Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

Parra, Verónica; Otero, Maria Rita; Fanaro, María de los Ángeles

Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad

Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 4, núm. 2, diciembre, 2009, pp. 24-38
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS

Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad

Parra,Verónica[1,2]; Otero,Maria Rita[1,2] Fanaro; María de los Ángeles[1, 2]

vparra@exa.unicen.edu.ar , rotero@exa.unicen.edu.ar , mfanaro@exa.unicen.edu.ar

[1]*Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).*
Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA
[2]*CONICET, Argentina*

Resumen

En este trabajo se reconstruye y describe una Organización Matemática (OM) de referencia relativa a las nociones de *límite y continuidad de funciones reales*, para un curso de Cálculo del área Economía y Administración del primer año de la Universidad. El marco teórico adoptado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001). Se describe el sentido matemático, social, y cultural (Bosch et. al, 2006) de esta OM de referencia. Finalmente, se detallan los componentes prácticos-técnicos y tecnológicos-teóricos de la OM, es decir, los tipos de tareas, las técnicas matemáticas, las tecnologías y teoría.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Organización Matemática de Referencia, Educación Universitaria, Límite y Continuidad de funciones reales.

Abstract

In this work a Mathematical Organization (MO) of reference relative to the notions: limit and continuity of real functions is reconstructed and described. It is proposed for an Economical and Administration Calculus course, in the first year at University. The adopted theoretical frame is the Anthropological Theory of Didactic (ATD) (Chevallard, 1999, 2001). The mathematical, social, and cultural sense (Bosch et. al., 2006) of this OM of reference is described. Finally, the practical-technical and technological-theoretical components of the OM are detailed; this is, the types of tasks, the mathematical techniques, the technologies and theory.

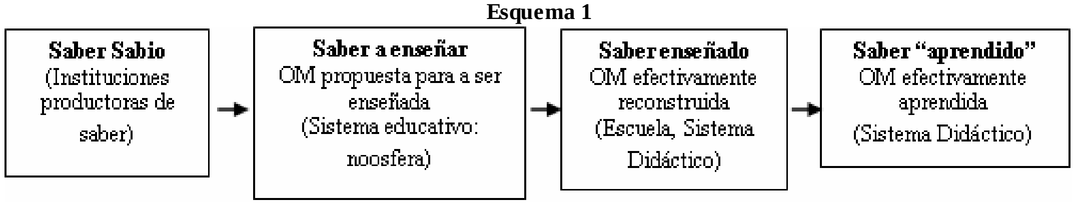
Keywords: Anthropological Theory of Didactics, Mathematical Organization of Reference, University Education, Limit and Continuity of real functions.

1. INTRODUCCIÓN

Las Organizaciones Matemáticas[1] (OM) reconstruidas y estudiadas en una determinada Institución, relativas a una noción matemática, no son necesariamente únicas. Es decir, una OM que se propone a ser estudiada, en general, no coincide con la OM efectivamente reconstruida en el aula, y ésta, a su vez, raramente coincide con la OM efectivamente aprendida. Por esto es que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001) propone que el investigador elabore o reconstruya una OM de referencia, que actúe como un punto de observación del análisis de las diferentes OM que se proponen, reconstruyen y aprenden en un curso de Matemática. Bosch, Espinosa y Gascón (2003) definen una OM de referencia como "un modelo de OM" que permite analizar las reconstrucciones propuestas en los programas oficiales y en los libros de texto sobre ciertos "temas" de estudio, cuestiones o nociones. El Esquema 1 (Adaptado de Bosch, Gascón, 2006) muestra una sucesión de OM, que comienza en la OM de referencia, donde "vive" el saber sabio, y termina en la OM efectivamente aprendida en el aula. Entre esta cadena de OM ocurren procesos de transposición didáctica, que acaban definiendo lo que es posible estudiar o reconstruir en una clase de Matemática,

[1] Chevallard (1999) también las denomina *praxeologías matemáticas*. El concepto *praxeología* proviene de la unión de los términos *praxis* y *logos*. El primero hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos se identifica con el saber e incluye el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las

Esquema 1



En trabajo anteriores se describieron las OM propuestas para enseñar y la OM reconstruida en el aula relativas al límite y continuidad de funciones en un Curso de Cálculo de una Facultad de Economía y Administración del primer año de la Universidad; además, se caracterizaron las Organizaciones Didácticas[2] (OD) desarrolladas en esta Institución para el estudio de tales OM (Parra, 2008; Parra, Otero, 2007; Parra, Otero, 2008). En el trabajo que aquí se presenta, se reconstruye y se describe una OM de referencia en torno a las nociones de *límite y continuidad de funciones reales*, entendiendo una OM de referencia como aquella praxeología con el mayor grado de generalidad posible, bajo la cuál podrían emerger cada una de las OM que puedan estudiarse o reconstruirse respecto, en nuestro caso, al límite y continuidad de funciones. Se describen cada uno de sus componentes, es decir, tipos de tareas, técnicas matemáticas, tecnologías y teoría[3].

2. LOS DISTINTOS NIVELES DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS

Chevallard (1999) distingue cuatro niveles de OM: organizaciones matemáticas *puntuales*, *locales*, *regionales* y *globales*. Las primeras son aquellas que se construyen alrededor de un único tipo de tareas articuladas por una técnica matemática. Las OM *locales* están formadas por la agregación de organizaciones matemáticas puntuales alrededor de un discurso tecnológico común, es decir, asumiendo una misma tecnología para cada una de las técnicas. Las OM *regionales* están formadas por la articulación de organizaciones matemáticas locales en torno a una misma teoría, y las OM *globales* son producto de la agregación de organizaciones regionales bajo una teoría común.

La idea de globalidad, por lo tanto, sugiere la identificación de al menos una teoría que justifique a cada una de las OM regionales. Esto hace necesaria la identificación de las "fronteras" de las teorías matemáticas, para decidir así que OM regionales responden a esa teoría y cuáles, no lo hacen. De igual manera ocurre con las OM locales, donde se deberá delimitar la tecnología común a los diferentes tipos de tareas. Aunque resulta difícil separar o delimitar las teorías y tecnologías matemáticas, pues están articuladas y conectadas entre sí, en este trabajo se realiza una separación entre las OM locales sólo a los efectos de facilitar la organización y la descripción de la OM de referencia.

La caracterización de una OM como puntual, local o regional no es absoluta ni definitiva. Depende de lo que se considere, en cada Institución, como un único tipo de tareas matemáticas, así como el ámbito que abarque el discurso tecnológico asociado (Bosch, Espinoza, Gascón; 2003). Cada nivel de OM responde a una cuestión generatriz y tiene sentido o razón de ser dentro de cierta área. Pero ¿bajo qué condiciones una cuestión generatriz tiene sentido dentro de una Institución?

3. LEGITIMIDAD DE LAS CUESTIONES QUE SE ESTUDIAN EN LA ESCUELA O EN LA UNIVERSIDAD

Chevallard (2001) propone una *jerarquía de niveles de co-determinación* (o de determinación) entre las OM escolares y las correspondientes OD. Esto es, entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas y la manera de organizar su estudio. Esta jerarquía se puede esquematizar del modo siguiente.

Sociedad → Institución → Disciplinas → Áreas → Sectores → Temas → Cuestiones

Esta sucesión de niveles de organización es *relativa* no sólo a la cuestión o grupo de cuestiones consideradas, sino también al periodo histórico y a la institución en la que nos situemos. Sin embargo, el hecho de que se construya esta jerarquía no garantiza la calidad del estudio de tales OM. Para que una cuestión matemática pueda estudiarse con "sentido" en una determinada Institución (por ejemplo, en la Universidad) es necesario que (Bosch, García, Gascón, Ruiz Higueras; 2006):

[2] Las organizaciones didácticas o praxeologías didácticas (OD) son respuesta a las cuestiones del tipo ¿Cómo estudiar una organización matemática? Por OD se entenderá pues, el conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías y de teorías movilizadas por profesores y alumnos, para el estudio concreto de una OM en una institución concreta. A diferencia de las OM, las OD están formadas por tareas y técnicas *cooperativas* en el sentido que requieren la cooperación de distintos actores que ocupan posiciones claramente diferentes: la posición del profesor y la de los alumnos (Bosch, Espinoza, Gascón, 2003). Así, se distingue entre la praxeología docente y la praxeología discente, respectivamente. A pesar de que una OD involucra "maneras propias de hacer" de cada profesor, existen praxelogías didácticas genéricas que no dependen tanto de los rasgos personales del docente sino que, provienen de construcciones colectivas e históricas que son propias de una determinada institución.

[3] Se entiende por *tecnología* un discurso racional sobre la técnica cuya principal función es justificar racionalmente la técnica, para asegurarse de que permita realizar las tareas. Una segunda función de la tecnología es la de explicar, aclarar la técnica, es decir, exponer por qué es correcta. Por último, un tercer objetivo de la tecnología corresponde a un empleo más actual del término: la función de producción de técnicas. A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la *teoría*, que retoma, en relación a

(1) Provenga de *cuestiones* que la Sociedad propone para que se estudien en la Institución (*legitimidad cultural o social*).
(2) Aparezca en ciertas *situaciones* “umbilicales” de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).
(3) *Conduzca a alguna parte*, esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Institución, sean matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*).

Si para una cuestión determinada no se construye una jerarquía, cumpliendo los postulados (1), (2) y (3), tal cuestión carece de *sentido* puesto que ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la Institución. En tal caso, se dice que es una cuestión encerrada en sí misma o una cuestión *“muerta”* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Los procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (Puntuales → Locales → Regionales) pueden evitar la pérdida de sentido de las OM partiendo del cuestionamiento de sus razones de ser. En este ámbito surgirán las cuestiones “cruciales” (para la comunidad de estudio) cuya respuesta deberá materializarse en una OM regional. En ocasiones, las cuestiones cruciales pueden tener un origen extra-matemático, pero en otros casos, puede ser de naturaleza intra-matemática (Bosch, García, Gascón, Ruiz Higueras; 2006)

En este trabajo, se propone una OM de referencia que, a nuestro juicio, cumple con las condiciones de (1) a (3) planteadas anteriormente. La importancia del cumplimiento de estas condiciones es que permiten que la OM de referencia sea viable y logre responder cuestiones con un sentido para la Institución en la cuál se desarrolla. En las secciones siguientes se describe de qué manera esta OM responde, a nuestro juicio, cada uno de los tipos de legitimidad.

3.1. El sentido de la noción de límite dentro de la propia matemática: legitimidad matemática.

El concepto fundamental sobre el cuál descansa la esencia del Análisis Matemático es el de *límite*. A menudo un número a se describe por medio de una sucesión infinita a_n de aproximaciones. Esto es, el valor a está dado por el valor a_n con el grado de precisión deseado, si el índice n se elige suficientemente grande. Se han encontrado *representaciones de números a como límites* de sucesiones. Por ejemplo, los números irracionales aparecen como límites, para n crecientes, de las sucesiones de fracciones decimales ordinarias con n dígitos. Por ejemplo, el número e se puede generar como el límite:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Así e es la notación para $\lim_{n\to\infty} S_n$, donde

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Para demostrar la existencia del límite e se requiere probar crecen monótonamente[4]. Otro ejemplo de números generados como límite de una sucesión, es el número π. Este proceso se remonta a la antigüedad clásica (Arquímedes). Se puede definir geométricamente al número π como el área de un círculo de radio uno. Sin embargo, esta definición no es de gran ayuda para los matemáticos si se desea calcular el número con toda precisión. Entonces, no se tiene más alternativa que la de representar el número por un proceso límite, a saber, como el límite de una sucesión de números conocidos y fácilmente calculados. Arquímedes utilizo este procedimiento en su método de exhaucción, el cuál consiste en aproximar el círculo por medio de polígonos regulares con un número creciente de lados, que se ajustan a él cada vez más. Si f_m denota el área del *m-ágono* (polígono de m lados) regular inscrito en el círculo, el área del *2m-ágono* con $n \geq 2$ inscrito está dada por la fórmula:

$$f_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{2 f_m}{m}\right)^2}}$$

Déjese recorrer ahora a m por la sucesión de potencias de 2, esto es, $m=2^n$. Así, los f_{2^n} forman una sucesión creciente y acotada, que tiene un límite, que es el área del círculo:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} f_{2^n}$$

En relación con esto, Charles Méray (1835-1911), puso de manifiesto que el hecho de definir un número irracional como el límite de una sucesión de números racionales, sin tener demasiado en cuenta que la existencia misma del límite, presupone una definición de los números reales y una construcción de éstos por números decimales. De esta manera, se acepta el sistema de números racionales con todas sus propiedades usuales, obtenidas de las propiedades básicas de lo números naturales. Así, los números racionales están ordenados por magnitud, permitiéndose definir intervalos “racionales”, como conjuntos de números racionales situados entre dos números racionales dados. La longitud del intervalo con puntos extremos a, b es $|b-a|$. Como es sabido, los números racionales son densos en el eje real y existen siempre números racionales entre dos números reales cualesquiera.

Una sucesión anidada, o encaje de intervalos racionales, es una sucesión de intervalos cerrados J_n con puntos extremos racionales a_n y b_n, con cada intervalo contenido en el precedente, cuyas longitudes forman una sucesión nula[5]:

$$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \text{ y } \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

Puesto que cada intervalo $J_n = [a_n, b_n]$ de un encaje contiene todos los intervalos subsiguientes, un número racional r

[4] La demostración de este límite puede verse en la obra de Courant R. (1979) “Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático” Volumen I. Pág. 101.

[5] Las aseveraciones en torno a límites pueden ser expresadas en

situado fuera de cualquier intervalo J_n está situado fuera y sobre el mismo lado de todos los intervalos subsiguientes. Así, un encaje de intervalos racionales da lugar a una separación de todos los números racionales en tres clases[6]. La primera clase consiste de los números racionales r situados a la izquierda de los intervalos J_n, para n suficientemente grande. La segunda clase consiste de los números racionales contenidos en los intervalos J_n. Esta clase contiene a lo sumo un número, puesto que la longitud del intervalo J_n se reduce a cero con n creciente. La tercera clase consiste de los números racionales a la derecha de los intervalos J_n.

Si la segunda clase no es vacía, consiste de un solo número racional r. En este caso, la primera clase consiste de los números racionales menores a r y la tercera clase, de los números racionales mayores que r. Se dice entonces que, el encaje de intervalos J_n representa un número racional r. En este caso, se considera al número real representado por esta separación como idéntico al número racional r. Si la segunda clase es vacía, el encaje no representa un número racional; estas sucesiones anidadas sirven entonces para representar números irracionales.

Los intervalos J_n no son importantes para este propósito, solamente la separación de los números racionales en tres clases, generada por esta sucesión es esencial, diciéndonos donde el número irracional encaja entre dos racionales. Habiendo construido los números reales, pueden definirse ahora las nociones de orden, suma, diferencia, producto, límite, etc., para éstos y probar que poseen las propiedades usuales. Los números reales hacen posible las operaciones límite con números racionales, pero sería de poco valor si las correspondientes operaciones de límite con los reales, requirieran la introducción de algún tipo adicional de números "no reales", que habrían de ser intercalados entre los reales y así sucesivamente. Afortunadamente, la definición de número real es tan amplia que no es posible ninguna extensión adicional del sistema numérico, sin deponer de sus propiedades esenciales (Courant, 1979).

La construcción de los números irracionales a partir del límite de sucesiones de números racionales y, por consiguiente, la construcción del conjunto de números reales, pone de manifiesto la legitimidad matemática de la noción de límite y de las cuestiones relacionadas con él.

3.2. El sentido de la noción de límite dentro del área de la economía y administración: legitimidad funcional

Es importante destacar que la noción central en economía y administración es la *derivada*. Esta noción se define a partir del límite, y por lo tanto, la legitimidad funcional del límite de funciones se relaciona directamente con la noción de *derivada*. En Economía se realizan constantemente análisis de mercado, de los cuáles se obtienen modelos de equilibrio parcial y/o general[7]. Los modelos de equilibrio simulan el comportamiento de un conjunto de empresas en determinadas situaciones económicas y permiten aproximar cantidades que van a producir y sus precios en situación de equilibrio de mercado. Para ello no sólo se necesitan las funciones de oferta y demanda de los productos sino también, toda la información relacionada con los procesos productivos de la empresa. En este sentido, la derivada permite analizar cómo se comportará el modelo si se realiza cualquier pequeña variación en alguno de sus parámetros y/o variables[8].

3.2.1. Equilibrio de mercado

Antes de profundizar en el análisis de mercado, es conveniente mencionar qué se entiende por equilibrio económico. Un equilibrio es "un conjunto de variables escogidas e interrelacionadas, ajustadas de tal manera entre sí que no prevalezca ninguna tendencia al cambio en el modelo que constituyen". El hecho de que un equilibrio no implique ninguna tendencia al cambio puede suponer que un estado de equilibrio constituye necesariamente un estado deseable. Tal conclusión es incierta. Aunque una cierta posición de equilibrio pueda representar un estado deseable, como por ejemplo una situación de máximo beneficio para una empresa; otra posición de equilibrio puede ser totalmente indeseable y por lo tanto, algo a evitar. Tal es el caso del nivel de equilibrio de la renta nacional con desempleo (Chiang, 1993).

En economía, un mercado está compuesto por oferentes y demandantes de un producto. Para analizar el funcionamiento de cualquier mercado se puede proceder de dos modos. A través de un análisis de equilibrio parcial o a través de un análisis de equilibrio general. El primero afirma que la actividad en un mercado es independiente de otros mercados, mientras que en el equilibrio general, se determinan los precios y las cantidades en todos los mercados simultáneamente y se tiene en cuenta el efecto de retroalimentación[9].

> Por ejemplo*: Consideremos el mercado del petróleo. Si se realiza un análisis de equilibrio parcial, se estará asumiendo que la demanda y el precio*[10] *del carbón (o de otros sustitutos del petróleo) no variarán al cambiar el precio del petróleo. En cambio, un análisis de equilibrio general tendrá en cuenta que una variación del precio del petróleo afectará al del carbón (vía una mayor demanda), que a su vez afectará al del*

---

[6] Denominada "Cortadura de Dedekind".

[8] En economía matemática, un modelo económico es una representación del funcionamiento pretendido de los diversos procesos de la economía, utilizando variables, que pueden ser exógenas o endógenas, y relaciones lógicas entre las mismas. Las variables endógenas se explican dentro del modelo económico a partir de sus relaciones con otras variables (que a su vez pueden ser endógenas o exógenas). Las variables exógenas están determinadas fuera del modelo, es decir, están predeterminadas, el modelo las toma como fijas y mantiene siempre el mismo valor.

[9] Este efecto es un proceso de ajuste del precio o la cantidad de un mercado por los ajustes del precio y de la cantidad de mercados relacionados con él.

[10] El precio al cuál se hace referencia en el ejemplo corresponde al precio de mercado. El precio de mercado es el precio al que un bien o servicio puede adquirirse en un mercado concreto y se

> *petróleo, que a su vez volverá a afectar al del carbón, etc.* (López, R.; 2007)

En definitiva, un equilibrio de mercado de un bien o producto abarca un precio del bien, una cantidad demandada por cada consumidor y una cantidad ofrecida por cada empresa tales que, al precio dado, cada consumidor consume la cantidad óptima, cada productor maximiza beneficios y la suma de cantidades demandadas iguala la suma de cantidades ofrecidas. Resumiendo, en un equilibrio, todos los agentes actúan óptimamente, y la oferta y la demanda coinciden.

Es importante mencionar que el precio de equilibrio de un bien depende de su oferta y demanda. A su vez, se pueden mencionar cuatro parámetros que afectan la demanda: los precios de otros bienes, la renta de los consumidores, las preferencias de éstos y el número de consumidores; y, tres parámetros que afectan a la oferta: los precios de los factores[11], la tecnología y el número de productores. De aquí, surge una cuestión importante: ¿Cómo afectará una variación de estos parámetros al precio de equilibrio? En algunos casos el efecto es obvio, pero en otros, no tanto. Esta pregunta abre el camino al estudio de la derivada de funciones ya que, la búsqueda de respuestas requiere estudiar el comportamiento de las funciones oferta y demanda, de acuerdo a cualquier pequeña variación que se realice en alguna de las variables y/o parámetros del modelo económico. Por consiguiente, resulta necesario estudiar el límite de funciones de una y más variables.

3.3. El sentido de la noción de límite para la sociedad: legitimidad cultural o social

Como es sabido, el cálculo trata de cambios infinitesimalmente pequeños de las variables dependientes e independientes. En términos matemáticos, tales variaciones se definen utilizando los conceptos de *límite y derivada*. Conceptos del tipo de límite matemático, se utilizan con frecuencia en razonamientos y explicaciones ajenos a la matemática. Por ejemplo, la producción máxima teórica de una máquina industrial o de una fábrica, es un "límite", es decir, el rendimiento ideal (o límite) que en la práctica nunca es alcanzable, pero al cual es posible aproximarse arbitrariamente. Esta misma idea se aplica al comportamiento de cualquier equipo mecánico o electrónico, para el cuál los ingenieros o electrónicos pueden calcular un funcionamiento ideal (o límite). Es aplicable también, por ejemplo, a las utilidades obtenibles en condiciones ideales, al rendimiento (kilómetros por litro) de la gasolina consumida en condiciones ideales, etc. En forma similar, hay límites inferiores de costo, desgaste, desperdicio, etc.

En la sociedad, por ejemplo, surgen muchas situaciones en que se desea maximizar o minimizar cierta cantidad de algún producto. Por ejemplo, el principio de optimización en los denominados modelos de costo de inventario. Este tipo de modelo se aplica a negocios tales como bodegas o mercados de venta al por menor, que mantienen existencias de artículos, que han de venderse al público o a otras empresas. La pregunta en estos casos es ¿qué tan grande debe ser cada vez la cantidad de algún artículo que se ordena con destino a ser realmacenado? Si se ordena una cantidad grande, la empresa se enfrentará con sustanciales costos de almacenamiento, si bien no tendrá la desventaja de reordenar por largo tiempo. Por otro lado, si sólo se ordena una pequeña cantidad cada vez, los costos de almacenamiento serán bajos, pero los costos de acomodar las órdenes, serán altos, dado que las órdenes deberán realizarse con frecuencia. Entre estos extremos se puede encontrar un tamaño óptimo de cada orden, que haga el costo total de almacenamiento más el de acomodo un mínimo. Este óptimo se denomina el *tamaño del lote económico*. (Arya, 1992).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, las OM relativas al límite de funciones pueden construir la secuencia (1), (2) y (3), las cuales garantizan la legitimidad social, matemática y funcional de las cuestiones matemáticas. Por tanto, el estudio de estas OM puede realizarse con sentido en la Institución en la cuál se desarrollan. Este sentido, tal como lo sostienen Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006), algunas veces puede ser intra-matemático, y en otras oportunidades, extra-matemático. En el caso que nos compete, la OM de referencia que se reconstruye y describe en la sección 5, responde a la cuestión de la derivabilidad de ciertas funciones, y tiene por tanto, un sentido intra-matemático. Este sentido surge de la concepción actual de modelización dentro del marco antropológico. A continuación se presenta brevemente el punto de vista de la TAD al respecto.

4. LA MODELIZACIÓN COMO CUESTIÓN CRUCIAL EN LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS

El concepto de modelización ha sido entendido de diversas maneras. Durante mucho tiempo ha sido concebido como la "aplicación" de una noción matemática a ciertas situaciones "reales", o la interpretación de un sistema axiomático que se produce al encontrar un modelo del mismo. Actualmente, la modelización se considera que va más allá de esta interpretación. Es entendida en un sentido más fructífero y funcional.

Al respecto, la TAD postula que "gran parte de la actividad matemática puede identificarse con *una actividad de modelización matemática*" Esto implica que la *modelización* no es sólo una dimensión de la actividad matemática sino que la actividad matemática es, en esencia, una *actividad de modelización*. Esta afirmación adquiere pleno sentido si, en primer lugar, la noción de *modelización* no queda limitada sólo a la "matematización" de situaciones extra-matemática, esto es, cuando la modelización intra-matemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de la matemática y, en segundo lugar, cuando se dote de un significado preciso a la *actividad de modelización* dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD (Chevallard,

---

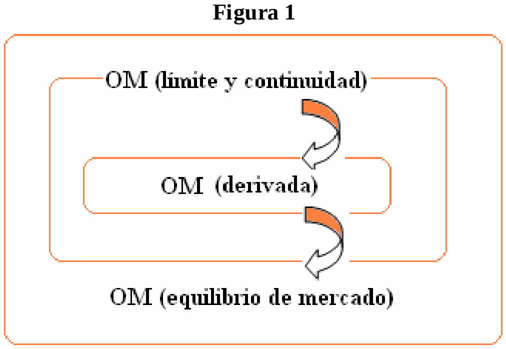
[11] En economía, los factores productivos o factores de producción son aquellos recursos, materiales o no, que al ser combinados en

reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente que debe tener su origen en el cuestionamiento de las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular. En este ámbito surgirán las *cuestiones cruciales* (para la comunidad de estudio) cuya respuesta se plasmará en una organización matemática regional. (Bosch, García, Gascón, Ruiz Higueras, 2006).

La OM de referencia que se reconstruye y presenta en este trabajo, como ya se mencionó en párrafos precedentes, responde a la cuestión de la *derivabilidad de ciertos tipos de funciones de variable real*. Esta cuestión, crucial para la Economía y la Administración, dota de sentido (intra-matemático) a las OM relativas al límite y la continuidad de funciones dentro de la Institución de análisis y, en particular, dentro de esa área, pues la derivabilidad de funciones es central a la hora de analizar modelos económicos que intentan simular el comportamiento de los mercados. Ahora bien, la noción de derivabilidad requiere y necesita del estudio de las OM en torno al límite de funciones. Emergen así, dos nuevas cuestiones cuyas respuestas se "materializan" en dos OM locales, que denominamos OM_1 y OM_2, respectivamente: *¿Por qué y cómo verificar la existencia o inexistencia del límite de funciones?* y *¿Por qué y cómo calcular un límite suponiendo que existe?*

Resulta apropiado aclarar aquí tres aspectos. Primero, en este trabajo se reconstruye y describe las OM relativas al límite y continuidad de funciones según el punto de vista de la TAD, es decir, articulando praxeologías de complejidad creciente. Por esto, se considera que el camino que se debe recorrer es el representado por la Figura 1:

Figura 1



Segundo, insistir en que la separación en dos OM locales, la OM_1 y la OM_2, se realiza sólo a los efectos de facilitar la descripción de la OM de referencia ya que, ambas OM son parte de un mismo género de tareas, el de *calcular*. La OM_1 tiene como cuestión central la de verificar la existencia de un límite. Esta cuestión, en cierto modo, también es una forma de "calcular" pues verificar es un cómputo que se realiza por medio de operaciones matemáticas. Por lo tanto, insistimos en que, esta separación entre las dos OM locales se realiza a los efectos de facilitar la reconstrucción y descripción de la OM de referencia. Se considera como punto de separación el énfasis puesto en cada OM respecto al rol que desempeña la definición usual del límite de funciones.

Y tercero, en la descripción presentada en anexos, podrá advertirse que la OM de referencia está fundamentada sólo en aspectos formales del límite y la continuidad de funciones, sin explicitar allí tipos de tareas o tareas relativas a la Economía y la Administración. Por lo tanto, vale la siguiente aclaración: tal como lo sostiene Bosch (En comunicación personal, 2007) la OM de referencia se trata siempre de la OM sabia y puede ser reconstruida (con algunos procesos de transposición) en otra Institución. Ahora bien, el lector podría entonces preguntarse ¿cuál es el rol del área en la reconstrucción y propuesta de cualquier OM? La respuesta a esta pregunta puede hallarse en los últimos resultados obtenidos por Chevallard (2005, 2006, 2007).

En desarrollos recientes de la TAD, Chevallard ha introducido la noción de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) como un modelo general o referente más amplio para analizar y diseñar los procesos de estudio. Un REI se genera por una cuestión "viva y rica" con un fuerte poder generador (denominada cuestión generatriz), es decir, capaz de imponer numerosas cuestiones derivadas. Esta cuestión ha de ser estudiada en un sentido fuerte y la respuesta no puede limitarse a una simple información. Requiere la construcción de una OM. Considerando estos supuestos teóricos, el rol del área en la reconstrucción de cierta OM es el de hábitat de las cuestiones que se deberán responder. Es decir, la cuestión generatriz de un posible REI nace en el área y ésta dota de sentido el estudio y (re)construcción de cierta OM.

5. RECONSTRUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE REFERENCIA RELATIVA AL LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES PARA LA ECONOMÍA Y LA ADMINISTRACIÓN

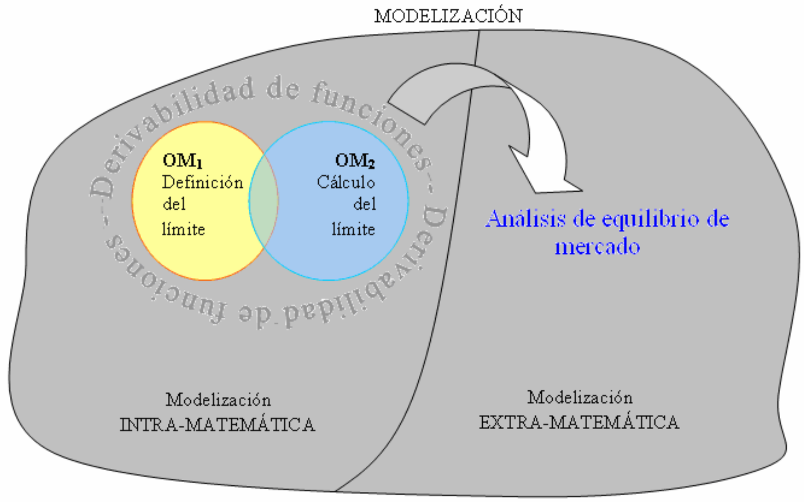
Como se mencionó anteriormente, una OM regional se encuentra constituida por OM locales articuladas entre sí por una tecnología común. En el caso de la OM regional que aquí se propone y se describe, el discurso articulador de la OM_1 y la OM_2 es el de la teoría de la construcción de los números reales, en donde es relevante, entre otros, la noción de sucesión. Pero, su inclusión explícita en ciertos cursos de Cálculo va a depender del caso. La OM que aquí se propone y se caracteriza prescinde del tratamiento de sucesiones como tema de estudio explícito puesto que, tanto las OM propuestas para enseñar como la OM efectivamente reconstruida en el aula no contienen ningún tipo de tareas asociado a la noción de sucesión. No obstante, los aspectos variacionales y aproximativos que sí se estudian a través de la aproximación numérica del límite, introducen implícitamente la noción de sucesión numérica. A continuación se describen brevemente las dos OM locales que componen nuestra OM de referencia:

- OM_1: Esta OM se construye alrededor de la definición usual del límite y continuidad de funciones reales. La cuestión generatriz es la existencia del límite de una determinada función en un cierto conjunto de puntos y/o cuando éste coincide con la función evaluada en dicho

- OM_2: Esta OM gira en torno al álgebra del límite y su cuestión generatriz es por qué y cómo calcular el límite, habiendo establecido que existe. La tecnología de esta segunda OM es el conjunto de las propiedades del límite de funciones.

El Esquema 2 representa la estructura de nuestra OM de referencia, que luego se describirá detalladamente.

Esquema 2



5.1. La OM local en torno a la definición del límite: OM_1

Antes de mencionar los diferentes tipos de tareas y las tecnologías que componen esta OM, se describe la notación utilizada para ello:

$\mathbf{T_{1.n}}$: Tipo de tareas **n** correspondiente a la $\mathbf{OM_1}$.
$\boldsymbol{\theta_{1.n}}$: Elemento tecnológico asociado al tipo de tareas **n** correspondiente a la $\mathbf{OM_1}$.

La $\mathbf{OM_1}$ es una organización local construida alrededor de la definición del límite de funciones. La cuestión generatriz de esta OM se refiere a la existencia y unicidad del límite de funciones. Los tipos de tareas que componen la $\mathbf{OM_1}$ son:

$\mathbf{T_{1.1}}$: Verificar la existencia o la inexistencia del límite finito de una función real *f* de una variable en un punto.
$\mathbf{T_{1.2}}$: Verificar la existencia o la inexistencia de límites infinitos y de límites en el infinito de una función real *f* de una variable.
$\mathbf{T_{1.3}}$: Verificar la existencia o la inexistencia del límite finito de una función real *f* de dos variables en un punto del plano o en un subconjunto de puntos.
$\mathbf{T_{1.4}}$: Verificar la continuidad o discontinuidad de una función real *f* de una variable en un punto o en un subconjunto de puntos.
$\mathbf{T_{1.5}}$: Verificar la continuidad o discontinuidad de una función real *f* de dos variables en un punto del plano o en un subconjunto de puntos.
$\mathbf{T_{1.6}}$: Verificar las propiedades del límite y de la continuidad de funciones reales *f* de una y dos variables.

Respecto a los elementos tecnológicos-teóricos de la OM_1, que se encuentran detallados en el Anexo 1, para el $\mathbf{T_{1.1}}$ la

términos de ε y δ, el teorema de unicidad, y el teorema que relaciona el límite con los límites laterales. Una posible técnica para determinar la existencia o inexistencia del límite de una función *f* de una variable en un punto es el cálculo de los límites laterales. En el caso en que ambos límites resulten diferentes, se asegura que el límite de la función *f* no existe y así, queda demostrada su inexistencia. En el caso en que ambos límites sean iguales a un valor *L*, finito, el límite de la función *f* en ese punto existe y debe verificarse a través de la definición del límite en términos de ε y δ, que efectivamente vale *L*. Como se verá más adelante, esto muestra una conexión entre la OM_1 y a OM_2, pues, el cálculo de límites laterales es una tarea propia de la OM_2 y aquí, en la OM_1, sirve de técnica matemática asociada a un tipo de tareas.

Para $\mathbf{T_{1.2}}$, la tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{1.2}}$) es el conjunto de definiciones de los diferentes tipos de límites infinitos y, de límites en el infinito. Esto es, cuando el valor del límite resulta ser infinito y, cuando la variable independiente tiende a infinito.

En $\mathbf{T_{1.3}}$, las técnicas matemáticas se asocian al cálculo de los límites sucesivos y direccionales. De esta manera, si entre estos límites, se identifican valores diferentes, se demuestra de inmediato que el límite doble no existe. Debido a que existen infinitos caminos por los cuales acercarse a un punto, resulta que, cuando estos límites coinciden en el resultado *L*, no se puede asegurar que el límite doble exista y valga *L*. Pues, podría existir algún camino, que no se consideró, por el cuál el límite dé un valor diferente de *L*. En este caso, se dice que, "de existir, el límite doble, vale *L*". La tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{1.3}}$) necesaria para justificar las técnicas de este tipo es el conjunto de teoremas que relacionan los distintos límites y la definición de los mismos.

El $\mathbf{T_{1.4}}$ y $\mathbf{T_{1.5}}$, se refieren a verificar la continuidad o discontinuidad de funciones de una y dos variables, respectivamente. A partir de las condiciones de continuidad para funciones de una y dos variables, se puede determinar si la función es continua o no en un punto determinado. Una vez analizada la continuidad, debe demostrarse cualquiera de los dos resultados. La tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{1.4}}$ y $\boldsymbol{\theta_{1.5}}$, respectivamente) para ello es la definición de continuidad en términos de límite de la función.

Finalmente, el tipo de tareas $\mathbf{T_{16}}$ se refiere a las demostraciones de las propiedades del límite y de la continuidad. Esto es, verificar que el límite de una suma, resta, producto, cociente, composición de funciones (tanto de una como de dos variables) es la suma, resta, producto, cociente, composición de los límites de las funciones. Además, deben demostrarse las propiedades de las funciones continuas. La definición del límite es la tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{1.6}}$) para este tipo de tareas.

5.2. La OM local en torno al álgebra del límite: OM_2

De manera similar que en la OM_1, la notación utilizada en esta OM para enumerar los tipos de tareas y las tecnologías, es la siguiente:

$\mathbf{T_{2.k}}$: Tipo de tareas **k** correspondiente a la $\mathbf{OM_2}$.
$\boldsymbol{\theta_{2.k}}$: Elemento tecnológico asociado al tipo de tareas **k** correspondiente a la $\mathbf{OM_2}$.

La $\mathbf{OM_2}$ es una organización local referida al álgebra del límite de funciones. Esta OM responde a la cuestión relativa a por qué y cómo calcular o determinar el límite de funciones. Los tipos de tareas que forman parte de la $\mathbf{OM_2}$ son los siguientes:

$\mathbf{T_{2.1}}$: Calcular el límite de una función real f de una variable en un punto.
$\mathbf{T_{2.2}}$: Calcular el límite de una función real f de una variable en el infinito.
$\mathbf{T_{2.3}}$: Estimar límites de una función real f de una variable en un punto.
$\mathbf{T_{2.4}}$: Calcular el límite de una función real f de dos variables en un punto de plano.
$\mathbf{T_{2.5}}$: Calcular límites sucesivos de una función real f de dos variables.
$\mathbf{T_{2.6}}$: Calcular límites direccionales una función real f de dos variables.
$\mathbf{T_{2.7}}$: Determinar puntos o conjuntos de continuidad o discontinuidad de una función real f de una variable.
$\mathbf{T_{2.8}}$: Determinar puntos o conjuntos de continuidad o discontinuidad de una función real f de dos variables.

Respecto a los elementos tecnológicos-teóricos de la OM_2, que se detallan en Anexo 2, la tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{2.1}}$) de $\mathbf{T_{2.1}}$ está asociada a las propiedades del límite de funciones cuando la variable independiente tiende a un valor finito. Es decir, está en correspondencia con $\mathbf{T_{1.6}}$. En $\mathbf{T_{2.1}}$ se considera sólo el caso en el que los límites resultan ser finitos, en símbolos: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (L finito) y se

Para resolver una tarea de este tipo, se podría proceder de diversas maneras. Por un lado, se puede calcular el límite utilizando únicamente propiedades. Por otro lado, la noción de continuidad podría servir como técnica matemática para el cálculo. De esta manera, basta con analizar la continuidad de la función en el punto en torno al cuál se estudia el límite, y en caso de resultar continua, resolver dicho límite por reemplazo directo. Así, a partir de la continuidad de la función, se puede utilizar la técnica de evaluar la función en el punto. Si la función no resulta ser continua, entonces se opera a partir de las propiedades del límite.

Se puede además, aproximar un límite en forma numérica, es decir, utilizando una estrategia variacional. Esto es, calcular el valor numérico de la función para valores cercanos al punto en cual se desea conocer el límite, tanto a derecha como a izquierda. Esta forma no permite afirmar que el límite correspondiente es el que se aproximó. Probar que efectivamente ese es el límite es una tarea de la OM_1.

La tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{2.2}}$) de $\mathbf{T_{2.2}}$ es el conjunto de propiedades de los límites infinitos y/o en el infinito. El tipo de tareas $\mathbf{T_{2.3}}$ corresponde a estimar límites de funciones reales de una variable en torno a un punto. Para ello entonces, la tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{2.3}}$) es el conjunto formado por todas las operaciones posibles en el conjunto de números reales y sus respectivas propiedades. Esta tecnología no se detalla en anexo pues, deberíamos enumerar cada una de las operaciones y cada una de las propiedades.

Para $\mathbf{T_{2.4}}$, la tecnología correspondiente ($\boldsymbol{\theta_{2.4}}$) es el conjunto de propiedades del límite para funciones de dos variables cuando ambas variables tienden, en simultáneo, a valores a y b, ambos finitos. Estas propiedades, al igual que para funciones de una variable, se demuestran usando la definición formal del límite doble. Para $\mathbf{T_{2.5}}$, la tecnología mínima ($\boldsymbol{\theta_{2.5}}$) es el conjunto de definiciones y propiedades de los límites sucesivos y para $\mathbf{T_{2.6}}$, es el conjunto de definiciones y propiedades de los límites direccionales ($\boldsymbol{\theta_{2.6}}$).

A la hora de estudiar el límite de una función de dos variables, los límites restringidos así como los límites sucesivos son una herramienta que permite simplificar el cálculo al cálculo (valga la redundancia) de un límite en una variable. Es típico considerar conjuntos del tipo rectas, parábolas y en general curvas de la forma $(x, g(x))$ o $(h(y),y)$. Una situación especial es el caso de los límites a través de rectas que contienen al punto, denominados también límites direccionales. Estas rectas tienen la forma $y - b = m(x - a)$, junto con la recta vertical $x = a$.

La tecnología de $\mathbf{T_{2.7}}$ ($\boldsymbol{\theta_{2.7}}$) esta formada por el conjunto de propiedades y casos de funciones continuas en un punto o en un subconjunto del dominio, y de las definiciones de los distintos tipos de discontinuidad. La teoría del límite de funciones permite justificar cada una de estas técnicas. Así, a través de la definición y propiedades del límite funcional pueden justificarse las propiedades de las funciones continuas y éstas se establecen sobre la base de la

La tecnología mínima de $\mathbf{T_{2.8}}$ ($\boldsymbol{\theta_{2.8}}$), es el conjunto de propiedades de las funciones reales de dos variables y las definiciones de los distintos tipos de discontinuidad en un punto o en un subconjunto del dominio. La teoría del límite de funciones en varias variables justifica esta tecnología.

5.3. Aspectos a destacar entre la OM_1 y la OM_2.

Debemos recordar que la separación en dos OM locales se realizó sólo a los efectos de facilitar la reconstrucción y descripción de la OM de referencia y, por lo tanto, hay componentes que pueden estar tanto en una OM como en la otra. Por ejemplo, un mismo tipo de tareas, tiene el estatus de técnica matemática en una OM mientras que, en la otra, es una tarea. Algunos casos son los siguientes:

- ✓ El cálculo de límites laterales es una tarea propia de la OM_2 mientras que en la OM_1, sirve de técnica matemática asociada a un tipo de tareas, el de determinar la existencia o inexistencia del límite de funciones reales en un punto.

- ✓ En la OM_1 se demuestran las propiedades que en la OM_2 tienen el estatus de tecnología. Es decir, la demostración de las propiedades del límite de funciones es una tarea propia de una OM, mientras que, en otra sirve de tecnología.

- ✓ La aproximación de un límite a partir del gráfico de una función o la aproximación numérica, es una tarea de la OM_2, mientras que, probar que efectivamente el límite es el valor aproximado, es una tarea propia de la OM_1.
- ✓ Las técnicas matemáticas y la tecnología asociada al cálculo de límites de funciones reales de una variable, forman parte de las técnicas y tecnología de los tipos de tareas referidos a funciones reales de dos variables. De hecho, el cálculo de límites sucesivos se reduce al cálculo de límites en una variable y por tanto, se utilizan todas las propiedades válidas para este caso (el de una variable).

6. CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo reconstruimos y describimos una OM de referencia relativa a las nociones de límite y continuidad de funciones, detallando cada uno de los componentes practico-técnicos y tecnológico-teóricos. Esta OM (regional) integra dos OM locales articuladas entre sí donde cada una de ellas responde a una cuestión generatriz y, en conjunto, a la *derivabilidad de funciones reales*, siendo esta una *noción crucial* para la comunidad de estudio de las Ciencias Económicas. Cualquier modelo del análisis de mercado tiene como eje central la noción de intensidad de variación o tasa de cambio, esto es, la derivada.
La reconstrucción de esta OM de referencia y su descripción minuciosa es necesaria pues permite trazar un "mapa" de recorridos posibles - relativos al estudio de una determinada cuestión - en una institución de enseñanza. En este sentido, Chevallard (2005, 2006, 2007) introduce la noción de *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) como un dispositivo didáctico capaz de hacer "vivir" la modelización matemática, entendida según el punto de vista de la TAD, en los sistemas de enseñanza. Un REI parte de una cuestión generatriz, la cuál sirve de hilo conductor de todo el proceso de estudio pues genera preguntas que deben responderse, no dando una simple información, sino que requieren la reconstrucción de una praxeología o un conjunto de éstas.

Actualmente nos encontramos en una instancia de decisión respecto a qué cuestiones serán las más fecundas y vivas para dar origen a un posible REI que permita reconstruir las OM relativas al límite y continuidad de funciones en un curso de cálculo del área "Economía y Administración". Es decir, qué preguntas tendrán sentido y razón de ser dentro de esta área. Consideramos vital retomar cuestiones del tipo ¿Por qué y para qué el análisis de funciones? ¿Por qué y para qué el límite de funciones? ¿Por qué y para qué la derivada en Economía y Administración? Tales interrogantes son importantes en cualquier área, pero a nuestro juicio, más aún en aquellas donde la Matemática tiene más bien un estatus de herramienta que de objeto de estudio.

REFERENCIAS

Arya C. (1992) *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. Tercera Edición. Departamento de Matemática, Simon Fraser University.

Barbé, J.; Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2005), Didactic Restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high school, Educational Studies in Mathematics, Vol.59, pp. 235-268.

Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003) *El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 23 (1), 79 -135.
articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Educación Matemática, 18 (2), 37-74.

Bosch, M.; Gascón, J. (2006). *Twenty-Five Years of the Didactic Transposition*. Disponible en http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Chevallard, Y. (1999) *L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y (2001) *Aspectos problemáticos de la formación docente*. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2005) *Didactique et formation des enseignants*, in B. David (éd.), Impulsions 4, Lyon, INRP, 215-231.

Chevallard, Y. (2006) *La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain*. Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Baeza (España). Disponible en http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Chevallard, I., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona, Spain: ICE/Horsori*.

Chiang A. (1993) Métodos fundamentales de economía matemática. Tercera Edición. Editorial Mc Graw Hill.

Courant, R. (1979) *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Volumen I. Editorial Limusa.

Lopez, R. (2007) Apuntes de la cátedra Organización Industrial II. Maestría en Economía. Universidad Autónoma de Madrid (UAM).

Parra, V. (2008) *Praxeologías Matemáticas y Didácticas en la Universidad: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones*. Tesis de Licenciatura en Educación Matemática (Sin publicar). Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina.

Parra, V; Otero, M. R. (2007) *Organizaciones Matemáticas en la Universidad en torno a las nociones de límite y continuidad de funciones: un estudio de caso*. Revista Electrónica de Educación en Ciencias. Vol. 2 (2), pp. 20-28. ISSN 1850 – 6666.

Parra, V; Otero, M. R. (2008) *Praxeologías Didácticas en la Universidad: Un estudio de caso relativo al Límite y Continuidad de funciones*. Enviado y en proceso de referato. Revista Zetetiké. UNICAMP-Faculdade de Educação-CEMPEM.

Anexo 1: Elementos tecnológicos-teóricos correspondientes a la OM$_1$

$\theta_{1.1}$: Definición del límite en términos de ε y δ, el teorema de unicidad, y el teorema que relaciona el límite con los límites laterales:

Definición 1.1.1: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite L en el punto a, y se escribe: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (ó equivalentemente $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para cada x tal que $0 < |x-a| < \delta$ (ó equivalentemente para $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$).

Teorema 1.1.1: Sea f una función real de una variable definida en todo intervalo real (x_1, x_2) salvo quizás en $a \in (x_1, x_2)$. Si L_1 y L_2 tienen las propiedades siguientes: $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ entonces, debe ser $L_1 = L_2$.

Definición 1.1.2: Sea f una función real de una variable definida en algún intervalo (a, x_2). Entonces, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por derecha es L_1 y se escribe: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

Definición 1.1.3: Sea f una función real de una variable definida en algún intervalo (x_1, a). Entonces, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por izquierda es L_2 y se escribe: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que si $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Teorema 1.1.2: Sea f una función real de una variable definida en un intervalo abierto (x_1, x_2) salvo quizás en $a \in (x_1, x_2)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$(i) \lim_{x\to a} f(x) = L$

$(ii) \lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$

El embrión[12] de tecnología de **T$_{1.2}$**, está dada por el conjunto de definiciones de los diferentes tipos de límites infinitos y, de límites en el infinito. Esto es, cuando el valor del límite resulta ser infinito y, cuando la variable independiente tiende a infinito.

$\theta_{1.2}$: Definiciones de límites infinitos y de límites en el infinito.

Definición 1.2.1: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite $+\infty$ en el punto a si para cada número real M existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x)$>M siempre que x verifique $0 < |x-a| < \delta$. En este caso se dirá que la función f crece infinitamente o tiende a infinito o tiene límite infinito cuando x tiende a a, lo que se indica $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Definición 1.2.2: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite $-\infty$ en el punto a cuando $\lim_{x\to a}[-f(x)] = +\infty$ y se notará $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Definición 1.2.3: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite ∞ sin signo determinado en el punto a si para cada número real M existe un número $\delta > 0$ tal que: $|f(x)| > M$ siempre que x verifique $0 < |x-a| < \delta$ y se notará $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

En ocasiones interesa conocer el comportamiento de una función, no cuando x se aproxima a un valor a, sino cuando x crece indefinidamente. En este caso, se dice que los límites se estudian en el infinito.

Definición 1.2.4: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite en el $+\infty$ si para cada ε>0 existe un número real H tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x>H. Se notará $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Definición 1.2.5: Análogamente se dirá que la función real de una variable f tiene límite en el $-\infty$ si para cada ε>0 existe un número real H tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x < H. Se notará $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Definición 1.2.6: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite en el ∞, sin un signo determinado si para cada ε>0 existe un número real H tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $|x| > H$. Se escribirá $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Conviene aclarar que la demostración de la existencia o inexistencia de límites podría llevarse a cabo a través de sucesiones. Como se decidió prescindir de las sucesiones, se utilizan las definiciones de los límites infinitos para verificar la existencia o inexistencia del mismo.

$\theta_{1.3}$: La tecnología necesaria para justificar las técnicas es el conjunto de teoremas que relacionan los distintos límites y la definición de los mismos:

Definición 1.3.1: Se dice que una función real f de dos variables tiende al límite L en el punto *(a, b)*, o que tiene límite L, cuando para cada número positivo ε, existe otro número positivo δ tal que para todos los puntos del entorno reducido $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, ó bien $\begin{cases} |x-a| < \delta, \quad |y-b| < \delta \\ (x,y) \neq (a,b) \end{cases}$, se verifica $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Se escribirá $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Definición 1.3.2: Se definen los límites reiterados o sucesivos como sigue:

$L_1 = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{y\to b} \left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] = \lim_{y\to b} \varphi(y)$

$L_2 = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to a} \left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim_{x\to a} \Psi(x)$

Teorema 1.3.1: Si existen el límite doble y los sucesivos, todos ellos son iguales.

---

[12] Se entiende por "embrión" a la tecnología mínima necesaria para justificar las técnicas. Un "embrión de tecnología" forma parte de una tecnología más amplia. Por ejemplo, θ_{27} es parte de una tecnología más amplia formada por el conjunto de propiedades y casos de funciones de n variables continuas en un punto o en un subconjunto del dominio. Chevallard (1999) sostiene al respecto que "*en una Institución I, cualquiera que sea el tipo de tareas T, la técnica τ relativa a T está siempre*

a) Si no existe ninguno de los reiterados: el límite doble puede existir o no existir y no se dispone de información sobre él.
b) Si existe sólo uno de los reiterados y su valor es L: el límite doble puede existir o no existir pero en el caso de que exista, valdrá L.
c) Si existen los dos reiterados:
(i) si ambos tienen el mismo valor L: el límite doble puede existir o no existir pero si existe tomará el valor L;
(ii) si los reiterados tienen distinto valor: el límite doble no existe.

$\theta_{1.4}$: Definición de continuidad en términos del límite de la función:

Definición 1.4.1: Una función real f de una variable se dirá continua en un punto a cuando se verifique $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Es importante remarcar que la definición anterior implica la existencia de la función en el punto a, la existencia del límite en dicho punto, y la coincidencia de ambos valores.

$\theta_{1.5}$: Definición de continuidad en términos del límite de la función:

Definición 1.5.1: Una función real f de dos variables se dirá continua en un punto del plano (a,b) cuando se verifique $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Nuevamente aquí es importante remarcar que la definición anterior implica la existencia de la función en el punto (a,b), la existencia del límite en dicho punto, y la coincidencia de ambos valores.

$\theta_{1.6}$: Definición del límite de funciones reales de una y dos variables.

Definición 1.6.1: Se dirá que la función real de una variable f tiene límite L en el punto a, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (ó equivalentemente $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para cada x tal que $0 < |x-a| < \delta$ (ó equivalentemente para $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$).

Definición 1.6.2: Ver definición 1.3.1.

Anexo 2: Elementos tecnológicos-teóricos correspondientes a la OM_2

$\theta_{2.1}$: Casos y propiedades que sirven al cálculo del límite de funciones de una variable cuando *x* tiende a un valor finito:

Caso 2.1.1: El límite de una función real *f* constante es la misma constante. Es decir, si $f(x)=c$, para cada *x*, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=c$, para todo *a*.

Caso 2.1.2: El límite de la función identidad en un punto es el mismo punto. Es decir, $\lim_{x\to a} x=a.$

Caso 2.1.3: El límite de la *n*-ésima potencia de una función real *f* es igual a la n-ésima potencia del límite, siempre que el límite sea finito. Es decir, si $\lim_{x\to a} f(x)=L$, con *L* finito, entonces $\lim_{x\to a} f(x)^n=L^n$ para *n* un número entero positivo.

Caso 2.1.4: El límite de la raíz *n*-ésima de una función real *f* es igual a la raíz *n*-ésima del límite, siempre que si *n* es par, debe ser *L*>0. Es decir, si *n* es un entero positivo y $\lim_{x\to a} f(x)=L$, entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ con la restricción de que si *n* es par, debe ser *L*>0.

Caso 2.1.5: $\lim_{x\to 0} \dfrac{Sen(x)}{x}=1.$

Propiedad 2.1.1: Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable. Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to L} g(x)=M$, entonces $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=M$.

Propiedad 2.1.2: Sean *f*, *g* y *h* funciones reales de una variable. Si $\lim_{x\to a} f(x)=L=\lim_{x\to a} g(x)$ y si existe $\delta>0$ tal que $f(x)\le h(x)\le g(x)$ para todo $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} h(x)=L$.

Propiedad 2.1.3: Una suma algebraica (un producto) de varias funciones con límites finitos tiene como límite la suma algebraica correspondiente (el producto) de los límites de esas funciones. Es decir, si $\lim_{x\to a} f_i(x)=l_i$, para *i* = 1, 2, 3…n, con l_i finito para todo *i*, entonces $\lim_{x\to a}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=\sum_{i=1}^{n} L_i$ $\left(\lim_{x\to a}\prod_{i=1}^{n} f_i(x)=\prod_{i=1}^{n} L_i\right)$

Propiedad 2.1.4: El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero. Es decir, si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ y $\lim_{x\to a} g(x)=l'\neq 0$, con *l* y *l'* ambos finitos, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{l'}$.

Propiedad 2.1.5: Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{sen(f(x))}{f(x)}=1.$

Estas propiedades se demuestran utilizando la definición formal de límite haciendo que las pruebas de estas propiedades formen parte de las tareas de la OM_1.

Por definición, una función continua en un punto *a*, implica que el valor del límite, cuando *x* tiende a ese punto, sea igual a la función evaluada en el punto.

$\theta_{2.2}$: Casos y propiedades del límite infinito y/o en el

Caso 2.2.1: Si 0<*a*<1 entonces, $\lim_{x\to+\infty} a^x=0$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty.$

Caso 2.2.2: Si 1<*a* entonces, $\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty.$

Caso 2.2.3: $\lim_{x\to\infty} x=\infty.$

Caso 2.2.4: Si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ entonces $\lim_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$

Caso 2.2.5: Si *a*>1 entonces $\lim_{x\to+\infty}\log_x a=+\infty$ y $\lim_{x\to 0^+}\log_x^a=-\infty.$

Caso 2.2.6: Si 0<*a*<1 entonces $\lim_{x\to+\infty}\log_x^a=0$ y $\lim_{x\to 0^+}\log_x^a=+\infty$.

Propiedad 2.2.1: Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable. Si $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, entonces $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=L.$

Propiedad 2.2.2: Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable. Si $\lim_{x\to\infty} g(x)=L$ y $\lim_{x\to L} f(x)=M$, entonces $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=L.$

Propiedad 2.2.3: Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable. Si $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)=\infty$.

Las propiedades 1, 2 y 3 son válidas si se reemplaza ∞ por $+\infty$ ó $-\infty$.

Propiedad 2.2.4: $\lim_{x\to a} g(x)=0$ si y sólo si $\lim_{x\to s}\dfrac{1}{g(x)}=\infty$ si existe $\delta>0$ tal que $g(x)\neq 0$, para todo $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$

Propiedad 2.2.5: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to L} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=\infty.$

Propiedad 2.2.6: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\infty$.

Propiedad 2.2.7: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces:

(i) Si *L* >0, entonces $\lim_{x\to a}(f.g)(x)=+\infty$,

(iii) Si *L* <0, entonces $\lim_{x\to a}(f.g)(x)=-\infty$.

Corolario 2.2.1: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, entonces:

(i) Si *L* >0, entonces $\lim_{x\to a}(f.g)(x)=-\infty$,

(iii) Si *L* <0, entonces $\lim_{x\to a}(f.g)(x)=+\infty$.

Propiedad 2.2.8: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L>1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=+\infty$.

Propiedad 2.2.9: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$, 0<*L*<1 y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=0$.

Propiedad 2.2.10: Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=L$, entonces:

(i) Si *L*>0 y si existe $\delta>0$ tal que *f*(*x*) > 0 para todo $x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

(ii) Si $L>0$ y si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

(iii) Si $L<0$ y si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

(iv) Si $L<0$ y si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

Estas propiedades son válidas si se consideran los límites laterales.

<u>Proposición 2.2.1</u>: Si existe un número real a tal que para todo $x \in (a,+\infty)$ se verifica $f(x) = g(x)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Estas propiedades se prueban utilizando la definición formal de límite de funciones reales.

$\theta_{2.4}$: Casos y propiedades del límite de funciones de dos variables cuando (x, y) tiende al par (a, b).

<u>Caso 2.4.1:</u> El límite de una función real f constante es la misma constante. Es decir, si $f(x,y) = c$, para cada (x, y), entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$, para todo (a,b).

<u>Caso 2.4.2:</u> $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = a+b$.

<u>Caso 2.4.3:</u> El límite de la n-ésima potencia de una función real f de dos variables es igual a la n-ésima potencia del límite, siempre que el límite sea finito. Es decir, si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, con L finito, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)^n = L^n$ para n un número entero positivo.

<u>Caso 2.4.4:</u> El límite de la raíz n-ésima de una función real f es igual a la raíz n-ésima del límite, siempre que si n es par, debe ser $L>0$. Es decir, si n es un entero positivo y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ con la restricción de que si n es par, debe ser $L>0$.

<u>Propiedad 2.4.1</u>: Sean f, g y h funciones reales de dos variables. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ y si existe un entorno reducido del punto (a,b) tal que $f(x,y) \le h(x,y) \le g(x,y)$ para todo (x, y) del entorno reducido, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$.

<u>Propiedad 2.4.2</u>: Una suma algebraica (un producto) de varias funciones con límites finitos tiene como límite la suma algebraica correspondiente (el producto) de los límites de esas funciones. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_i(x,y) = L_i$, para i = 1, 2, 3…n, con l_i finito para todo i, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y) = \sum_{i=1}^{n} L_i$ $\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x,y) = \prod_{i=1}^{n} L_i \right)$

<u>Propiedad 2.4.3</u>: El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L'$, ambos finitos, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{L'}$ siempre que $L' \neq 0$.

Estas propiedades, al igual que para funciones de una variable, se demuestran usando la definición formal del límite doble.

$\theta_{2.5}$: Definición y propiedades de los límites sucesivos:

<u>Definición 2.5.1</u>: Dada una función real f de dos variables y (a,b) un punto del plano si existe $\delta > 0$ tal que cumplen:

(i) Para cada $c \in (a-\delta, a+\delta) - a$ existe el $\lim_{x\to a} f(x,c) = \varphi(c)$

(ii) Existe $\lim_{c\to b} \varphi(c) = L$.

Entonces se dirá que existe un limite sucesivo y se nota $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y) = L$. El límite sucesivo $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y)$ se define de manera análoga.

<u>Propiedad 2.5.1</u>: Las propiedades citadas en $\boldsymbol{\theta_{21}}$ para el cálculo de límites de funciones reales de una variable se aplican al cálculo de límites sucesivos.

La propiedad 2.5.1 es un resultado directo del hecho de que en la definición de los límites sucesivos sólo interviene la noción de límite de funciones de una variable. Por tanto técnicas matemáticas asociadas a este tipo de tareas son derivaciones de las propiedades descriptas en $\boldsymbol{\theta_{21}}$.

$\theta_{2.6}$: Definición y propiedades de los límites direccionales:

<u>Definición 2.6.1</u>: Dada una función real f de dos variables, (a,b) un punto del plano y una función $g: R \to R^2$ tal que $g(x_0) = (a,b)$, si existe $\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = L$ se dirá que la función f tiene limite L restringida a la región del plano determinada por el grafico de g, usualmente llamada curva.

<u>Propiedad 2.6.1</u>: Las propiedades citadas en $\boldsymbol{\theta_{21}}$ para el cálculo de límites de funciones reales de una variable se aplican al cálculo de límites restringidos a curvas.

A la hora de estudiar el límite de una función de dos variables, los límites restringidos así como los límites sucesivos brindan una herramienta que permite simplificar el cálculo al cálculo de un límite en una variable. Es típico considerar conjuntos del tipo rectas, parábolas y en general curvas de la forma $(x,g(x))$ o $(h(y),y)$. Una situación especial es el caso de los límites a través de rectas que contienen al punto, denominados también límites direccionales. Estas rectas tienen la forma $y - b = m(x - a)$, junto con la recta vertical $x = a$.

$\theta_{2.7}$: Casos y propiedades de las funciones continuas en un punto o en un subconjunto del dominio y definiciones de los distintos tipos de discontinuidad:

<u>Caso 2.7.1</u>: Toda función polinómica es continua.

<u>Caso 2.7.2</u>: La función $\ln: R_{>0} \to R$ es continua.

<u>Caso 2.7.3</u>: La función exponencial de R en R con $a>0$ y dada por $f(x) = a^x$ es continua.

<u>Propiedad 2.7.1</u>: La suma de dos o más funciones continuas en un punto a es una función continua en a.

<u>Propiedad 2.7.2</u>: El producto de dos o más funciones

Propiedad 2.7.3: El cociente de dos funciones continuas en un punto a es una función continua en a si el denominador no se anula en a.
Corolario 2.7.1: Una función racional es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero.
Propiedad 2.7.4: La composición de dos funciones reales continuas es continua. Es decir, dadas f y g dos funciones reales de una variable. Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $(f \circ g)$ es continua en a.
Propiedad 2.7.5: Conservación del signo en algún entorno del punto. Es decir, dada f una función real de una variable continua en el punto a, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$:

(i) Si $f(a)>0$, entonces $f(x)>0$ ó
(ii) Si $f(a)<0$, entonces $f(x)<0$.

La afirmación $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se refiere a los valores de $f(x)$ cuando x toma valores cerca de a pero distintos de a. No es un enunciado acerca de $f(a)$. Entonces:

Definición 2.7.1: Aún cuando exista el límite $\lim_{x \to a} f(x)$, $f(a)$ puede no existir o bien, no coincidir con L. En este caso, a se llama *discontinuidad evitable*.
Definición 2.7.2: Cuando el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, la discontinuidad se llama *no evitable*. Éstas se clasifican en:
Discontinuidades de *primera especie:* esto ocurre cuando los límites laterales existen pero no coinciden
Discontinuidad de *segunda especie*: esto ocurre cuando alguno de los límites laterales no existe o es infinito.

Las técnicas matemáticas se basan en analizar el cumplimiento o incumplimiento de las condiciones de continuidad de la definición de función continua.

La teoría que permite justificar estas técnicas se refiere al límite funcional. Así, a través de la definición y propiedades del límite funcional pueden justificarse estas propiedades de las funciones continuas. Las propiedades de las funciones continuas son establecidas sobre la base de la propiedad de completitud de los números reales.

$\theta_{2.8}$: Casos y propiedades de las funciones continuas en un punto o en un subconjunto del dominio y definiciones de los distintos tipos de discontinuidad:
Caso 2.8.1: Las proyecciones son continuas. Es decir, las funciones $\pi_1, \pi_2 : R \times R \to R$ definidas por $\pi_1(x,y) = x$ y $\pi_2(x,y) = y$ son funciones continuas en todo el plano.
Propiedad 2.8.1: La suma de dos o más funciones continuas en un punto del plano (a, b) es una función continua en ese punto.
Propiedad 2.8.2: El producto de dos o más funciones continuas en un punto del plano (a, b) es una función continua en ese punto.
Corolario 2.8.1: Toda función polinómica de dos variables es continua.
Propiedad 2.8.3: El cociente de dos funciones continuas en un punto del plano (a, b) es una función continua en ese punto, si el denominador no se anula en (a, b).

Corolario 2.8.2: Una función racional es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero.
Propiedad 2.8.4: Si f es una función real de dos variables continua en un punto (a,b) y g es una función real de una variable continua en $f(a,b)$ entonces $g \circ f$ es continua en el punto (a,b).
Corolario 2.8.3: $\log_a f(x,y)$ es función continua de x é y en todo punto en que sea $f(x, y)$ positiva y continua.
Corolario 2.8.4: La función exponencial de $R \times R$ en R con $a>0$ y $a \neq 1$ y dada por $f(x,y) = a^{x.y}$ es continua.

La teoría que justifica esta tecnología es la referida al límite funcional para funciones de varias variables.

Lic. PARRA, Verónica Ester

Profesora de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). 2005.

Licenciada en Educación Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). 2008.

Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET).

Investigador del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.

Integrante de la planta estable del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.

Ayudante Graduado del Departamento de Formación Docente en las Carreras Profesorado de Matemática y Licenciatura en Educación Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.

Integrante del Comité evaluador de la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). NIECyT. Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.

Temas de interés: Educación Matemática.- Didáctica de la Matemática. -Educación Media y Superior.