Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

Llanos, Viviana Carolina; Otero, María Rita; Paz Bilbao, María
Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)
Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 6, núm. 1, julio, 2011, pp. 1-10
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)

Viviana Carolina Llanos[1,2], María Rita Otero[1,2], María Paz Bilbao[1]

vcllanos@exa.unicen.edu.ar , rotero@exa.unicen.edu.ar, mpbilbao@yahoo.com.ar

[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Paraje Arroyo Seco s/n, Tandil, Argentina.

[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen

En éste trabajo presentamos el diseño y los resultados de la implementación de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI) para estudiar las Funciones Polinómicas con alumnos de 5to Año de la Secundaria. Se adoptan como referenciales teóricos la TAD de Chevallard (2004) y les jeux de cadres de Régine Douady. Se presentan algunos protocolos de los estudiantes y se discuten algunos alcances y limitaciones de este dispositivo.

Palabras clave: Actividad de Estudio y de Investigación (AEI); Funciones Polinómicas; Escuela Secundaria

Polynomial Functions in the Secondary School: the first results of an Activity of Study and Research (ASR)

Abstract

In this paper we present the design and the results of one implementation of an Activity of Study and Research (ASR), to study the Polynomial Functions whit students of 5th years at Secondary School. The Anthropological theory of didactics of Chevallard (2004) and the play of frame of Régine Douady (1986) are adopted like theoretical framework. We discuss about the advantages and disadvantages of the sequence and some student protocols are presented.

Keywords: Activity of Study and Research (ASR); Polynomial Functions; Secondary School.

Fonctions polynomiales dans l'école secondaire: premiers résultats d'une Activité d'Étude et Recherche (AER)

Résumé

Nous présentons le dessine et les résultats de l'implémentation d'une Activité d'Étude et Recherche, pour étudier les fonctions polynomiales avec des étudiants de cinquième année de l'école secondaire. Nous utilisons come cadre théorique la Théorie anthropologique du didactique de Chevallard (2004, 2007) et les Jeux de cadres de Régine Douady (1986). Nous discutons autour les ventages et désavantages de l'activité qu'a été proposée avec quelques protocoles des étudiants.

Mots clés: Activité d'Étude et Recherche (AER); Fonctions Polynomiales; École Secondaire

1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico en la Enseñanza de la Matemática actual, se refiere a la *pérdida de sentido* de la matemática escolar. Chevallard (2006) considera que la *epistemología escolar* predominante elimina las "razones de ser" de las Organizaciones Matemáticas (OM) que se proponen estudiar en la escuela. Este fenómeno está estrechamente relacionado con otro, denominado *monumentalización del saber* (Chevallard, 2004, 2005, 2006), caracterizado por presentar a las OM como obras terminadas, como objetos ya creados, valiosos *per se*, reduciendo así la enseñanza y el

cristalizadas y en cierto sentido, muertas” (Chevallard 2004, 2005).
La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no sean monumentos que el profesor “muestra” a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Las Actividades de Estudio y de Investigación (AEI) y los Recorridos de Estudio y de Investigación” (REI) son dispositivos didácticos que permiten enfrentar el proceso de monumentalización (Chevallard, 2004). Propuestos por la TAD, se generan a partir del estudio de respuestas a cuestiones “vivas” y “fecundas”, cuestiones que para ser respondidas, requieren la construcción de toda una secuencia de praxeologías completas y articuladas. (Serrano, Bosch, Gascón, 2007).

Este trabajo se alinea con los intentos de enfrentar el punto de vista *monumentalista* que relega la dialéctica cuestión-respuesta desde un punto de vista “funcional” (Barquero, 2009; Barquero, Bosch, Gascón, 2007; Chevallard, 2004, 2005, 2006, 2007) y trata de hacerlo en el ámbito de la escuela secundaria argentina, en clases de matemática habituales, es decir sin crear dispositivos “artificiales” y en cierta medida ajenos a la realidad institucional en la que nos desempeñamos. El dispositivo denominado Actividades de Estudio y de Investigación (AEI) introduce la *razón de ser* de la Organización Matemática Local (OML) que se quiere construir a partir del estudio de una cuestión a la que se tiene que dar respuesta (Chevallard, 2004). Toda AEI surge de una cuestión generatriz Q_0 que permite hacer surgir un tipo de problemas y una técnica de resolución, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se está desarrollando Chevallard (2005).

El trabajo presentado aquí es parte de una investigación que desarrolla recorridos de estudio e investigación en torno a la cuestión generatriz ¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? La respuesta a dicha cuestión origina recorridos que permiten reencontrar algunas OML del programa de 5to año de la escuela secundaria. Particularmente, en este trabajo se presenta el diseño, implementación y evaluación de una AEI relativa a las funciones polinómicas en 5$^{\text{to}}$ Año de la Escuela Secundaria. Se intenta describir la Organización Matemática que efectivamente se reconstruye en el aula y analizar los alcances y limitaciones de la AEI a partir de los resultados obtenidos en las implementaciones realizadas.

2. MARCO TEÓRICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999) ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la institución escuela media. En contra de un punto de vista *“monumentalista”* que pone en primer plano la *“visita”* de los saberes y que rechaza, y hasta olvida la dialéctica (Q, R), el punto de vista “funcional” busca colocar en el corazón de los procesos de estudio a las cuestiones Q y a la elaboración de respuestas R.

Chevallard (2007) considera al proceso de estudio como $P= (Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, considerando a Q_i como todas las cuestiones que habitan en el corazón ♥ del proceso de estudio y R_i las respuestas a estas cuestiones. Además, se define una cuestión Q_0 como la *cuestión generatriz* del proceso, y a partir de ella se generan todas las cuestiones Q_i, y la respuesta a esa cuestión como $R^{♥}$, generada a partir de todas las R_i.

La TAD ha propuesto la noción de *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) (Chevallard 2004, 2005, 2006), si bien se trata de una alternativa incompleta y limitada, es viable en nuestra escuela secundaria y permite comenzar a enfrentar el problema de la monumentalización e instalar algunos elementos de la pedagogía de cuestionamiento del mundo. Suele decirse que las AEI son dispositivos que producen un *encuentro arreglado* con una cierta OML a partir del estudio de una situación o de un conjunto de ellas, a las que la OML da una respuesta funcional. El encuentro es arreglado, en mayor medida para el profesor que para los estudiantes- . El problema que se plantea el profesor es el de cómo enseñar, es decir cómo establecer, construir o “poner en marcha” en la clase, la OML considerada de tal forma que ésta aparezca como la respuesta a una cuestión problemática que le aportará una *razón de ser*.

Las AEI tienen una estructura cuaternaria y están integradas por: las cuestiones, los ejercicios, una síntesis, que a su vez genera nuevas cuestiones y los controles, que operan tanto en el análisis a priori como durante su implementación.

Puesto que las AEI no resuelven satisfactoriamente el problema de la monumentalización, Chevallard ha profundizado y generalizado dicha noción con la noción de Recorridos de Estudio y de Investigación (REI). Las AEI presentan limitaciones en el nivel de la *topogénesis*, puesto que las cuestiones son regularmente formuladas por el profesor, mientras que en los REI los alumnos deberían tener un papel destacado en la propuesta de las cuestiones a estudiar. En el nivel de la *mesogénesis*, en las AEI el alumno *encuentra el medio*, que es en mayor medida controlado y alimentado por el profesor -él formula las cuestiones- y por las retroacciones de los alumnos. La AEI tendrían la estructura S(X, Y; Q; M), mientras en los REI la estructura sería S(X, Y; Q) $\longrightarrow$ M, el medio está fuera de la situación y se conforma a través de la dialéctica medio-media, con la intervención de elementos externos. Finalmente, las AEI permiten un control del tiempo didáctico compatible con las características de un curso habitual de la escolaridad, mientras en el REI, la *cronogénesis* es funcional a la evolución de los recorridos y a la incidencia de la *dialéctica de entrar y salir del tema* y a la *dialéctica de las cajas negras y las cajas claras* características del proceso de gestión de un REI (Chevallard, 2007).

Las AEI suponen un cuestionamiento fuerte al contrato didáctico tradicional de la secundaria y son, a nuestro juicio, una opción gradualista y viable, aunque incompleta, para comenzar a introducir en la escuela la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Para llegar a una *pedagogía de REI* se requiere un *paradigma escolar del cuestionamiento del mundo*, pero carecemos de una global para desarrollarla plenamente. Sin embargo, al menos en materia de investigación, es posible intentar hacer vivir en la escuela toda vez que sea posible, la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, y para ello, las AEI permiten aproximarse a ciertos tipos de saber hacer, a las dialécticas y propiedades que permiten gestionar un REI. Aún sabiendo que por este camino no podremos construir sino Organizaciones matemáticas Locales, esto es de suyo una ganancia importante con relación a la situación imperante en la escuela secundaria y un paso adelante en la recuperación del sentido.

Simultáneamente, utilizamos les *jeux de cadres* de Régine Douady (1986, 1999, 2011) tanto para el diseño, como para el análisis del significado de un mismo concepto en diferentes marcos. Les *jeux de cadres* implican que la mayoría de los conceptos pueden intervenir en distintos dominios y diversos marcos: geométrico, algebraico, numérico, gráfico, funcional, entre otros. Esto permite por un lado analizar las correspondencias entre significados de un mismo concepto en marcos diferentes, y por otro, entre significados de conceptos diferentes representados en el mismo marco por los mismos significantes. En particular nos interesa analizar como los conceptos "funcionan" de manera diferente según los distintos marcos.

3. METODOLOGÍA

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se busca describir y justificar la AEI diseñada e implementada permite construir las propiedades fundamentales de las funciones polinómicas con sentido para los estudiantes. El objetivo es examinar cómo funciona este dispositivo en un aula concreta de secundario al mismo tiempo que se busca desplazar la enseñanza tradicional, puesto que hay pocas investigaciones donde las AEI se implementan sin la creación de cursos alternativos a los habituales.

Las implementaciones fueron realizadas en dos cursos seleccionados intencionalmente por el investigador en el mismo Establecimiento Educativo. Los alumnos (N=59) son estudiantes de 5^{to} Año de la Secundaria. Las implementaciones fueron realizadas por los investigadores. Ambos grupos de estudiantes participaron de la implementación del REI originado en la cuestión generatriz: ¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes? Este REI, originó en 4^{to} año de la Secundaria una AEI relativa a las funciones polinómicas de grados dos y permite continuar durante el 5^{to} Año cubriendo las funciones polinómicas y las funciones racionales. En consecuencia, estos estudiantes disponen de las técnicas de cálculo geométrico y del los conceptos necesarios para avanzar en la AEI relativa a las funciones polinómicas. Durante las implementaciones, se obtuvieron los protocolos escritos de los estudiantes en todas las clases, se tomaron registros de audio "generales" de la clase y también se registraron notas de campo. Los protocolos escritos de los estudiantes, se retiran clase a clase, se escanean y se devuelven a los estudiantes en la clase inmediata siguiente, para garantizar la continuidad de su trabajo y para que ellos dispongan permanentemente de sus registros.

4. ANTECEDENTES

Este trabajo es parte de la investigación que están desarrollando Otero y Llanos (2010) partiendo de la cuestión generatriz Q_0 ¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes? que originó un posible REI. Las posibles respuestas involucran la tecnología del cálculo geométrico y originaron diferentes AEI, como parte del REI. Si se trata de la multiplicación de dos rectas, se genera una AEI_1 que permite reconstruir la Organización Matemática Local (OML_{FPD}) relativa a la función polinómica de segundo grado en el marco geométrico, geométrico analítico y algebraico funcional (Llanos, Otero, 2010, Otero y Llanos 2010, 2011). Si se trata de varias rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, etc, se construye una AEI_2 que permite reconstruir la OML_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales. (Bilbao 2011, Otero, Llanos, 2010, 2011). Por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o parábolas y rectas, o entre parábolas, se construye una AEI_3, que permitiría construir la OML_{FQ} de las funciones racionales. En este trabajo abordamos el diseño de la AEI_2 propuesto para estudiar las funciones polinómicas en la escuela secundaria desde la *pedagogía de la investigación*.

La cuestión generatriz, se inspira en un problema propuesto en la investigación de Régine Douady (1986, 1999, 2010, 2011) para el estudio de los signos de las funciones polinómicas, que propone analizar los signos del producto de dos funciones lineales $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, cuando solo se conocen las representaciones gráficas de las rectas. Inicialmente partimos de la multiplicación geométrica de dos rectas, cuando solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes, solicitando además obtener una gráfica razonable para la curva resultante. El análisis de los signos es una información más, entre las características que se requieren para la obtención de la curva razonable. La situación creada por Douady (1999) y la cuestión generatriz que hemos readaptado y generalizado, poseen una gran generatividad, por la variedad de sub-cuestiones matemáticas relevantes que el profesor y los estudiantes pueden plantear. La AEI_2 que presentamos aquí, está conformada por un conjunto de 8 situaciones, por una síntesis, ejercicios y problemas y por los controles habituales que incluyen la evaluación escolar (Llanos, Otero, 2010).

5. AEI_2: nociones relativas a las Funciones Polinómicas.

La AEI_2 comienza en el marco geométrico. Al igual que la (AEI_1) que la precede, la AEI_2 parte del cálculo geométrico del producto de otras funciones polinómicas. Las tres primeras situaciones son variantes del mismo problema: en la S1, la gráfica para *p* resulta de la multiplicación geométrica de tres rectas, mientras que en la S2 y S3 de la multiplicación entre una parábola y una recta, diferenciadas estas por la cantidad de ceros que tiene la parábola que se multiplica, buscando en todos los casos una curva *razonable* de las funciones polinómicas de grado tres, como se muestra en la Fig.

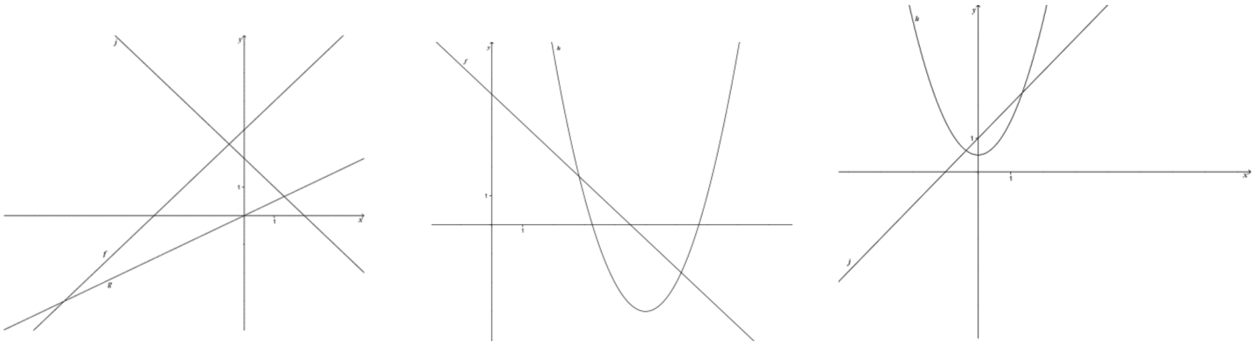


Figura 1: Gráficas correspondientes a las situaciones 1 a 3

Las preguntas formuladas son: ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de *p*? ¿Cuál podría ser la representación gráfica más razonable para *p*? ¿Qué características de la gráfica de *p* se podrían justificar?

La curva de *p* resulta de la identificación de lo que los estudiantes denominan *puntos seguros* -ceros, unos, en algunos casos también el menos uno o múltiplos de la unidad- y los signos de *p* (C^+ y C^-). También son puntos seguros, los que se obtienen a partir del cálculo geométrico, construyendo triángulos semejantes apropiadamente seleccionados utilizando como información la unidad. Esta técnica proviene de la AEI_1, y está basada en la tecnología del Teorema de Thales y la proporcionalidad de segmentos. Es destacable que la AEI_2 comenzó el primer día de clases, más de tres meses después de haber estudiado AEI_1 y que los estudiantes tenían consigo útiles de geometría y buscaron aplicar la técnica. El profesor sugirió que cada uno realizara la tarea como mejor pudiera y que consultaran sus cuadernos del año anterior, para la clase siguiente. En el segundo encuentro del año, los estudiantes que no lo habían hecho en el primero, readaptaron la técnica como se aprecia en los protocolos que presentamos.

Las situaciones 4 y 5 (Figura 2) se plantean en el marco algebraico-funcional, para acceder a las expresiones algebraicas enteras de las funciones polinómicas. En las tres situaciones se solicita: obtener las fórmulas para *p* en forma factorizada y polinómica. Graficar *p* e indicar las características de la gráfica que se pueden justificar. Usando los puntos que se indican en las representaciones gráficas, los estudiantes obtienen las expresiones algebraicas de las funciones representadas gráficamente. Después expresan al producto de esas funciones en la forma factorizada y por último, la expresión general de la función polinómica -por medio de la propiedad distributiva entre dichas expresiones-.

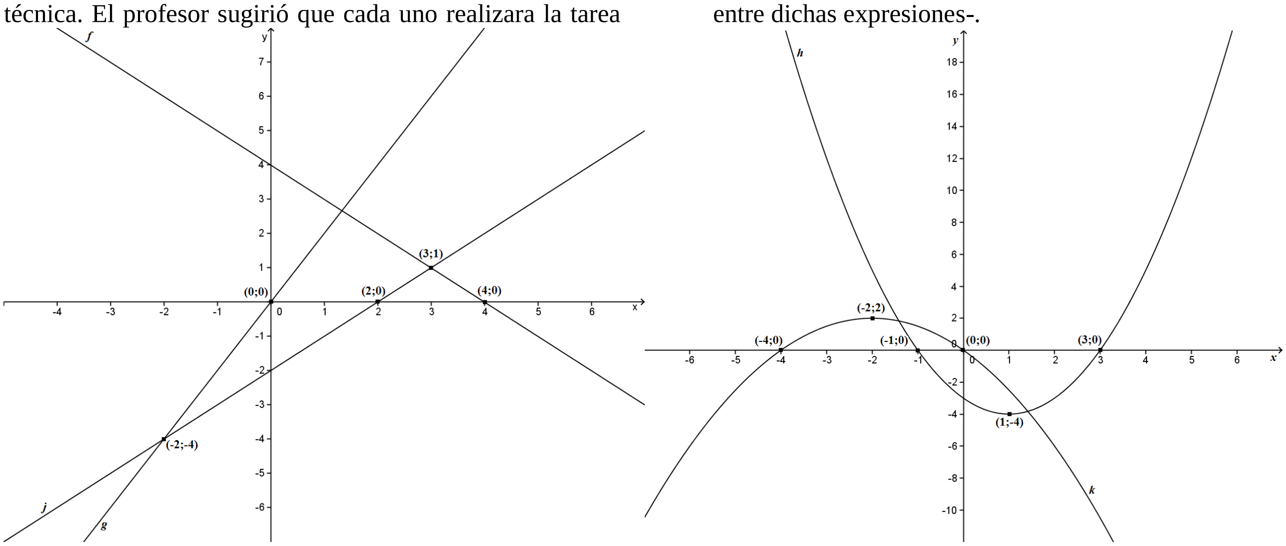


Figura 2: Gráficas correspondientes a las situaciones 4 y 5

Luego de haber obtenido la expresión algebraica de la función en las denominadas formas polinomica y forma factorizada, se propone la Actividad 6 para construir las propiedades de los ceros, analizar la multiplicidad y sus características relativas a las funciones polinómicas de grado par e impar. Se trata de analizar si es posible proponer ejemplos de:

- Una función de grado uno que no tenga ceros reales y una que tenga sólo un cero real.
- Una función de grado dos que no tenga ceros reales, una que *tenga sólo un cero real* y otra que tenga los dos ceros reales.
- Una función de grado tres que no tenga ceros reales, una que tenga sólo uno, otra que tenga sólo dos y otra que tenga los tres ceros reales.
- Una función de grado cuatro que no tenga ceros reales, una que tenga sólo un cero real, una que tenga sólo dos ceros reales, otra que tenga sólo tres ceros reales y otra que tenga los cuatro ceros reales.

Los estudiantes proponen ejemplos de distintos tipos y casos, mientras analizan las propiedades de los ceros y las diferencias entre las funciones de grado par e impar, discusión que derivó en las cuestiones ¿pueden las funciones de grado par no tener ceros? ¿ y las de grado impar?

En síntesis, los estudiantes construyen geométricamente la curva de la función polinómica que resulta de la multiplicación de otras del mismo tipo pero de grado menor, y luego, obtienen las expresiones algebraicas de las funciones cuando se proporcionan las representaciones gráficas. Primero lo hacen en la forma factorizada, y después polinómica y en la última de las actividades analizan las propiedades de los ceros diferenciando las mismas entre las funciones de grado par e impar.

Las últimas situaciones 7 y 8, se dirigen a elaborar, explicar y justificar técnicas para realizar las operaciones con polinomios, no sólo de forma algebraica sino también gráfica. En la situación 7 los estudiantes tienen que resolver el problema de obtener una técnica para sumar, restar y multiplicar polinomios: ¿cómo se realizan las operaciones suma, resta y multiplicación de polinomios? ¿Qué técnicas proponen para hacerlo?

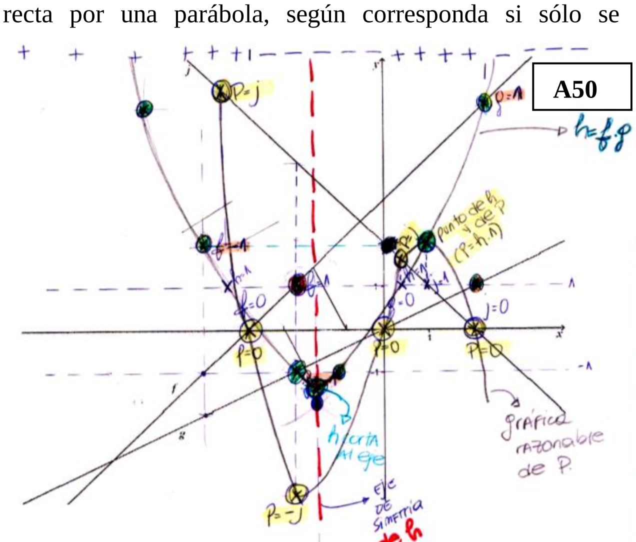
Luego se propone una síntesis, a la que se agregan ejercicios y problemas (Otero, 2011). Esto permite evaluar el conocimiento construido y completar la AEI para el estudio de las funciones polinómicas. La síntesis involucra las nociones: polinomios, polinomios iguales, polinomio nulo, ceros de la función polinómica, operaciones con polinomios (suma, resta y multiplicación de polinomios). División de polinomios. Técnicas para factorizar polinomios. Divisibilidad de polinomios, la técnica de Gauss, los casos de raíces múltiples, conjuntos de positividad y negatividad.

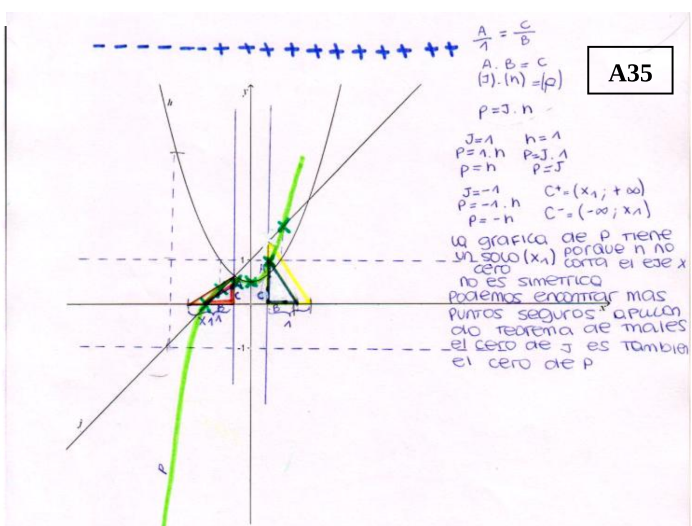
La OM efectivamente reconstruida en el aula.

Desde su inicio, se utiliza la idea de que las funciones polinómicas son expresables como el producto de otras de su tipo. Esto es gracias a la cuestión presente en las situaciones uno a tres, en las cuales se propone obtener la curva resultante de la multiplicación de tres rectas o de una recta por una parábola, según corresponda si sólo se dispone de la representación gráfica de las funciones y de la unidad en los ejes. A partir de la identificación de los *puntos seguros* y el empleo de la construcción geométrica, se obtuvieron respuestas según se muestra en la Figura 4.

Los protocolos permiten interpretar que los estudiantes realizan un análisis inicialmente basado en los puntos notables (ceros y unos) y en los signos, para luego, recuperar la técnica del cálculo geométrico y obtener cualquier punto de la curva que están buscando, como se aprecia en el protocolo de A56. Todos los estudiantes analizan previamente el signo que puede tener el producto, empleando los ceros, siendo esta acción muy útil para ellos cuando intentan obtener la curva. Sin embargo, para justificar "su curva" frente a los demás, ellos recurren al cálculo geométrico, en la búsqueda de más puntos, que a la vez confirmen el signo que ya han calculado y cierta forma que ellos están atribuyendo a la curva resultante. Esto puede apreciarse en la clase a partir de una importante gestualidad, previa a delinear, la curva. Así, A 50 multiplicó geométricamente dos de las rectas para encontrar el punto exacto del vértice de la parábola sobre el eje de simetría, al que ubicó en la mitad de los ceros de cada recta y trazó con seguridad una parábola. Luego, no pudo adaptar la técnica para encontrar puntos multiplicando geométricamente esta, con la recta restante. Sin embargo, a la segunda clase, cuando se resolvió la situación 2, un grupo importante de estudiantes evidenciaron un manejo más avezado de la técnica, aunque aún tuvieron algunos problemas que sortearon con las informaciones de los signos y los puntos llamados *seguros*, y procedieron como se aprecia en el protocolo de A 56, en el cual el cálculo geométrico se aplica correctamente una vez y se escriben las proporciones que muestran que se están obteniendo puntos de la curva resultante.

El protocolo de A 35 permite apreciar que ya en la situación tres, al no existir sino un cero, los estudiantes necesariamente debieron recurrir al cálculo geométrico para obtener "buenos" puntos, además de usar sus recursos a los signos y a la unidad. El resultado final es una ganancia importante para los estudiantes, pues recuperan la de la razón de ser de la expresión polinómica, a partir de la expresión factorizada.





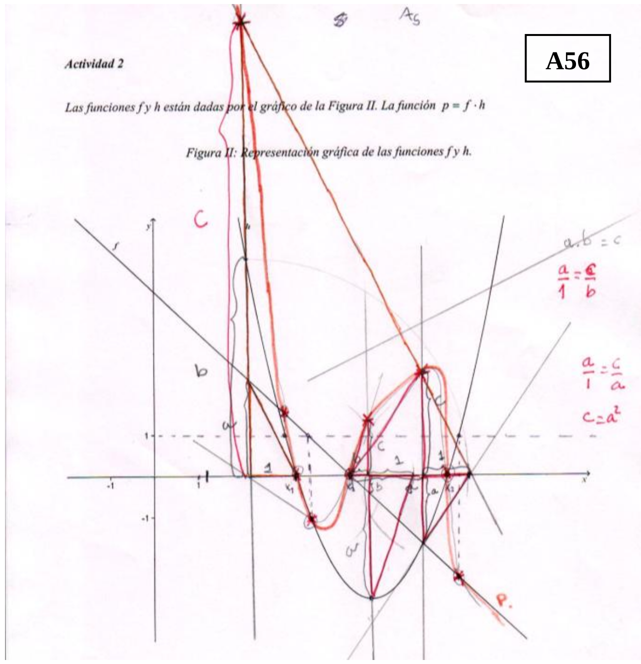


Figura 4: Resolución de los alumnos A50, A35 y A56 respectivamente

Si bien este es una manera muy diferente de introducir las funciones polinómicas, respecto de la que es habitual en la escuela, la generatividad de la cuestión inicial, planteada en el dominio geométrico, da sentido a la factorización de polinomios, al significado de los ceros y a la utilidad de la forma factorizada que se busca con técnicas algebraicas.

Puestos en el dominio algebraico-funcional y analítico- obtener las expresiones algebraicas para las rectas representadas gráficamente y realizar la multiplicación, no presentó problemas a los estudiantes, quienes arribaron de manera relativamente “natural” a una expresión polinómica, para funciones de grado tres y mayor (situaciones 4 y 5). Así, retomando una vez más la idea de que las funciones polinómicas no primas, pueden ser expresadas como el producto de otras funciones polinómicas del mismo tipo y de grado menor, los estudiantes avanzan en la obtención de cada una de las expresiones algebraicas que se multiplican, y por último, en la obtención de la expresión general, la forma polinómica. La Figura 5 muestra los protocolos de A45 y A11, que presentan dos técnicas diferentes para obtener la forma factorizada y luego la forma polinomica de *p*, en cada una de las situaciones, dando sentido a la noción de ceros a partir de la forma factorizada. Comenzar con el estudio de la función polinómica a través de la multiplicación de distintas curvas les permitió obtener tanto la expresión de la función en forma factorizada y la expresión en forma polinómica -por medio de la propiedad distributiva-. La mayoría de los estudiantes reconocen los ceros de las funciones y su significado en la forma factorizada, pues esa información es la que han utilizado y nombrado como *“puntos seguros”* en el dominio geométrico.

El análisis y estudio de la multiplicidad de los ceros, así como la relación con las propiedades de las funciones de grado par y de grado impar se realizó en la actividad seis. Esto permitió conclusiones importantes como el hecho de que si un polinomio tiene grado impar debe existir al menos un cero real. Los resultados de la situación seis son muy interesantes, y los alumnos la resuelven con solvencia y holgura, analizando los diversos casos que pueden presentarse. Así, algunos grupos plantean que los polinomios de grado cero, son rectas paralelas al eje x y que si a_0 es distinto de cero, no tendrán ningún cero real. Es evidente que la cuestión generatriz de la AEI, los ha llevado a preguntarse por las posibles formas de descomposición de una función polinomica.

Las Figuras 6 y 7 respectivamente, muestran como los alumnos A17 y A23 obtienen ejemplos adecuados para justificar las características y propiedades de los ceros en las funciones de grado par e impar. El protocolo de A17 se ha seleccionado para ejemplificar un análisis relativo a las propiedades de los ceros de las funciones de grado par y el protocolo de A23 para las funciones de grado impar.

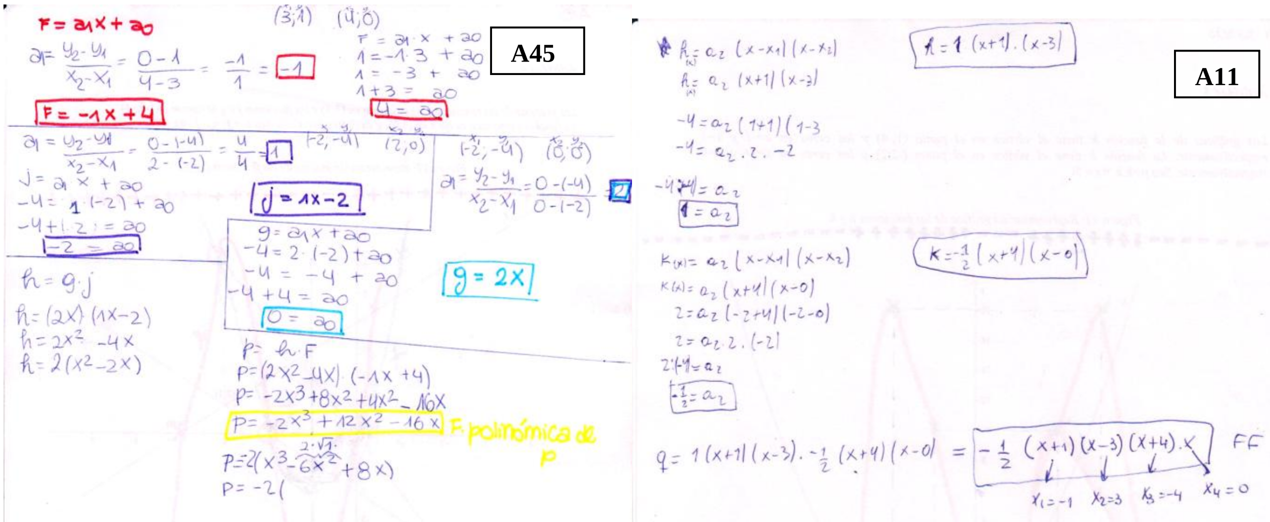


Figura 5: Resolución de los alumno A45 y A11 respectivamente

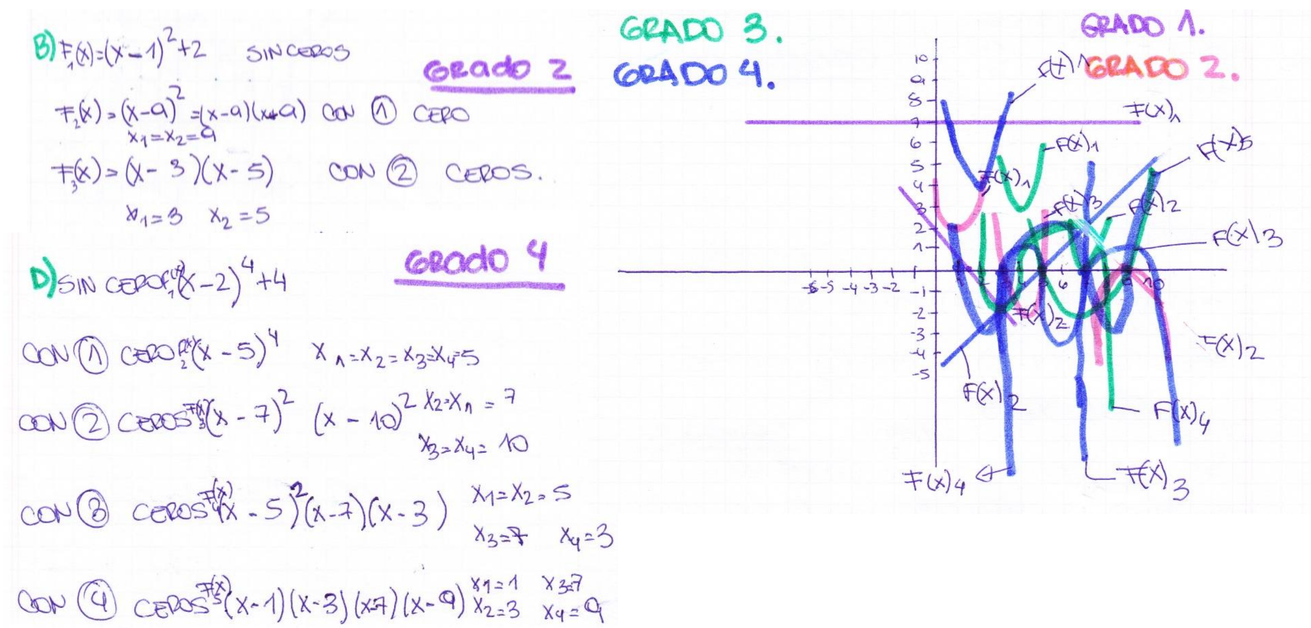


Figura 6: Resolución del alumno A17

La diversidad de ejemplos propuestos por los estudiantes y la variedad de casos posibles de analizar, se evidenció en la puesta en común de cada grupo. Aunque su incidencia en la cronogénesis y en la utilización del tiempo didáctico podría evaluarse como "costosa", ella tiene la función de comunicar a otros los resultados y también de justificarlos. Si bien estamos implementando una AEI, vemos que es posible incursionar en la llamada dialéctica de la inscripción y de la excripción, que es propia del proceso de gestión del REI. Para reforzar esta dialéctica, generalizar los resultados obtenidos y concluir con la actividad 6, la profesora plantea a la clase la cuestión: ¿cuántos ceros puede tener entonces una función según sea de grado par o de grado impar?

Como se pone de manifiesto en el protocolo de A 23, los alumnos recurren al dominio gráfico para justificar que una función de grado impar tiene ramas infinitas de signos opuestos, y que en consecuencia, los polinomios diferentes que podrían obtenerse por traslación de la gráfica, siempre tendrán intersección con el eje x, mientras en las funciones de grado par las ramas infinitas tienen el mismo signo y en consecuencia es posible generar alguna que nunca intercepte al eje x.

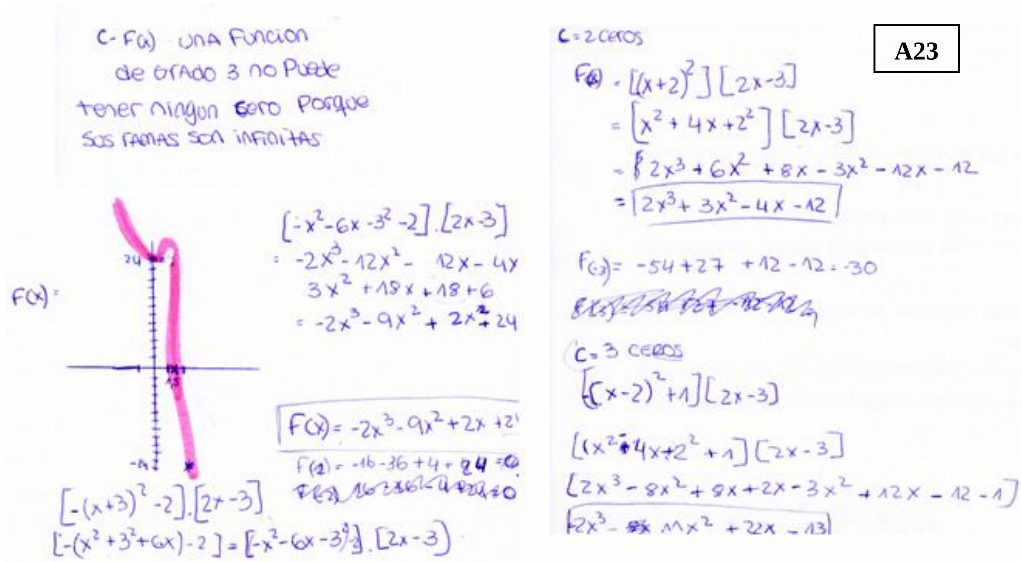


Figura7: Resolución del alumno A23

Cuando se estudiaron las operaciones con polinomios, los alumnos no tuvieron dificultades en construir, explicar y justificar una técnica para realizar la multiplicación de polinomios. Sin embargo, les resulto más “complicado” proponer la técnica para realizar la suma y la resta de los mismos. Algunos alumnos sólo podían proponer ejemplos de suma y resta de polinomios homogéneos. En la Figura 8, se consideran las respuestas de los estudiantes A11 y A50 a modo de ejemplo.

Comenzar el estudio de la función polinómica a través de la multiplicación de distintas curvas, facilitó a los alumnos proponer, construir, explicar y justificar una técnica para realizar la multiplicación de polinomios.

La AEI, no respondió la sub-cuestión de la división de polinomios por la técnica del cálculo geométrico, aunque habría sido factible.

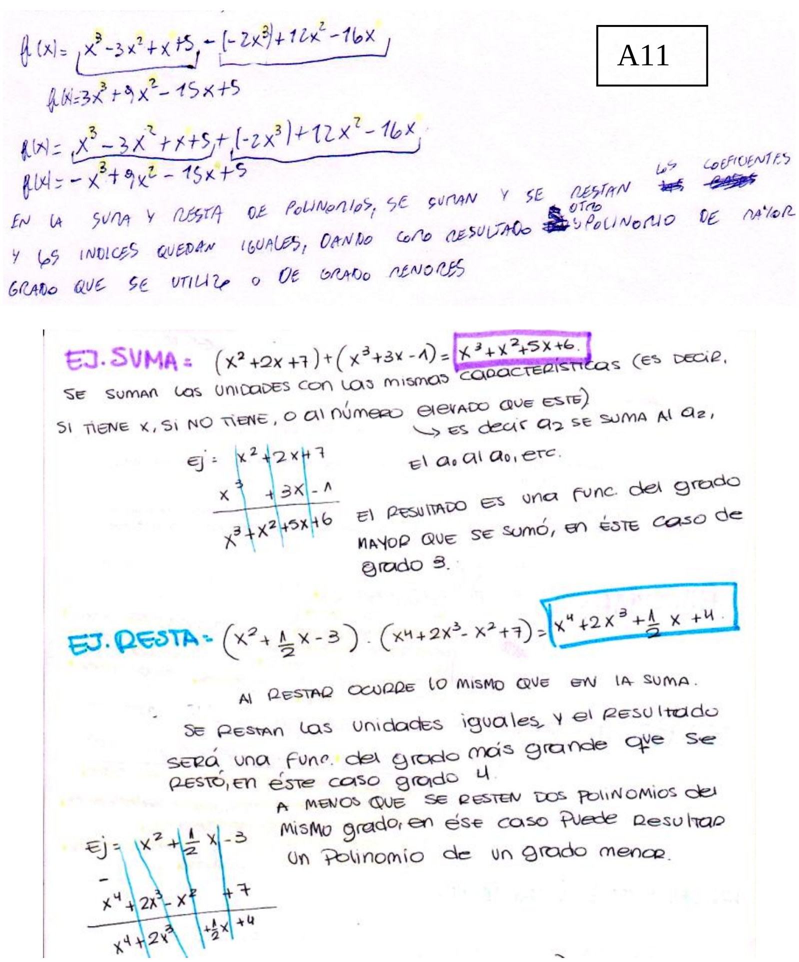


Figura8: Resolución de los alumnos A11 y A50 respectivamente

Reconocemos en este hecho, un aspecto clave de la topogénesis, que como profesores a cargo de la implementación, con rol de observador participante, recién pudimos analizar "a posteriori". En realidad, cuando los estudiantes empezaron a colocar la cuestión del cociente, deliberadamente abortamos esa cuestión, porque pensamos que sería muy difícil para ellos -*el fenómeno de la subestimación del alumno*- y que demandaría mucho tiempo. Algo similar sucedió cuando los estudiantes comenzaron a buscar simetrías en las funciones que iban obteniendo y deliberadamente, nuestra intervención hizo morir la cuestión, aunque los estudiantes tenían herramientas para abordarla, dentro del mismo marco geométrico, como de hecho, lo habíamos hecho en la AEI $_1$.

Esto muestra hasta qué punto, la conciencia didáctica *"cerrada"* del profesor, puede operar al nivel de la topogénesis, aun en nuestra peculiar situación de profesores y didactas. Nuevamente, vemos las dificultades que operan alrededor de la dialéctica de "entrar y salir del tema" y su incidencia en la topogénesis, en la cronogénesis y en la mesogénesis. Además, es necesario decir, que dentro de la *ideología* de la AEI, no conseguimos en esa situación darnos permiso para salirnos del camino que nos habíamos trazado y del encuentro que habíamos planeado producir. En fin, las Actividades 7 y 8, sirvieron entonces para construir distintas técnicas, que permitieron usar las operaciones suma, resta y multiplicación de polinomios, pudiendo los alumnos justificar y explicar cada una de ellas. Con las actividades propuestas en la síntesis y los ejercicios para revisar lo aprendido, se estudiaron otros conceptos matemáticos como el cociente de polinomios, de los cuales no nos ocupamos en este trabajo. Estos aspectos, serán modificados en las próximas implementaciones, en las cuales confiaremos más en la probada capacidad puesta de manifiesto por los alumnos para explotar las cuestiones y plantear distintos casos posibles, así como en la importancia de permitirnos *salidas del tema*, aun en el marco de la gestión de la AEI.

6. CONCLUSIONES

El principio de las AEI cuestiona fuertemente la epistemología escolar monumentalista que reemplaza las cuestiones *Q*, fuente de toda producción de conocimiento, por las *falsas cuestiones*. Aunque una AEI en el sentido usual del término pueda observarse como un REI, el concepto de REI rompe en varios aspectos con la noción de AEI. En el punto de partida de un REI hay una cuestión *Q* inicial, que no tiene por objetivo el encuentro, el forzado de una OM. El estudio de *Q* a lo largo del curso tiene que tener una fuerte potencia generadora, que pueda especificarse a través de un gran número de cuestiones "secundarias", que serán objeto de AEI particulares, como es el caso que hemos considerado.

Desde las primeras situaciones donde se obtiene la gráfica de *p* por cálculo geométrico, se introduce el problema del análisis de la paridad de los ceros, analizando los casos de las funciones polinómicas de grado tres con un cero y tres ceros reales. Si bien esto es positivo y funcionó bien, en las próximas implementaciones será modificado, analizando iguales. Esto permitiría analizar el problema de la multiplicidad de los ceros y su relación con el cambio de signo de la función, desde la primera situación. Tampoco se avanzó hacia la división de polinomios por la técnica del cálculo geométrico, aunque lo permitía, este aspecto también deberá ser revisado.

Para las próximas implementaciones del REI, esta AEI_2 *será modificada y se enfatizará también en el análisis del* papel de los ceros y su multiplicidad con relación al signo de una función polinómica, en el análisis de las funciones pares e impares y en la simetría de las curvas, etc.; que si bien son cuestiones no estudiadas en las implementaciones realizadas, se espera poder considerar en un futuro próximo.

7. REFERENCIAS

BARQUERO, B. (2009) Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas, Tesis Doctoral, UAB.

BARQUERO, B; BOSCH, M; GASCÓN, J. (2007) *Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias.* Comunicación en el II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Uzès, Francia.

BILBAO, M. P. (2011) Actividades de Estudio e Investigación (AEI) para la Enseñanza de nociones relativas a las Funciones Polinómicas en la Escuela Secundaria, Tesis de Licenciatura en Educación Matemática, fecha de defensa 17 de Junio de 2011, UNCPBA.

CHEVALLARD, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr

CHEVALLARD, Y. (2005) *La didactique dans la cité avec les autres sciences*. Symposium de Didactique Comparée, Montpellier 15-16.

CHEVALLARD, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Conferencia plenaria de apertura del 4º congreso de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 de Febrero de 2005. Publicado en los *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelona, 2006, 21-30.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5- 32

DOUADY, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16).* European Research in

DOUADY, R. (2010) Communication personnel avec Maria Rita Otero, Paris, 01-02-2010 / 25-02-2010

DOUADY, R. (2011) Communication personnelle avec Maria Rita Otero, Paris, 01-06-2011.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R.; (2010) *Ecología de las AEI y de los REI, Actividad y conceptualización en el aula de matemática*. Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. En desarrollo.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. Evaluar y calificar: algunas reflexiones en torno a las actividades de estudio e investigación (AEI). Actas II Congreso Internacional de Didácticas Específicas: Poder, disciplinamiento y evaluación de saberes. Universidad Nacional de San Martín. Buenos Aires, Argentina. 30 de Septiembre al 2 de Octubre de 2010. Actas en prensa.

OTERO, M. R.; LLANOS, V (2010¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes? propuesta de REI.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2007) “Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Francia. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm