manipulativos implicados no procedimento de mensuração.

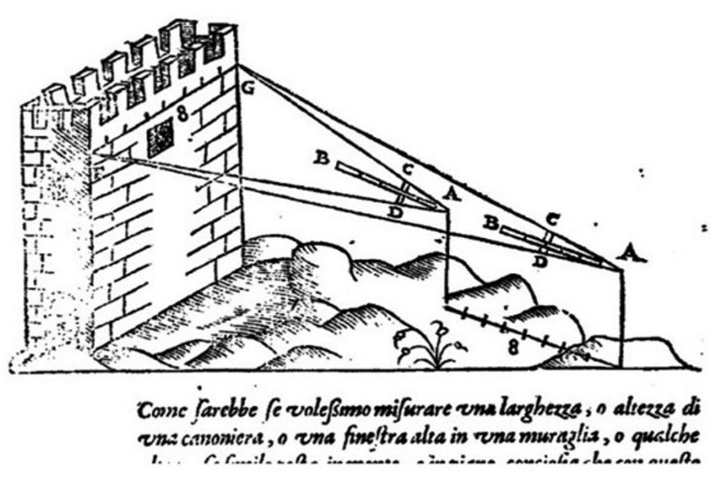
Comparado a outros instrumentos de medida, o báculo é bem simples em sua configuração geral, porém muito rico do ponto de vista do conhecimento. Ele é composto basicamente de duas hastes, uma maior (AB), denominada, por Bartoli (1564), "bastão", e outra menor (CD), "transversal". O bastão e a transversal são dispostos perpendicularmente em forma de "cruz" (Figura 1). A transversal (CD), tomada como unidade de medida, servia de guia para a marcação no bastão (AB), e era nela encaixada, podendo ser deslizada para frente e para trás convenientemente.

Figura 1. O báculo e suas partes



Fonte: Bartoli (1564, p. 10r).

Figura 2. O uso do báculo para se obter a medida da largura de um muro



Fonte: Bartoli (1564, p. 11v).

Na interface entre história e ensino, consideramos que o báculo não é meramente um artefato que é (ou foi) utilizado para realizar uma medida, mas um suporte que veicula conhecimento. De acordo com Saito (2016b) o báculo "incorpora" diversos conhecimentos de diferentes segmentos do saber de modo que, ao abordá-lo, devemos buscar não só pelas relações matemáticas implicadas nas partes de sua composição e no seu uso, mas também compreender por que razão cada uma dessas partes lá estão e é mobilizada ao utilizá-lo. A atividade, dessa maneira, procurou valorizar a ação de medir e, por meio dela, compreender o processo que conduz à relação entre medida, número e grandeza.

Desenvolvimento da atividade

A elaboração da situação-problema teve por base outros estudos envolvendo antigos instrumentos matemáticos (DIAS; SAITO, 2010, 2011, 2014; SAITO; DIAS, 2011). Esses estudos mostram que, embora os professores saibam definir o que seja uma grandeza, não parecem compreender seu real significado e sua relação com o número e a medida. Desse modo, elaboramos uma situação-problema a partir de algumas questões de ordem epistemológica e matemática sugeridas por esses estudos. Para tanto, preparamos um material para leitura, que, além de fornecer as instruções para a realização da atividade, trazia uma breve apresentação do tratado de Bartoli e a tradução do excerto correspondente à construção e ao uso do báculo. O excerto escolhido passou ainda por um tratamento didático, seguindo as orientações de Saito e Dias (2013). Juntamente com o material de leitura, disponibilizamos 10 báculos de diferentes dimensões (Quadro 1).

A nossa investigação envolveu doze participantes, dos quais onze lecionavam a disciplina Matemática e apenas um estava finalizando o curso de licenciatura Matemática. Elaboramos uma atividade que foi desenvolvida em quatro encontros (ou oficinas), aos sábados, de aproximadamente três horas. A atividade foi filmada e os participantes entregaram, ao final de cada tarefa um relatório, descrevendo suas impressões e procedimentos. Apresentamos aqui alguns resultados dessa atividade, que consistiu em obter a medida da largura da lousa e da porta de uma sala de aula por meio do báculo. Para tanto, elaboramos uma sequência de tarefas que consistiu basicamente no seguinte:

1. Escolher um dos dez báculos;
2. Ler as instruções fornecidas por Bartoli;
3. Utilizar o báculo para obter a medida da largura da lousa e da porta;
4. Expressar as duas medidas por meio do comprimento do barbante;
5. Expressar o valor das duas medidas numericamente;
6. Justificar matematicamente as medidas obtidas.

Quadro 1. Os dez báculos disponibilizados aos professores[14]

Quantidade de peças	Comprimento do bastão (AB)	Comprimento da transversal (CD)	Número de divisões no bastão
2	120 cm	15 cm	8
2	100 cm	25 cm	4
2	100 cm	20 cm	5
2	60 cm	12 cm	5
2	60 cm	10 cm	6

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a execução dessa sequência de tarefas, organizamos os participantes em duplas. Cada dupla escolheu um instrumento e recebeu o material contendo instruções. Este material apresentava uma breve introdução e trazia anexa uma parte do tratado que descrevia e explicava o funcionamento do báculo. Assim, a primeira parte da atividade consistiu em compreender o instrumento, suas partes e seu funcionamento. O objetivo dessa etapa tinha em vista fazer as duplas refletirem sobre os conhecimentos geométricos incorporados no instrumento e nos procedimentos de medida.

Uma vez compreendido como o instrumento deveria ser utilizado e como a medida era obtida por meio dele, propusemos que as duplas medissem a largura da lousa e da porta da sala de aula. Essas medidas, entretanto, deveriam ser expressas pelo comprimento do barbante, visto que a distância FG corresponde ao deslocamento HI (ver Figuras 2 e 3). Para conferir se a medida foi obtida a contento, providenciamos um "gabarito" para as duas medidas. Assim, cortamos dois pedaços de barbante, correspondentes ao comprimento da largura da lousa e da porta, com os quais as medidas obtidas pelas duplas foram conferidas. Enfim, solicitamos às duplas que expressassem o comprimento destes barbantes numericamente. Além disso, cada dupla apresentou um relatório em que registrou o procedimento para realizar as medidas, apontando para as dificuldades encontradas, bem como explicitando os conhecimentos matemáticos mobilizados e suas possíveis justificativas.

Análise a priori

Investigações anteriores, conduzidas por Dias e Saito (2010, 2011, 2014), sugerem que muitos professores possuem noções fragmentadas a respeito do significado de medida. Para confirmarmos isso, aplicamos no primeiro encontro um questionário com vistas a mapear a compreensão de cada participante sobre as noções de medida e de grandeza[15]. As respostas a esse questionário foram bem diversificadas e confirmaram os resultados obtidos em outros estudos conduzidos por Saito e Dias.

[14] Convém observar que as escalas (as marcas) dos instrumentos não foram neles identificadas de modo que os professores não tinham ideia do real comprimento de cada instrumento em centímetros. A única informação a que tiveram acesso era o número de divisões de cada instrumento.

[15] Este primeiro questionário consistiu de quatro perguntas: (1) O que é medida?; (2) A medida é dada ou é obtida?; (3) O que é necessário para medir ou obter a medida da largura ou da altura de um objeto qualquer?; (4) O que é grandeza? Dê pelo menos três exemplos.

Notamos que a maioria dos participantes confundiram medida com a noção própria de grandeza, isto é, com o ente que pode ser medido, fornecendo uma definição circular de medida. Dentre aqueles que associaram a medida com a unidade de medida, alguns a confundiram com a unidade de medida e, outros, com o próprio instrumento que "fornece" a medida.

Todos responderam que, para medir, é preciso lançar mão de um "instrumento" que foi entendido de diferentes modos. Alguns participantes identificaram-no a aparelhos ou instrumentos ordinários, tais como régua, fita métrica, trena, teodolito, barbante, linha etc., e outros a um "objeto" que é entendido como "padrão de medida" ou como "objeto de comparação" que serviria de unidade, tais como uma caneta, um pedaço de madeira etc. No que diz respeito à relação entre medida e instrumento, pareceu ser unânime a ideia de que é necessário um instrumento com escala. Nesse particular, alguns participantes pareceram compreender que o instrumento e a escala (e, portanto, a unidade de medida) compõem um único corpo. Outros, entretanto, pareceram entendê-los distintamente, visto que as respostas reforçaram a ideia de que para medir eram necessários um instrumento e uma escala (e, portanto, um padrão de medida). Assim, considerando todas essas respostas em seu conjunto, podemos dizer que, em todas elas, aparece implícita a ideia de quantificação. Entretanto, é curioso que em nenhuma delas encontramos a noção de número associada à de medida ou à de grandeza. Desse modo, esperávamos que a atividade conduzisse à ideia de que medir é um processo que reduz as grandezas a números por meio de um instrumento.

Embora para muitos de nós isso pareça óbvio, uma vez que estamos acostumados a utilizar diferentes instrumentos, os procedimentos não são tão simples quanto imaginamos. Saito (2014) observa que o processo que está por trás da operação de medida é extremamente complexo e, para compreendê-la, é necessário recorrermos a certos procedimentos não só de ordem técnica, mas também matemática. A noção de medida adquire amplo significado se compreendermos por que razão matemática certas partes do instrumento estão ali e são mobilizadas na operação. Além disso, Saito (2014) observa que a compreensão do conhecimento geométrico incorporado no instrumento só é adquirida por meio da manipulação do instrumento e não nele mesmo. Isso porque as partes do báculo e sua configuração só se tornam compreensíveis matematicamente a partir do entendimento de uma série de conhecimentos geométricos que devem ser mobilizados para se obter uma medida.

Contudo, Saito (2013a) observa que tais conhecimentos não se revelam à primeira vista. Embora o procedimento para se realizar a medida em tese não seja difícil de ser entendido, sua execução não é tão simples, pois requer não só certa destreza e treino para manusear o instrumento, mas também conhecimentos de geometria. A medida pode ser obtida satisfatoriamente por meio do manuseio do báculo seguindo as instruções fornecidas por Bartoli, porém os conhecimentos geométricos que permitem obtê-la, por mais que sejam elementares, não são perceptíveis facilmente por quem mede. Desse modo, as propriedades geométricas encontradas em triângulos isósceles, o teorema de Tales e outras relativas à semelhança de triângulos, por exemplo, não são identificados no processo à primeira vista. Mesmo fornecendo figuras, ilustrações e esquemas aos participantes, as relações geométricas implicadas no processo não parecem emergir de imediato, comprometendo a compreensão das relações entre número, medida e grandeza.

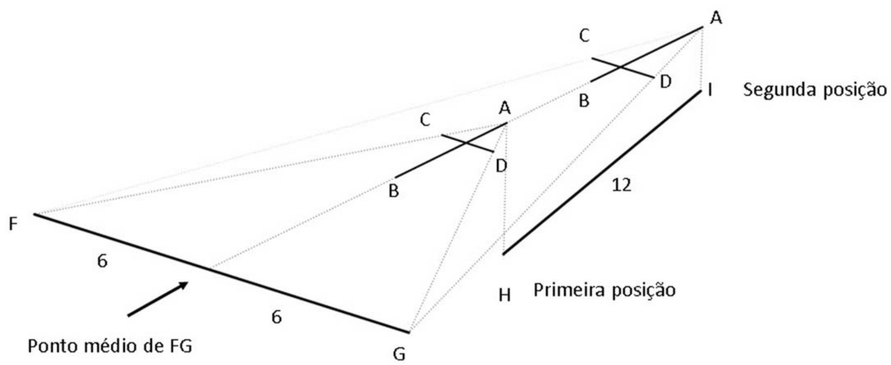
Análise a posteriori

Após terem lido o material que disponibilizamos sobre a construção e o uso do báculo, as duplas organizaram-se para realizar a medição da largura da lousa e da porta. O material instruía para realizar a medida procedendo da seguinte maneira:

> [...] Pode-se chamar esta haste maior, AB, de bastão e a haste menor, CD, de transversal. Se nós queremos medir uma linha colocada sobre um plano transversalmente, e da qual não podemos nos aproximar, procederemos deste modo com este instrumento: seja FG a linha estendida transversalmente sobre o plano. Nós moveremos a transversal CD e a fixaremos numa das divisões do bastão AB arbitrariamente, como, por exemplo, na segunda divisão, considerando-se que a movemos de A em direção a B. Colocamos, em seguida, o olho em A e abaixamos o bastão em direção à linha reta FG que se quer medir, aplicando a extremidade da transversal à extremidade desta linha que se deseja medir, isto é, o lado direito D à direita da linha (ponto G) e o lado esquerdo C à esquerda da linha (ponto F). Depois, nos aproximamos ou nos afastamos da linha a ser medida de tal modo que a mirada do olho, colocado no ponto A, passando pela extremidade CD da transversal, forme com a transversal e as extremidades da linha a ser medida dois raios de visão: ACF e ADG. Feito isto, marque o lugar onde está fazendo a operação com a letra H. Depois, afastando-se deste local, mova a transversal para outra divisão do bastão em direção a B, isto é, até a terceira divisão a partir de A de modo que, estando fixa a transversal CD na terceira divisão, colocando o olho novamente em A, veja-se novamente por CD os extremos FG da linha, tal como na primeira operação e, feito isto, marque o ponto onde tu estás com a letra I. Meça depois a distância (*spacio*) que está abaixo, HI, que terá a mesma medida de FG [...]" (BARTOLI, 1564, p. 5r, tradução nossa).

Com base nessas instruções, orientamos os participantes a realizarem a atividade seguindo as seguintes etapas: (1) fixar a transversal CD na segunda marcação do bastão AB; (2) posicionar-se convenientemente de modo a abarcar, com o olho no ponto A do bastão, a largura da lousa e da porta (FG) por meio das extremidades CD, de forma a conseguir o alinhamento ACF e ADG; (3) marcar esta primeira posição (H); (4) fixar a transversal CD na terceira marcação do bastão AB; (5) deslocar-se de tal modo a abarcar novamente, com o olho no ponto A do bastão, a largura da lousa e da porta (FG) novamente; (6) marcar esta segunda posição (I); (7) estender o barbante e obter o comprimento HI; (8) expressar numericamente o valor da medida HI; e (9) justificar matematicamente por que razão a medida HI corresponde à da FG (Figura 3).

Figura 3. Esquema correspondente à Figura 2



Fonte: elaborada pelo autor.

Durante a execução da atividade, observamos diversas ações, muitas delas bastante interessantes, tal como prevíamos. Primeiramente, notamos que as duplas não compreenderam as partes do báculo e suas funções. Os participantes não entenderam de imediato por que razão o báculo tinha a forma de "cruz", nem por que razão a transversal (CD) era utilizada como guia para dividir o bastão (AB). Embora todos tivessem entendido que a transversal era a unidade de medida, uma vez que o seu comprimento correspondia a cada divisão do bastão, fazendo dele uma espécie de "régua" graduada, não compreenderam por que razão ela era disposta perpendicularmente a ele. Assim, os participantes o manusearam como se fosse uma régua simples, comparando e sobrepondo a haste maior (bastão AB) não só à largura, mas também à altura da lousa e da porta.

Embora tenham lido as instruções fornecidas pela apostila, algumas duplas não souberam, de pronto, como posicionar as duas hastes (AB e CD), nem como apontar o bastão AB para a largura da porta e da lousa. Isso, provavelmente, decorreu do fato de as duplas não terem considerado, num primeiro momento, as relações geométricas envolvidas no processo de medição. Acostumados aos modernos instrumentos de medida, que comumente "dão" ou "apresentam" a medida de imediato, num visor ou numa escala, os participantes passaram a manipular o báculo como se ele fosse um instrumento ordinário, que fornece a medida, e não como um recurso que permite medir. Assim, algumas duplas posicionaram o bastão (AB) paralelamente à largura da lousa e da porta, outros à altura da porta, e não compreenderam, de início, o papel da transversal (CD) no processo de medição. Além disso, alguns participantes tiveram dificuldade em fixar o "olho". No início da atividade, algumas duplas não souberam por onde e como "olhar" de tal modo que a vista abarcasse a largura da porta e da lousa por meio do instrumento. Embora muitos participantes tivessem compreendido que o "olho" colocado na extremidade do bastão (AB) era o vértice do triângulo AFG (Figura 3), muitos deles não conseguiram numa primeira tentativa se posicionar com o instrumento. Contudo, aos poucos, num procedimento em que alternaram a leitura do texto e o manuseio do báculo, as duplas compreenderam os procedimentos. E aqui é curioso que nem todas as duplas refletiram ou sequer mobilizaram seus conhecimentos matemáticos para tanto.

A maioria dos participantes preocupou-se apenas em apontar o báculo para a largura da lousa e da porta sem, entretanto, reconhecer nesse procedimento as relações geométricas solicitadas para se realizar a medida. Uma das duplas, que portava um dos maiores instrumentos, conseguiu posicionar o instrumento na primeira posição (H) satisfatoriamente. Porém, a dupla não teve espaço suficiente para se afastar e alinhar as extremidades da transversal (CD) com a largura da lousa de modo a abarcá-la na segunda posição (I) (Figura 3), visto que a sala de aula não oferecia espaço suficiente para tanto. Essa dupla registrou no seu relato que:

> [...] *com o auxílio do desenho demonstrado na página 6, foi possível interpretar o seu uso, onde posicionando a parte móvel (transversal) em uma divisão do bastão em direção* à medida que se deseja medir*, ao se alcançar a visão total do objeto observado e afastando-se a transversal para uma outra divisão à frente, marcando no chão a posição da primeira observação, a distância avançada é congruente à medida do objeto observado. Usando esse conhecimento,* **foi possível medir a largura da porta. No entanto, não foi possível medir o quadro de giz, pois o espaço sala de aula não permitiu efetuar as observações**" (grifos nossos).

Notemos que, neste relato, que: (1) a dupla (como as outras) não distingue grandeza de medida, uma vez que se refere à "*medida que se deseja medir*" para se referir à largura da porta e da lousa; e (2) observa que o espaço disponível da sala não permite utilizar o instrumento para realizar os procedimentos descritos. Para resolver esse problema, outras duas duplas procuraram se posicionar, diagonalmente, em vários lugares da sala, sem perceber que, dessa maneira, as propriedades geométricas que deveriam ser garantidas para se obter a medida não seriam atendidas. Uma delas relatou desse modo que: "[...] *foi verificado que na linha reta não foi possível medir a lousa, somente através da diagonal*". A outra, para contornar o problema da falta de espaço, curiosamente, procurou medir a metade da largura da lousa, relatando: "*Em relação* à *lousa movemos além destes conhecimentos* [isto é, razão e proporção] *a multiplicação/divisão, pois nossa haste era muito pequena para medir a lousa no espaço que tínhamos, então dividimos a lousa ao meio e depois multiplicamos por 2*". Porém, o resultado obtido por essas duplas, expresso pelo comprimento do barbante (que foi comparado com o comprimento do gabarito), veio logo a confirmar que a medida não tinha sido obtida. Nesse momento, intervimos e observamos que as partes do báculo e o seu uso no procedimento de medida deveriam ser considerados matematicamente.

A partir de então, as duplas passaram a considerar as relações geométricas que estavam implícitas no procedimento de medida com o báculo e perceberam que a haste maior (bastão AB) deveria sempre estar posicionado perpendicularmente ao ponto médio da largura da lousa e da porta (Figura 3). Assim, algumas duplas retomaram o texto e passaram a desenhar triângulos, promovendo uma rica discussão sobre as propriedades geométricas encontradas nos triângulos isósceles.

Nesse momento, as relações entre a base, a altura, a mediana, a bissetriz do ângulo no triângulo AFG, entre outras, passaram a ser consideradas no processo de medição. Entretanto, a compreensão das propriedades geométricas envolvidas no processo foi ainda parcial, visto que a maioria das duplas ainda não tinha considerado o conhecimento geométrico incorporado no instrumento. Ou seja, não havia ainda percebido que as partes do báculo estavam lá por alguma razão e que, para compreender as relações geométricas implicadas no processo de medição, era necessário ter clara compreensão do conhecimento incorporado no instrumento.

Depois de compreenderem que o bastão (AB) deveria ser posicionado perpendicularmente ao ponto médio da largura da lousa e da porta, as duplas conseguiram expressar a medida por meio do comprimento do barbante. Entretanto, algumas duplas questionaram o uso do barbante para expressar a medida, uma vez que o texto nada mencionava a seu respeito. Para elas, o barbante era totalmente acessório. Contudo, quando questionamos de que maneira cada dupla expressaria a medida obtida numericamente, os participantes logo perceberam que o barbante deveria expressar a medida do deslocamento HI e compreenderam que o seu comprimento deveria ser comparado à unidade de medida dada pelo instrumento para então ser expresso numericamente.

A essa altura da atividade, notamos que todos demonstraram maior compreensão no que diz respeito às noções de grandeza, número e medida. As respostas dadas a um segundo questionário, que foi aplicado com o objetivo de avaliar e sintetizar os resultados, mostraram que os participantes passaram a distinguir grandeza de número, e a compreender o significado de unidade de medida, sem confundi-la com a própria medida ou a grandeza[16]. Todavia, a compreensão disso tudo ainda foi parcial, visto que as duplas não conseguiram explicar por que razão o deslocamento (HI) correspondia à largura (FG) da lousa e da porta (Figura 3). Desse modo, solicitamos às duplas que justificassem geometricamente todo o procedimento de medição.

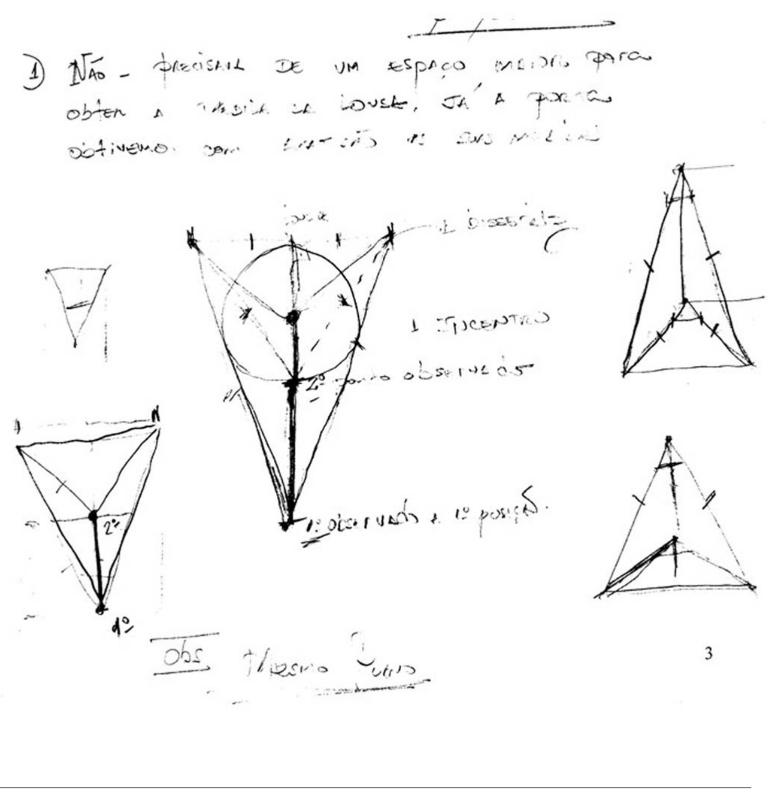
Nessa etapa, os participantes já estavam a par dos conhecimentos geométricos que se encontravam incorporados no instrumento e eram mobilizados no processo. Entretanto, pareceram ainda confusos no que diz respeito ao papel mediador do instrumento, uma vez que não pareciam compreender a relação entre o instrumento e a medida. Isso se tornou bem evidente nas discussões e nas diferentes tentativas feitas pelas duplas que buscaram mobilizar conhecimentos geométricos bem sedimentados. Todas as duplas perceberam que deveriam mobilizar a propriedade de semelhança de triângulos. Entretanto, a maioria teve grande dificuldade na escolha dos triângulos. Uma das duplas conjecturou ainda que o ponto H, provavelmente, era o incentro do triângulo maior AFG (Figura 3) e que, para estabelecer a relação entre HI e FG, bastava encontrar as relações de semelhança nos triângulos formados a partir dele. Essa conjectura foi ainda aceita por outras duplas que se esforçaram em buscar uma relação entre os triângulos formados com o suposto incentro H, considerando-se os lados desses triângulos (Figura 4).

Entretanto, aos poucos, na medida em que fomos intercedendo, os participantes notaram que era preciso pensar no que garantia a semelhança entre os triângulos. Logo, alguns professores se referiram ao teorema de Tales e à definição comumente encontrada nos livros didáticos, porém continuaram tendo dificuldades em utilizá-lo até perceberem que as partes do báculo deveriam ser consideradas e aplicadas. Algumas duplas notaram que a relação que buscavam deveria ter em consideração a base e a altura dos triângulos e não os seus lados. Isso, provavelmente, está relacionado à forma como o teorema de Tales é ilustrado nos livros didáticos, aspecto este que conduziu os professores a considerarem apenas os lados dos dois

[16] Este questionário foi aplicado ao final de toda atividade e consistiu em três perguntas: (1) Qual foi a grandeza medida?; (2) O que o comprimento do barbante expressa?; (3) Número e medida são sinônimos?.

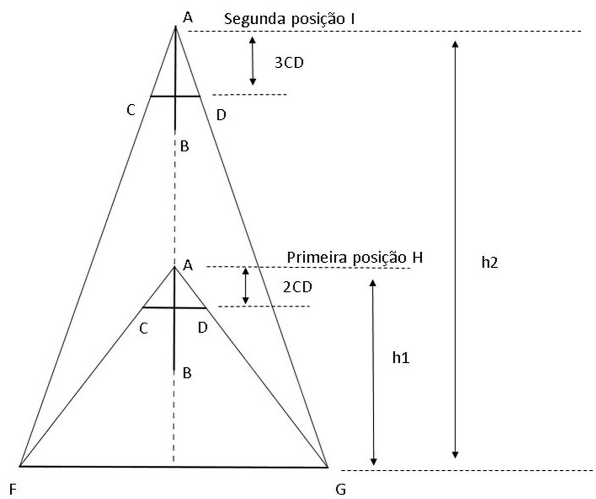
triângulos AFG, deixando à margem a sua altura. Assim, chamamos a atenção dos participantes para a proporcionalidade que se verifica em qualquer reta que interceptasse um feixe de retas paralelas de modo a fazê-los associar o deslocamento da posição H à outra I (portanto, do deslizamento da transversal CD do báculo de uma posição à outra no bastão AB) com o teorema. Entretanto, mesmo tendo compreendido a ideia e as relações geométricas ali presentes, as duplas não conseguiram justificar por que razão a distância FG correspondia ao afastamento HI do observador. Dessa maneira, intervimos uma última vez solicitando-lhes que encontrassem a relação entre as alturas dos dois triângulos AFG (que se formaram entre a primeira e a segunda medida) e o deslocamento do observador. Prontamente, dois professores logo conseguiram chegar à justificativa e um deles a reproduziu na lousa.

Figura 4. Estudo da validação de uma das duplas



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 5. Validação do procedimento



Fonte: elaborada pelo autor.

Consideremos, inicialmente, os triângulos AFG e ACD na primeira posição (H) (Figura 5). Daqui tiramos a seguinte relação:

$$\frac{2CD}{CD} = \frac{h1}{FG}$$

onde h1 corresponde à medida da altura do triângulo AFG na primeira posição H. Desse modo, temos que:

$$h1 = 2FG$$

Tomemos agora os triângulos AFG e ACD na segunda posição (I). Daqui tiramos a seguinte relação:

$$\frac{3CD}{CD} = \frac{h2}{FG}$$

onde h2 corresponde à medida da altura do triângulo AFG na segunda posição I. Desse modo, temos que:

$$h2 = 3FG$$

O deslocamento HI corresponde à diferença entre as medidas h1 e h2, ou seja,

$$HI = h2 - h1,$$
$$HI = 3FG - 2FG,$$
$$\text{e, portanto, } HI = FG$$

A partir da validação matemática do procedimento de medida por meio do instrumento, retomamos o significado de medida. As duplas logo compreenderam que o barbante correspondia à medida da grandeza e que, para expressá-la em números, era necessário estabelecer uma relação entre a unidade de medida dada pelo instrumento (CD) e a largura da lousa e da porta (FG), mobilizando, assim, a noção própria de medida (Figura 5).

Alguns resultados interessantes

Embora todos tivessem compreendido que a transversal CD correspondia à unidade medida, não estabeleceram imediatamente a relação entre ela e a largura FG. Nas diferentes tentativas de validar matematicamente o procedimento, nenhuma dupla mobilizou a definição de medida. Todas as duplas preocuparam-se em estabelecer relações entre os lados dos triângulos, sem considerar nesse processo, suas respectivas alturas e bases (Figura 5). Foi somente após uma intervenção, em que observamos que a relação procurada deveria contemplar a base (FG) e altura (HI) dos triângulos, que as duplas passaram, gradativamente, a compreender o papel da transversal CD. Entretanto, num primeiro momento, do mesmo modo que anteriormente, as duplas se engajaram apenas em estabelecer as relações entre a altura e a base sem perceber que a relação entre CD e FG expressava a noção de medida, tal como alguns participantes haviam respondido ao primeiro questionário. Quando foi solicitado a eles que fosse observada a unidade de medida de cada instrumento, todos compreenderam que, para expressar a medida FG em números, era preciso contar o número inteiro de vezes que a unidade (CD) cabia na largura FG (Figura 5).

Notamos que parte desta dificuldade estava relacionada à ideia, bastante disseminada e muito compartilhada entre eles, de que a medida é dada *no* instrumento e não *por meio* do instrumento. Muitas ações que observamos durante a atividade acenaram nessa direção. Algumas duplas, depois de várias tentativas, dirigiram-se à lousa com o báculo, posicionando-o como uma régua para conferir a medida do comprimento. Outras, depois de explicarmos que o barbante seria utilizado para "mostrar" a medida da largura lousa e da porta, tomaram imediatamente um pedaço de barbante e o estenderam ao longo do bastão AB do instrumento, procurando ali encontrar uma relação entre o comprimento das duas hastes do báculo e do barbante de modo a compreender a relação entre instrumento e medida. Foi somente ao final da atividade quando procuraram expressar a medida da largura da porta e da lousa por meio do comprimento de barbante que as duplas começaram a especular sobre o papel do instrumento no processo de medição. Começaram a observar que a distância HI, fornecida pelo comprimento do barbante, deveria ser, vamos assim dizer, "medida novamente" para então, poder ser expressa numericamente com base na unidade de medida dada pelo instrumento.

A discussão que se seguiu, entretanto, levantou novas questões de ordem matemática. Uma delas esteve relacionada à "precisão" do instrumento, uma vez que apenas uma dupla obteve êxito. O comprimento do barbante obtido por outras duplas era maior ou menor do que aquele fornecido pelo "gabarito". E por mais que as duplas repetissem o processo para chegar à "medida exata", a medida expressada pelo comprimento de barbante nunca correspondia exatamente aquele do comprimento do "gabarito". A esse respeito, alguns questionaram o próprio material. Mas, deixando de lado as considerações de ordem empírica, ligada ao material do que o báculo fora feito, da falta de precisão ou de cuidados ao traçar as escalas no instrumento etc., todos compreenderam que a diferença entre os comprimentos obtidos por cada dupla e o "gabarito" deveriam ser mínima. Apenas a dupla que obteve êxito compreendeu que as relações geométricas propiciadas pelo instrumento só poderiam ser mantidas se o procedimento garantisse que os dois triângulos AFG formados em duas posições (H e I) fossem coplanares (Figura 3). De fato, esta dupla, procurou manter-se no mesmo plano de observação ao se deslocar de uma posição H para outra I, obtendo, assim, uma medida muito próxima da do "gabarito".

Considerações finais

Dentre outras coisas, a atividade, de certa maneira, ajudou a desconstruir concepções prévias e bem arraigadas de medida compartilhadas pelos professores participantes. Embora todos eles definissem "grandeza" corretamente, possuíam noções bem fragmentadas de medida. Nesse sentido, a atividade, por meio da manipulação do báculo, criou conflitos entre os participantes, uma vez que as noções prévias de medida e de grandeza por eles compartilhadas, ao serem mobilizadas, não resolviam, à primeira vista, a situação-problema. Esses conflitos, que foram bastante notórios na situação "adidática" propiciada pela atividade, apontam para algumas fragilidades no que diz respeito aos conhecimentos matemáticos compartilhados pelos docentes. Embora os conhecimentos geométricos implicados no processo de medição fossem bem elementares, os participantes não conseguiram mobilizá-los adequadamente à primeira vista. A dificuldade em escolher adequadamente os triângulos, bem como a conjectura de partir do incentro, para poder estabelecer as relações de semelhança, por exemplo, aponta para outras questões de ordem geométrica que ainda devem ser exploradas e compreendidas.

A atividade mostrou que, na medida em que as questões de ordem física e geométrica foram emergindo, os participantes foram se apercebendo que seu conhecimento sobre medidas e grandezas era bastante restrito e fragmentado. Contudo, à medida que começaram a mobilizar conhecimentos matemáticos mais adequados para solucionar as dificuldades encontradas, gradativamente, foram dando significado à noção própria de medida e, aos poucos, às relações entre número, medida e grandeza. Nesse processo, os participantes foram reelaborando suas ideias e concluíram que medição é um procedimento geométrico e que, para realizá-la, é necessário mobilizar conhecimentos matemáticos. A atividade desenvolvida com o báculo traz, assim, indícios de que há uma lacuna de ordem epistemológica entre o observador que mede, o instrumento que medeia, e o ente medido. Nesse particular, as duplas notaram que o báculo é uma extensão do próprio observador que mede, uma vez que, por meio dele, é possível medir, em tese, qualquer distância (ou largura, ou comprimento) entre (de) objetos inacessíveis. Entretanto, compreenderam que o instrumento não mede, mas medeia o processo. E que na relação entre sujeito e objeto, é o conhecimento matemático mobilizado pelo observador que permite medir com o instrumento.

Nesse procedimento, notamos que outras questões de ordem epistemológica emergem do processo de medição. O papel do observador, sua relação com o objeto e o instrumento, bem como sua orientação espacial (a posição de quem mede e o alcance do objeto), apresenta novos elementos que nos direcionam a investigar sobre outras questões ligadas à geometria espacial e plana. Essas e outras relações nelas implicadas nos apontam para outros condicionantes do ato de medir que dão real significado à noção de medida.

Agradecimentos

O autor agradece a colaboração do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo 484784/2013-7).

Referências

ALEXANDER, A. R. **Geometrical landscape**: the voyages of discovery and the transformation of mathematical practice. Stanford: Stanford University Press, 2002.

______. Focus: mathematical stories. **Isis**, Chicago, v. 97, n. 4, p. 678-682, 2006.

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. Como se daria a construção de áreas interface do saber? **Kairós**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 55-66, 2003.

ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; BELTRAN, M. H. R. (Org.). **Escrevendo a história da ciência**: tendências, propostas e discussões historiográficas. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. Unesp, 1999. p. 129-136.

BARTOLI, C. **Cosimo Bartoli gentil'huomo, et accademico fiorentino, del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive (...).** Venetia: Francesco Franceschi Sanese, 1564.

BASILE, B. Della Porta, Bartoli e la fisionomia del genio. **Filologia e Critica**, Roma, v. 29, n. 1, p. 145-151, 2004.

BELHOSTE, B. Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. **Revue d'Histoire des Mathématiques**, Paris, n. 4, p. 289-304, 1998.

BELTRAN, M. H. R. História da ciência e ensino: algumas considerações sobre a construção de interfaces. In: WITTER, G. P.; FUJIWARA, R. (Org.). **Ensino de ciências e matemática:** análise de problemas. São Paulo: Ateliê Editorial, 2009. p. 179-208.

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F. História da ciência, epistemologia e ensino: uma proposta para atualizar esse diálogo. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 8. e CONGRESO IBEROAMERICANO DE INVESTIGACIÓN EN ENSEÑANZA DE LAS CIÉNCIAS,1., 2011, Campinas. **Atas...** Campinas: Unicamp, 2011. p. 1-8.

BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da ciência para formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

BENNETT, J. A. The challenge of practical mathematics. In: PUMFREY, S.; ROSSI, P. L.; SLAWINSKI, M. (Org.). **Science, culture and popular belief in renaissance Europe**. Manchester: Manchester University Press, 1991. p. 176-190.

______. Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? **British Journal for the History of Science**, London, v. 36, n. 2, p. 129-150, 2003.

______. Practical geometry and operative knowledge. **Configurations**, Baltimore, v. 6, p. 195-222, 1998.

BEO, N. D. **O estudo do *Trattato del Radio Latino***: possíveis contribuições para a articulação entre história da matemática e ensino. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

BRITO, A. J. Uma abordagem alternativa para o ensino de logaritmos: relações com PA e PG. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Org.). **História da ciência:** tópicos atuais 4. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 11-32.

______. História da matemática e a da educação matemática na formação de professores. **Educação Matemática em Revista**, Porto Alegre, v. 22, p. 11-15, 2007.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

______. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRYCE, J. H. Cosimo Bartoli's *Del modo di misurare le distanze* (1564): a reappraisal of his sources. **Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze**, Firenze, v. 2, p. 19-34, 1980.

CANGUILHEM, G. **Estudos de história e de filosofia das ciências:** concernentes aos seres vivos e à vida. Rio de Janeiro: Forense, 2012.

______. **Ideologia e racionalidade nas ciências da vida**. Lisboa: Edições 70, 1977.

CASTILLO, A. R. M. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A boke named tectonicon*** de Leonard Digges. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

CASTILLO, A. R. M.; SAITO, F. Algumas considerações sobre o uso do báculo (*baculum*) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: FLORES SALAZAR, J. ; UGARTE GUERRA, F. (Ed.). **Investigaciones en educación matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016. p. 237-251.

CONNER, C. D. **A. People's history of science**. New York: Nation Books, 2005.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática. **Rematec**, Natal, v. 12, p. 7-21, 2013.

DIAS, M. S.; MORETTI, V. D. **Número e operações:** elementos lógico-históricos para atividade de ensino. Curitiba: IBPEX, 2011.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1227-1253, 2014.

______. História e ensino de matemática: o báculo e a geometria. In: PROFMAT 2011 e SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2011, Lisboa. **Anais...** Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 2011. p. 1-11.

______. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. **Anais**... Brasília: SBEM, 2009.

_______. A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. In: CONGRESSO INTERNACIONAL PBL 2010, São Paulo**. Anais...** São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning: USP, 2010.

DIGGES, L. **A boke named tectonicon: b**riefelye shewynge the exacte, and speady reckenynge all manner lande, squared tymber, stone, steaples, pyllers, globes, etc... London: Iohn Daye for Thomas Gemini, 1556.

FARIA, J. T. **A contribuição da história da matemática na formação dos professores das séries iniciais**. 2010. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN J. **History in mathematics education:** an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000.

FINEO, O. **La composition et usage du quarre geometrique, para lequel on peut mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profunditez, tant accessibles, comme inaccessibles, que lon peut appercevoir à l’oeil:** le tout reduit nouvvellement en François, escrit & pourtraict. Paris: Gilles Gourbin, 1556.

FURINGHETTI, F. Teacher education through the history of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 66, n. 2, p. 131-143, 2007.

GESSNER, S. Savoir manier les instruments: la géometrie dans les écrits italiens d’architecture (1545-1570). **Revue d’Histoire des Mathématiques**, Paris, v. 16, n. 1, p. 87-147, 2010.

_____. The use of printed images for instrument-making at the Arsenius workshop. **Early Science and Medicine**, Leiden, v. 18, n. 1/2, p. 124-152, 2013.

GOLINSKI, J. **Making natural knowledge**: constructivism and the history of science. Chicago: The University of Chicago Press, 2005.

GOULDING, R. **Defending hypatia**: Ramus, Saville, and the renaissance rediscovery of mathematical history. Dordrecht: Springer, 2010.

GRATTAN-GUINNESS, I. History or heritage?: an important distinction in mathematics and for mathematics education. In: VAN BRUMMELEN, G.; KINYON, M. (Ed.). **Mathematics and the historian's craft:** the Kenneth O. May lectures. New York: Canadian Mathematical Society, 2005. p. 7-21.

GRAY, J. History of mathematics and history of science reunited?. **Isis**, Chicago, v. 102, p. 511-517, 2011.

HARKNESS, D. E. **The jewel house:** Elizabethan London and the scientific revolution. New Haven: Yale University Press, 2007.

MANN, T. History of mathematics and history of science. **Isis**, Chicago, v. 102, p. 518-526, 2011.

MENDES, I. A. História no ensino da matemática: trajetórias de uma epistemologia didática. **Rematec**, Natal, v. 12, p. 66-85, 2013.

______. **Investigação histórica no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

______. Tendências da pesquisa em história da matemática no Brasil: a propósito das dissertações e teses (1990-2010). **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 14, n. 3, p. 465-480, 2012.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; NÁPOLES, J. E. **A história como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulinas, 2006.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetekiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 40, p. 47-61, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MIGUEL, A. et. al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIORIM, M. A.; VILELA, D. S. (Org.). **História, filosofia e educaç*ão m*atemática**. Campinas: Alínea, 2009.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

ORSINI, L. **Trattato del radio latino**: istrumento giustissimo & facile più d'ogni altro per prendere qual si voglia misura, & positione di luogo, tanto in cielo como in terra: il quale, oltre alle operationi proprie sue, fà anco tutte quelle della gran Regola di C. Tolomeo, & del antico Radio Astronomico... Roma: Marc'Antonio Moretti & Iacomo Brianzi, 1586.

PEREIRA, A. C. C. **Aspectos históricos da régua de c**álculo para construção de conceitos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

RAMUS, P. **Via regia ad geometriam**: the way to geometru: being necessary and usefull for astronomers, geographers, land-meaters, seamen, engineers, architecks, carpenters, paynters, carvers. London: Thomas Cotes, 1636.

RICHENSON, A. W. **English land measuring to 1800:**instruments and practices. Cambridge: MIT Press, 1966.

ROCHE, J. J. The radius astronomicus in England. **Annals of Science**, London, v. 38, p. 1-32, 1981.

SAITO, F. "Continuidade" e "descontinuidade": o processo da construção do conhecimento científico na história da ciência. **Revista da FAEEBA**, Salvador, v. 22, n. 39, p. 183-194, 2013b.

______. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 3, n. 1, p. 3-19, 2016b.

______. História da ciência e ensino: em busca de diálogo entre historiadores da ciência e educadores. **História da Ciência e Ensino**: construindo interfaces, São Paulo, v. 1, p. 1-6, 2010.

______. História da matemática e educação matemática: uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: CONGRESO IBEROAMERICADO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. **Actas...** Montevideo: FISEM: SEMUR, 2013c.

______. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física: SBHMat, 2015.

______. História e ensino de matemática: construindo interfaces. In: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (Ed.). **Investigaciones en educación matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016a. p. 237-291.

______. Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 9, n. 18, p. 101-112, 2013a.

______. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Rematec**, Natal, v. 9, n. 16, p. 25-47, 2014.

SAITO, F.; DIAS, M. S. **Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SIMONSON, S. **The mathematics of Levi ben Gershon, the Halbag**. Disponível em: <http://web.stonehill.edu/compsci/shai_papers/mathoflevi.pdf >. Acesso em: 10 ago. 2016.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

WILLMOTH, F. "Reconstruction" and interpreting written instructions: what making a seventeenth-century plane table revealed about the independence of readers. **Studies in History and Philosophy of Science**, Notre Dame, v. 40, p. 352-359, 2009.

Artigo recebido em 11/09/2016. Aceito em 18/04/2017.

Endereço para contato: PUCSP, Departamento de Matemática, Rua Marquês de Paranaguá 111, Prédio I, CEP 01303050, São Paulo, SP, Brasil.