



Revista Electrónica de Investigación en  
Educación en Ciencias

E-ISSN: 1850-6666

reiec@exa.unicen.edu.ar

Universidad Nacional del Centro de la  
Provincia de Buenos Aires  
Argentina

Cohen F. Pantoja, Glauco; Moreira, Marco Antonio; Elnecave Herscovitz, Victoria  
La enseñanza de conceptos fundamentales de Mecánica Cuántica a alumnos de graduación en Física  
Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 9, núm. 1, enero-julio, 2014, pp.  
22-39

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Buenos Aires, Argentina

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273331433002>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica  
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## La enseñanza de conceptos fundamentales de Mecánica Cuántica a alumnos de graduación en Física

Glauco Cohen F. Pantoja<sup>1</sup>, Marco Antonio Moreira<sup>2</sup>, Victoria Elnecave Herscovitz<sup>2</sup>

[glaucopantoja@hotmail.com](mailto:glaucopantoja@hotmail.com), [moreira@if.ufrgs.br](mailto:moreira@if.ufrgs.br), [vistoria@if.ufrgs.br](mailto:vistoria@if.ufrgs.br)

<sup>1</sup>Programa de posgrado en Enseñanza de la Física de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Brasil

<sup>2</sup>Instituto de Física de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Brasil

### Resumen

En este trabajo hemos estudiado la adquisición y retención de conocimiento explícito y las operaciones de pensamiento implícitas en Mecánica Cuántica que han sido hechas por cinco estudiantes de graduación en Física matriculados por primera vez en una asignatura de Mecánica Cuántica. Exponemos los resultados de la implementación de un abordaje didáctico para la enseñanza de conceptos de *Sistema Físico*, *Variables Dinámicas*, *Estado de un Sistema Físico* y *Evolución Temporal* que hemos delineado para facilitar el aprendizaje significativo, basado en las teorías del aprendizaje de D.P. Ausubel y de G. Vergnaud. Concluimos que hubo evidencias de: cambio considerable de variables de la estructura cognitiva; similitudes (para los conceptos de Sistema Físico y de Variables Dinámicas) y diferencias (para los conceptos de Estado y de Evolución Temporal) en la adquisición de conceptos por parte de los estudiantes; que cuatro de los cinco estudiantes adoptaran procesos más cercanos del polo significativo que del polo mecánico del aprendizaje; inadecuación del significado atribuido por los estudiantes al concepto de probabilidad, antes, durante y después de la instrucción, lo que muestra una tendencia a ser un obstáculo epistemológico natural que debe ser aclarado con la presentación de situaciones-problema asociadas a la Mecánica Cuántica y que el conocimiento previo tiene un papel crucial en la adquisición, en la retención y en la resolución de problemas, si es tenido en cuenta.

**Palabras clave:** Aprendizaje Significativo, Mecánica Cuántica, Enseñanza de la Física

### The teaching of fundamental quantum mechanics concepts to undergraduate physics students

In this work we have studied the acquisition and retention of explicit knowledge and the implicit thought operations on Quantum Mechanics made by five undergraduate physics students that were enrolled for the very first time in a Quantum Mechanics course. We bring out the results of the implementation of a didactic approach for the teaching of concepts of *Physical System*, *Dynamical Variables*, *State of a Physical System* and *Time Evolution* we have built to facilitate the achievement of meaningful learning, based on the D.P. Ausubel and G. Vergnaud learning theories. We concluded that there were evidences of: considerable change in cognitive structure variables; raising of some epistemological obstacles in the learning process; similarities (for the concepts of Physical System and of Dynamical Variables) and differences (for the concepts of State and Time Evolution) in the acquisition of concepts by the students; more meaningful than rote learning processes adopted by four of the five students; inadequacy of the meaning, carried by the students, regarding the concept of probability, before, during, and after the instruction, what shows a tendency of being a natural epistemological obstacle that has to be clarified by the presentation of problem-situations associated to Quantum Mechanics; the crucial role that previous knowledge has in the acquisition, retention, and problem-solving, if it is taken into account.

**Keywords:** Meaningful Learning, Quantum Mechanics, Physics Teaching

## O ensino de conceitos fundamentais de Mecânica Quântica a alunos de graduação em Física

Neste trabalho estudamos a aquisição e a retenção de conhecimento explícito e as operações de pensamento implícitas em Mecânica Quântica, realizadas por cinco estudantes de graduação em Física matriculados pela primeira vez em uma disciplina tratando do assunto. Trazemos os resultados da implementação de uma abordagem didática para o ensino de conceitos de *Sistema Físico*, *Variáveis Dinâmicas*, *Estado de um Sistema Físico* e *Evolução Temporal* que delineamos para facilitar a aprendizagem significativa, baseada nas teorias de aprendizagem de D.P.Ausubel e de G.Vergnaud. Concluímos que houve evidências de: mudança considerável de variáveis da estrutura cognitiva; semelhanças (para os conceitos de Sistema Físico e Variáveis Dinâmicas) e diferenças (para os conceitos de Estado e de Evolução Temporal) na aquisição dos conceitos pelos estudantes; que quatro dos cinco estudantes adotaram processos mais próximos do polo significativo que do polo mecânico da aprendizagem; inadequação do significado atribuído pelos estudantes ao conceito de probabilidade, antes, durante e depois da instrução, o que mostra uma tendência de ser um obstáculo epistemológico natural que deve ser esclarecido pela apresentação de situações-problema associadas à Mecânica Quântica; que o conhecimento prévio tem papel crucial na aquisição, na retenção e na resolução de problemas, se ele é levado em conta.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Significativa, Mecânica Quântica, Ensino de Física

## L'enseignement des concepts fondamentaux de la Mécanique Quantique pour étudiants en physique

Nous étudions l'acquisition et la rétention des connaissances explicites et des opérations de la pensée implicites, de la mécanique quantique réalisées par cinq étudiants de troisième cycle en physique, d'abord inscrit dans une discipline de la Mécanique Quantique. Nous apportons les résultats de la mise en œuvre d'une approche didactique de l'enseignement des concepts de système physique, variables dynamiques, l'état du système et évolution temporelle qui nous avons décrit pour faciliter l'apprentissage significatif, basé sur les théories de l'apprentissage et de D.P.Ausubel et G.Vergnaud. Nous concluons que les preuves étaient de: changement considérable de variables de structure cognitive; similitudes (pour les concepts de système physique et les variables dynamiques) et des différences (pour les concepts d'Etat et évolution temporelle) dans l'acquisition des concepts par les élèves; quatre des cinq les étudiants ont adopté des processus de l'apprentissage plus significatif que mécanique; l'insuffisance de la signification attribuée par les élèves à la notion de probabilité, avant, pendant et après l'instruction, ce qui montre une tendance à être un obstacle naturel épistémologique qui doit être clarifié en présentant des situations problématiques liées à la mécanique quantique, que la connaissance préalable a rôle crucial dans l'acquisition, la rétention et la résolution de problèmes, si elle est prise en compte.

**Mots clés:** L'apprentissage significatif, Mécanique Quantique, Enseignement de la Physique

### 1. INTRODUCCIÓN

La investigación en enseñanza de la Mecánica Cuántica ha crecido bastante a lo largo del tiempo, pero conforme afirman Greca y Moreira (2001, p.30), la descripción de estudios empíricos tratando sobre las concepciones de los estudiantes y sobre la implementación de propuestas didácticas aún es muy baja. Çaliskan et al. (2009) afirman también que los estudios de concepciones acerca la Física Cuántica son muy escasos en comparación con las investigaciones sobre cómo razonan los estudiantes en contenidos de Física Clásica (Electromagnetismo, Mecánica y Termodinámica).

Muchos investigadores como Olsen (2002, p.565), por ejemplo, refuerzan la discrepancia de los contenidos suministrados en la escuela en comparación con el contenido de Física conocido hoy en día, o sea, se disminuyen los contenidos de Física Moderna y Contemporánea y son enfatizados los de Física Clásica,

aunque estos sean antiguos. La Física Clásica tiene su importancia epistemológica y sus raíces ontológicas son apreciables, pero en el siglo XXI es razonable que sean abordadas las rupturas paradigmáticas que han ocurrido por lo menos en el siglo XX.

Otro problema existente en la enseñanza de Mecánica Cuántica es el uso, por parte de los alumnos (y algunas veces por profesores), de modelos híbridos, es decir, modelos desarrollados desde aspectos clásicos y cuánticos. Algunos investigadores (Tsarpalis e Papaphotis, 2009, p.897) han apuntado diferencias entre los modelos de la Antigua Teoría Cuántica y estos modelos híbridos, pues mientras los primeros son tentativas decurrentes de momentos de crisis en la ciencia, los modelos híbridos son derivados de razonamiento erróneo que ocurren en el aprendizaje.

Apuntamos como otro aspecto que dificulta el aprendizaje en Mecánica Cuántica, el énfasis en el formalismo en lugar

de la discusión conceptual. Muchas veces ocurre la presentación del contenido de Mecánica Cuántica en un modo muy similar al de Álgebra Lineal, lo que puede reforzar la idea de que Mecánica Cuántica está compuesta solamente por las Matemáticas. Esta ausencia de un matiz conceptual puede facilitar la generación y construcción de estos modelos híbridos, pues bajo el uso excesivo del formalismo, el estudiante puede usar su conocimiento previo, básicamente clásico.

El trabajo aquí presentado está basado en las ideas expuestas en la literatura y busca a través de un abordaje conceptual, reconciliar las diferencias, así como destacar las similitudes entre la Física Cuántica y la Física Clásica. Algunas de nuestras ideas están ancladas en las de la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (2000), a saber, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora, para facilitar el aprendizaje significativo de conceptos en un cierto ramo del conocimiento. Otro aspecto que se sigue en la filosofía de enseñanza es el empleo de un planteamiento prioritariamente conceptual en el lugar del énfasis meramente matemático. En otras palabras, empezamos con el matiz semántico en la instrucción y, por lo tanto, la presentación de ecuaciones matemáticas ha ocurrido de forma que se muestre la generalidad conceptual de algunas proposiciones que han sido expuestas al largo del proceso de instrucción.

El estudio fue realizado en el segundo semestre del año de 2010 en una asignatura del curso de licenciatura en Física (equivalente al profesorado en Brasil) de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul e implicó a cinco alumnos de graduación, todos siguiendo por la primera vez tal asignatura.

## 2. MARCO TEÓRICO

Antes del establecimiento del marco teórico que ha orientado la investigación, es necesario hacer una distinción entre dos formas de conocimiento, denominadas forma operatoria y forma predicativa. Gérard Vergnaud enfatiza esta diferencia diciendo que la forma operatoria del conocimiento es aquella en la cual se desarrollan las acciones que conllevan contenidos específicos largamente implícitos, mientras la forma predicativa del conocimiento está asociada al saber verbal, explícito y formalizado.

Es importante resaltar también que el conocimiento explícito puede ser debatido, pero el conocimiento operatorio no, pues está implícito en las acciones. Vergnaud atribuye el significado y la dependencia de contenidos específicos a la forma operatoria, toda vez que considera la conceptualización como la piedra angular de la cognición (Vergnaud, 1988, p.173).

Así justificamos por qué no nos hemos fundamentado solamente en la teoría ausubeliana del aprendizaje: esta teoría tiene fuerte poder explicativo sobre el conocimiento adquirido en la forma predicativa, pero no ocurre lo mismo para la forma operatoria. Mientras Ausubel se dedica al conocimiento predicativo, Vergnaud vuelve su punto de vista al conocimiento operatorio y de este modo, hallamos las dos teorías como complementarias. En primer lugar presentaremos las ideas fundamentales de la Teoría del REIEC Volumen 9 N°o 1 Mes Julio  
Recepción: 18/09/2012

Aprendizaje Significativo Ausubel y después, presentaremos una síntesis de los conceptos estructurales de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud.

### 2.1. La teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel

En esta sección abordaremos solamente las ideas más generales que han orientado la investigación, pues la teoría de Ausubel se encuentra bastante discutida en la literatura como, por ejemplo, en Moreira (1997; 2003), Pantoja (2011b), Rocha (2008), entre otros. Juzgamos algunos de los aspectos de la teoría como cruciales para los procesos de construcción de la instrucción y de la implementación de la misma y los discutiremos a continuación.

Ausubel define el concepto de Aprendizaje Significativo como un proceso de adquisición de nuevos conocimientos en el cual hay generación del significado como producto de este proceso. Para él, el significado es un ente idiosincrásico, consciente, claro y diferenciado y, de esta forma, queda claro el énfasis dado por Ausubel a la forma predicativa de los procesos cognitivos.

El proceso de aprendizaje incluye tres estadios, a saber, la adquisición (el procesamiento cognitivo de la información del medio externo), la retención (el almacenamiento de esta información en la estructura cognitiva del sujeto) y la obliteración (etapa en la cual ocurre un tipo de olvido residual de la información asimilada). Hay dos factores cruciales para la distinción del grado de “significancia” del aprendizaje: el conocimiento previo en la estructura cognitiva del estudiante y la disposición del mismo para relacionar el nuevo conocimiento con el que posee, en una forma no arbitraria y no literal.

En nuestra investigación se muestran muy claras las diferencias entre estudiantes que se predisponen al aprendizaje significativo y los que parecen contentarse con el aprendizaje arbitrario y literal, que Ausubel denomina aprendizaje mecánico. Algunos de los estudiantes intentan usar argumentos plausibles y razonables mientras otros dan respuestas vagas, confusas, o incluso puramente literales.

Algunos estudiantes tienen también muchos problemas con sus conocimientos previos, una vez que muchos de éstos son confusos y mal estructurados, vagos o pobres, algunas veces. La falta de elaboración de estos conocimientos dificulta la adquisición de nuevos conocimientos en la forma predicativa según el autor, pues conforme se ha dicho arriba, él considera el conocimiento previo como la variable aislada más importante en el proceso de aprendizaje.

Para Ausubel, las tareas de aprendizaje receptivo significativo pueden incluir el aprendizaje de representaciones (entes que tratan de un objeto en su ausencia), de conceptos (entes con o sin nombre que tratan de eventos y regularidades) y de proposiciones (composiciones de palabras que poseen significados propios y expresan relaciones entre objetos). Estas unidades son muy importantes en la enseñanza de las Física, pues las representaciones nos permiten discutir acerca de objetos en su ausencia, mientras los conceptos tornan posible la



discusión sobre eventos y regularidades en el mundo y las proposiciones relacionan estas ideas en la forma de discurso.

Está claro que las personas tienen, entonces, diferentes estructuras cognitivas y esto ocurre por varios motivos: interacciones con diferentes significados, culturas, representaciones, conceptos, entre otros. A partir de estas interacciones se construye el conocimiento previo cuyas unidades más básicas son llamadas subsumidores. Estos subsumidores tienen diferentes niveles de claridad (en cuanto son definidos o precisos), discriminación (en cuanto pueden ser diferenciados entre sí), estabilidad (rigidez o arraigamiento de una idea en la estructura cognitiva) y disponibilidad (en tanto estén disponibles para una determinada tarea de aprendizaje).

En este trabajo las variables de estructura cognitiva fueron fundamentales para el estudio de cómo ocurrió el aprendizaje a lo largo de una intervención didáctica descrita más adelante. Ellas muestran cuáles son los conceptos más difíciles de ser aprendidos por los estudiantes.

Para la manipulación deliberada de las variables de la estructura cognitiva Ausubel propone cuatro principios programáticos organizacionales para la enseñanza (la diferenciación progresiva, la reconciliación integradora, la organización secuencial y la consolidación). De los cuatro principios, analizaremos dos de forma más profundizada, a saber, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora.

La diferenciación progresiva nos dice que se deben enseñar en primer lugar, los conceptos más generales, abstractos e inclusivos, y, entonces, a partir de éstos diferenciar los introduciendo los más particulares. El autor justifica este principio afirmando que la cognición humana fue diseñada para trabajar desde lo más general a lo más específico. Es más fácil para el ser humano captar los significados de las partes cuando ya tiene una idea del todo.

La reconciliación integradora es un principio que viene a complementar la diferenciación progresiva una vez que se constituye en la reconciliación de similitudes y el establecimiento de diferencias en el contenido presentado. Si seguimos solamente el principio de la diferenciación progresiva creamos varios ramos cognitivos muy elaborados pero no conexos y tampoco estructurados. Para que la enseñanza tenga su éxito máximo, desde el punto de vista ausubeliano, tenemos que interponer las actividades en las cuales ocurren la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora.

La teoría ausubeliana del aprendizaje significativo tiene un poder explicativo muy fuerte, aunque esté restringida al entendimiento de los procesos ocurrientes en el modo predicativo del conocimiento, es decir, la forma en la cual el conocimiento está explícito, verbalizado, formalizado y organizado. Es importante estudiar también el conocimiento implícito en las acciones, no tan formalizado y no tan organizado, pero útil para el dominio de situaciones en las cuales ocurre necesariamente la conceptualización, como señala Gérard Vergnaud.

## 2.2. La teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud

Para Gérard Vergnaud la mayoría de nuestros conocimientos son competencias que se desarrollan, mejoran, se diferencian, y se deterioran a lo largo de nuestra experiencia y dependen de las situaciones con las cuales nos confrontamos (Pantoja, 2011a, p.7; Vergnaud, 1996, p.200). El concepto de competencia conduce a Vergnaud directamente al concepto piagetiano de esquema.

La definición de esquema para Vergnaud consiste en la organización invariante de la conducta frente a una clase de situaciones. Estos esquemas no son entes fijos sino que son *totalidades dinámicas funcionales* que abarcan tanto la actividad motora como la intelectual y, por tanto, para él estos esquemas deben involucrar los contenidos específicos asociados a la acción.

Las situaciones de Vergnaud también tienen un matiz doble, pues pueden estar asociadas tanto al aspecto cognitivo como al motor, entonces, tomar un objeto o solucionar un problema del tipo: una carga eléctrica con velocidad inicial  $\vec{v} = v\hat{i}$  puesta en un campo magnético de intensidad  $\vec{B} = B_0\hat{k}$  en la dirección  $z$  ¿Cuál el movimiento descrito por la carga? De esta forma Vergnaud define las situaciones bajo el rotulo más general de tarea en la cual es necesario el uso de un esquema para su dominio. En este esquema debe haber, entonces, el contenido específico para solucionar el problema.

El esquema para el autor está compuesto por cuatro ingredientes. De estos los llamados *invariantes operatorios* son los que distinguen los esquemas de Vergnaud de los de Piaget, pues componen el conocimiento específico del sujeto. Estos ingredientes son denominados:

- *Metas y anticipaciones;*
- *reglas de acción, de acopio y de control de la información;*
- *posibilidades de inferencia;*
- *invariantes operatorios;*

Las metas y anticipaciones de un esquema se dirigen a una clase de situaciones en las cuales el sujeto puede describir una finalidad o esperar ciertos fenómenos o efectos (Vergnaud, 1996, p. 201), o sea, están asociadas a la previsión de una solución para un problema dado. La anticipación, probablemente cierta desde el punto de vista de la ciencia, de un problema, por un experto, o incluso la anticipación de la solución de un problema por un novato, que puede estar errada, están incluidas en los esquemas de Vergnaud.

Podemos citar, por ejemplo, la respuesta a la situación presentada arriba: una carga eléctrica con velocidad  $\vec{v} = v\hat{i}$  es puesta en un campo magnético de intensidad  $\vec{B} = B_0\hat{k}$  en la dirección  $z$  ¿Cuál el movimiento descrito por la carga? La anticipación de la solución del problema por un experto incluiría, probablemente, decir que la partícula describirá un movimiento circular en el plano  $(x,y)$ , mientras puede ocurrir que un alumno novato piense que una vez estando el campo en la dirección  $z$ , y siendo esto uniforme, la partícula

asumirá una aceleración dirigida en este eje y, por tanto, describirá un movimiento uniformemente acelerado en esta dirección. Muy probablemente el experto ha tenido en cuenta que la fuerza magnética no genera trabajo y que la fuerza magnética es perpendicular al campo y a la velocidad.

Las reglas de acción permiten al sujeto la continuidad de las acciones de transformación de la realidad, del acopio de información y del control de los resultados de estas acciones, permitiendo el éxito de la actividad en un contexto dado de permanente evolución (Pantoja, 2011a, p. 8; Vergnaud, 1996, p.201). Podemos mencionar a un estudiante de Física actuando en la resolución de la situación presentada arriba. Consideración del tipo “haga esto, no almacene aquello” son muy importantes y pueden ser ilustradas como “la fuerza magnética no genera trabajo, entonces, no tiene en cuenta aceleraciones tangenciales” (correcta en esta situación) o “la velocidad inicial está a lo largo del eje  $x$  y por tanto la aceleración cambiará la velocidad en este eje de forma uniforme  $v_x = v_{0x} + \frac{F_{mag}}{m} t$ , pues el campo es constante” (incorrecta en esta situación). Las acciones de almacenamiento de informaciones y parámetros transformadores de la situación son elementos fundamentales de los esquemas.

El esquema conlleva en su composición posibilidades de inferencia, pues la actividad requiere cálculos del tipo “aquí y ahora” o inferencias del tipo “si tenemos  $x$  entonces ocurrirá  $y$ ” (Pantoja, 2011a, p.8; Vergnaud, 1996, p.202), que son reglas condicionales. Un ejemplo en la situación de la partícula cargada en el campo magnético puede ser el uso de inferencias para la solución del problema como: “si la velocidad inicial en el eje  $z$  es nula, tendremos un movimiento en el plano” (que es correcta para el caso) o “si tenemos campo magnético, tendremos fuerza magnética” (que no es correcta, pues no se “sentirá” una fuerza magnética si no se tiene una carga de prueba).

Los ingredientes del esquema serían vacíos si no fuera por los invariantes operatorios, entes en los que están los contenidos del esquema. Las reglas de acopio, las inferencias y las metas, obviamente dependen del contenido específico de la situación, pero Piaget no pensaba (o no quiso pensar) así. Vergnaud introduce, entonces, los *teoremas-en-acción* que son proposiciones consideradas verdaderas sobre la realidad (las situaciones) y los *conceptos-en-acción* que son categorías, objetos, predicados, considerados como pertinentes. En la situación tratada hasta ahora, fuimos forzados a hablar tanto sobre campo magnético, fuerza magnética, velocidad y movimiento, como sobre sus relaciones: “la fuerza magnética depende del campo magnético y de la velocidad”, “la fuerza magnética no genera trabajo”, “el movimiento es circular”. De esta forma Vergnaud retira la intensidad de la transferencia, naturalmente enfatizada por Piaget, una vez que el último se preocupó por la construcción de estructuras lógicas generales.

Estos invariantes operatorios son entes que constituyen la base conceptual implícita o explícita de los esquemas, o sea, su contenido específico. Para Vergnaud:

*“Un teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; un concepto-en-acción es una categoría de pensamiento considerada como pertinente” (Vergnaud, 1996, p.202)*

Para él, el principal interés teórico del esquema es:

*“Proporcionar el vínculo imprescindible entre la conducta y la representación. Por otra parte, son los invariantes operatorios los que forman la articulación esencial, una vez que la percepción, la búsqueda y selección de información, se basan integralmente en el sistema de conceptos-en-acción disponibles en el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias) y en los teoremas-en-acción subyacentes en su conducta” (ibid.)*

Los conceptos de concepto-en-acción y teorema-en-acción son diferenciables en otro aspecto: veracidad y pertinencia. Un concepto-en-acción solo puede ser pertinente, mientras un teorema-en-acción es verdadero o falso. Por estas características, conceptos-en-acción son muy importantes en la categorización, agrupamiento de cosas y estados de cosas en la búsqueda y selección de informaciones pertinentes al dominio de una situación. Los teoremas-en-acción son entes compuestos de conceptos-en-acción y nos permiten pensar en términos de los otros ingredientes de los esquemas (metas, reglas de acción e inferencias) (ibid.)

La importante relación entre los conceptos-en-acción y los teoremas-en-acción es, entonces, dialéctica. No podemos construir teoremas-en-acción sin los conceptos-en-acción y, de esta forma, uno depende del otro para existir.

Después de la discusión del concepto de esquema, es posible el tratamiento del cambio de enfoque dado por Vergnaud en la investigación del desarrollo cognitivo: la interacción entre esquema y situación. Para el autor, la interacción entre sujeto y objeto (enfatizada por Piaget y por la mayoría de los libros didácticos) enfoca los objetos del mundo (concreto o no) y sus propiedades, relaciones y transformaciones, mientras la referencia a la realidad en términos de situaciones privilegia las acciones. Como Vergnaud considera que mucho de nuestro conocimiento ocurre bajo las acciones (forma operatoria del conocimiento), es más fructífero mirar el desarrollo cognitivo desde la interacción entre esquema y situación.

Afirmamos que Gérard Vergnaud construyó una estructura conceptual explicativa para la adquisición del saber, considerando la interacción entre esquema y situación, pero no dijimos aún lo que es aprendido o dominado ni cómo este conocimiento es representado. Vergnaud presenta la idea de *campo conceptual* como matriz epistemológica para la adquisición de conocimiento. Para él, los campos conceptuales son:

*“...amplios conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requieren varios tipos de conceptos, procedimientos, y representaciones simbólicas que están conectados unos a los otros” (Vergnaud et al., 1990, p.23)”*

Vergnaud también define lo que llama *conceptos* como un triplete de tres conjuntos:

$$C = (S, I, R),$$

Donde  $S$  es el conjunto de situaciones que hacen el concepto útil y significativo,  $I$  es el conjunto de invariantes operatorios que pueden ser usados por el sujeto para dominar las situaciones y  $R$  es el conjunto de representaciones, lingüísticas, gráficas o gestuales, que pueden ser usadas para representar los invariantes operatorios, situaciones y procedimientos (Pantoja, 2011a, p.10; Vergnaud, 1997, p.6).  $S$  es el *referente*,  $I$  es el *significado* y  $R$  es el *significante* del concepto.

Las representaciones posibilitan representar los conceptos-en-acción y los teoremas-en-acción, así como las situaciones. Algunas representaciones son más potentes que otras, pero no pueden ser manipuladas antes de que el sujeto incorpore su significado. Gráficos, muchas veces son más eficaces para el entendimiento del contenido por parte de un sujeto que por otros, mientras algunos estudiantes prefieren la formalidad de las ecuaciones. Es deseable que un sujeto progrese en el campo conceptual utilizando el mayor número posible de representaciones de su conocimiento (Pantoja, 2011a, p.10).

### 3. METODOLOGÍA

En esta sección discutiremos los aspectos pertinentes a la metodología adoptada en el estudio. Haremos una división entre las metodologías de enseñanza y de investigación para evitar cualquier confusión acerca de los procesos de análisis de los datos obtenidos (investigación) y de implementación de la propuesta didáctica (enseñanza).

#### 3.1. Metodología de enseñanza

La intervención ha sido realizada en una clase de la asignatura de “Física do Século XX - A” (Física del Siglo XX) de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul, ubicada en Brasil. La instrucción tuvo 12 horas de duración y la clase analizada estaba compuesta por cinco alumnos que no habían estudiado, todavía, la Mecánica Cuántica. Este estudio forma parte de un trabajo más amplio de Maestría en Enseñanza de la Física (Pantoja, 2011b).

El contenido abordado en la propuesta comprendió los conceptos de *sistema físico*, *variables dinámicas*, *estado de un sistema físico* y *evolución temporal*. Estos tópicos fueron escogidos por dos razones: la investigación en el aprendizaje del concepto de evolución temporal es muy escasa y las pocas evidencias en la literatura apuntan hacia trabajos como los de Singh (2008) y Greca (2001), por ejemplo; y la estructuración de este contenido según el principio ausubeliano de la diferenciación progresiva, pues juzgamos estos conceptos como unos de los más generales de la Mecánica Cuántica que así deben ser presentados en primer lugar para que sean diferenciados progresivamente, siendo entonces reconciliados de forma integrada, posteriormente.

El concepto de *evolución temporal* es muy importante y se pueden destacar por lo menos dos motivos para esto: su importancia en la estructuración de la ciencia que favorece la integración con otros dos conceptos importantes, a saber, los de predicción (la capacidad de prever) y de causalidad

(conocimiento de los efectos a partir de las causas); y el factor ya mencionado de haber pocas investigaciones que tratan del aprendizaje significativo de este concepto en la investigación en enseñanza de la Física.

Los conceptos de *estado de un sistema físico* y de *variables dinámicas* han sido tratados como más generales que el de evolución temporal, pues éste es un atributo asociado a aquellos, y, luego, puede ser entendido como más particular que los conceptos destacados. Además, para el estudio del proceso de evolución temporal, es necesario especificar los entes que se desarrollan en este proceso, o sea, el estado del sistema y las variables dinámicas. En la Mecánica Cuántica, la evolución temporal del estado y la de las variables dinámicas pueden ser abordadas de forma separada (a través de las formulaciones de Schrödinger y de Heisenberg) y por eso hemos insistido en la diferenciación de estos conceptos a lo largo de la instrucción.

El abordaje tuvo que tener en cuenta el concepto de sistema físico, pues este es más fundamental que los otros tres (variables dinámicas, estado de un sistema físico y evolución temporal). Tal concepto es de gran importancia en la categorización de los objetos estudiados por la Física y debe ser incluido en una propuesta que procura la facilitación del aprendizaje significativo, a nuestro entender.

El contenido fue, entonces, estructurado de forma que se aprovechara la organización secuencial de los conceptos involucrados, o sea, sistemas físicos → variables dinámicas → estado de un sistema físico → evolución temporal. Creemos que esta secuencia ha facilitado el uso de la diferenciación progresiva y de la reconciliación integradora en la mayoría de las veces.

Coherente con el referencial teórico de Gérard Vergnaud, es la idea de que las situaciones atribuyen sentido a los conceptos. Para él, el desarrollo cognitivo depende del dominio de las situaciones que componen un campo conceptual dado. Hemos adoptado tres situaciones para la realización del estudio: el experimento de Stern-Gerlach, el átomo de hidrógeno y la molécula de amonio. Tales situaciones han sido fundamentales tanto para la presentación del contenido, como para derivar inferencias de los posibles invariantes operatorios usados por los estudiantes.

El contenido ha sido organizado de forma que resalte el aspecto dialéctico entre conceptos y situaciones en la presentación de la materia de enseñanza. Primeramente han sido trabajadas las situaciones y después han sido presentados los conceptos. En la etapa siguiente ocurría el desarrollo de la presentación del contenido de acuerdo con la diferenciación progresiva y con la reconciliación integradora.

Tuvimos que suponer algunos matices acerca del conocimiento previo de los estudiantes que fueron después corroborados por el pre-test, a saber, el conocimiento elemental y, muchas veces, vago de algunos procesos de evolución temporal, y reconocimiento tanto de sistemas físicos como de variables dinámicas particulares (como por ejemplo, posición, momentum). La evaluación inicial ha mostrado un grado elevado de generalidad en los conceptos



y en la primera clase hemos notado mayor seguridad de los alumnos al tratar ejemplos de la Física Clásica (principalmente de la Mecánica) que al tratar de Física Cuántica.

Como material de enseñanza básico de la unidad, construimos un texto elemental que puede ser encontrado en Pantoja (2011b), basado en ideas de la teoría de Ausubel y de Vergnaud. Las clases se basaron en este material didáctico y se dividieron de modo que fuera tratado en la primera clase el concepto de sistema físico; en la segunda el de variables dinámicas, asociándolo al primero; en la tercera y en la cuarta el de estado de un sistema físico; en la quinta y en la sexta el de evolución temporal. La sistemática adoptada en la intervención era la presentación de una situación en la pizarra, para que los alumnos expresasen sus concepciones acerca del contenido para que, entonces, se siguiesen los procesos de diferenciación progresiva y de reconciliación integradora (Pantoja, 2011a, p.13). Las situaciones propuestas están en el Apéndice.

### 3.2. Metodología de investigación

El proceso de investigación siguió un matiz cualitativo, bastante correlacionado al paradigma de investigación naturalista que mira la realidad como poseyendo aspectos que evidencian formas variadas (Bogdan&Biklen, 1994). En nuestro trabajo el significado ha asumido una postura crucial y siendo un ente idiosincrásico, se asocia a la premisa de que cada persona capta esa realidad de forma individual, pero con aspectos compartidos. Las concepciones alternativas, por ejemplo, destacan este carácter, pues son idiosincrásicas al mismo tiempo que comparten atributos como, en la Mecánica, la dependencia de la velocidad, por la fuerza.

Para elevar la credibilidad de la pesquisa cualitativa (el análogo de la confiabilidad en la investigación cuantitativa) hemos adoptado un procedimiento de recolección de datos basado en el. De esta forma creemos haber disminuido la parcialidad del análisis de los datos. Los datos recogidos involucraron suministro de problemas de lápiz-y-papel, redacción de notas de campo por parte del investigador y construcción de mapas conceptuales por parte de los alumnos.

Para preservar la identidad de los estudiantes hemos adoptado, también, un procedimiento de atribución de un nombre ficticio a cada uno de ellos. Así mantuvimos sus identidades en sigilo.

El análisis de los datos ha sido dividido en dos partes: la investigación del conocimiento en la forma predicativa, en la cual se ha estudiado el conocimiento explícito, verbalizado y su organización en la estructura cognitiva; y la investigación del conocimiento operatorio, en la cual han sido investigados tanto las operaciones de pensamiento implícitas como los invariantes operatorios involucrados en el dominio de situaciones-problema. Los dos procesos han sido guiados por la metodología de análisis de contenido (Bardin, 2008).

El análisis del conocimiento predicativo ha involucrado la investigación de los patrones de asimilación significativa, o  
*REIEC Volumen 9 N°o 1 Mes Julio*  
*Recepción: 18/09/2012*

sea, el producto de las interacciones no arbitrarias y no literales entre el conocimiento previo relevante en la estructura cognitiva y el conocimiento abordado en la instrucción basado en el contenido explicitado verbalmente por los estudiantes. Nos hemos basado bastante en las modificaciones de los subsumidores en la estructura cognitiva: cambios en las variables de la estructura cognitiva y/o asimilación de nuevos atributos esenciales para los conceptos previos (Pantoja, 2011a, p. 14).

El análisis del conocimiento operatorio ha consistido en la investigación de conceptos-en-acción y teoremas-en-acción usados implícitamente por los estudiantes en el dominio del conjunto de situaciones. Este análisis ha sido construido a partir de la búsqueda por teoremas-en-acción y conceptos-en-acción usados de forma semejante en distintas situaciones correlacionadas. La inferencia realizada a partir de indicadores, inherente a las tentativas de reconstitución de las operaciones de pensamiento adoptadas por los alumnos, se ha mostrado muy importante. Desde este proceso, ha sido posible entender las operaciones de pensamiento a partir de una representación simbólica usada de forma aparentemente ilógica o a partir de “lapsos” (omisiones) que mostraban aparente desconexión entre las respuestas (Pantoja, 2011a, p.15).

A partir de estas ideas discutiremos, en la secuencia, los resultados obtenidos en la investigación.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Análisis del pre-test

Hemos supuesto inicialmente que la estructura cognitiva de los estudiantes contenía elementos más específicos de los conceptos que queríamos enseñar como, por ejemplo, las nociones de posición, de velocidad, de energía (variables dinámicas específicas); sistema masa-mol, sistema planetario, átomo de hidrógeno (sistemas físicos específicos); trayectoria (determinación del estado clásico de un sistema), etc. Esta premisa inicial ha sido fundamental para la construcción de la instrucción que ha tomado como punto de partida la facilitación de la superordenación conceptual en torno de los conceptos más específicos conocidos por los alumnos.

Es posible ver en los resultados presentados en la tabla 1 que la conceptualización presentada por los estudiantes es bastante vaga y amplia, lo que significa, muy probablemente, un carácter abstracto y general atribuido a los conceptos que serían enseñados en la intervención, algunos de ellos aparentemente desconocidos, pues son versiones superordenadas de los conceptos que conocían.

Ese cuadro contiene las respuestas al pre-test, tenemos enumerados los pocos atributos criterios presentados por los estudiantes (por eso se ha considerado la clasificación “muy amplio”).

Para el concepto de *Sistema Físico*, tenemos los atributos siguientes: **1.S.** Elementos que actúan (nivel de generalidad muy amplio), **2.S.** Elementos influenciados por el medio (nivel de generalidad muy amplio), **3.S.** Mención a sistemas específicos como el sistema masa-mol (no hemos logrado



clasificar el nivel de generalidad<sup>1</sup>), **4.S.** Ente en el cual son definidas propiedades físicas.

Para el concepto de *Variable Dinámica*, hemos enumerado un atributo: **1.V.** Variables que cambian.

Para el concepto de *Estado de un Sistema Físico*, hemos relacionado dos atributos: **1.E.** Cómo se encuentra el sistema: estado de movimiento (amplio), **2.E.** Cómo se encuentra el sistema (muy amplio).

Para el concepto de *Evolución Temporal*, hemos encontrado tres atributos: **1.T.** Eventos ocurrentes en el tiempo (muy amplio), **2.T.** El pasar del tiempo (muy amplio), **3.T.** Cambios de las características que definen el Estado.

Para clasificar la generalidad de los conceptos, es decir, cuán amplios eran, procuramos enumerar atributos criterios relevantes a la Física como, por ejemplo, sujetos y acciones relevantes (como la idea de que los eventos cambian a lo largo del tiempo en el ítem **3.T.** - tratando sobre evolución temporal). Juzgamos que cuanto más amplio es el número de atributos criterios presentes en un concepto, mayor es su nivel de especificidad, pues esto se torna más restricto, más específico.

**Tabla 1: Resultados del pre-test**

Alumno	Sistema Físico	Variable Dinámica	Estado de un Sistema Físico	Evolución Temporal	Clase
André	1.S.	1.V.	1.E.	1.T.	Muy Amplio
Úrsula	No realizó	No realizó	No realizó	No realizó	No realizó
Maria	2.S.	1.V.	2.E.	2.T.	Muy Amplio
Eva	3.S.	-	1.E.	1.T.	Muy Amplio
Judith	4.S.	-	2.E.	3.T.	Muy Amplio

En el pre-test, hemos percibido que los estudiantes generalmente caracterizaban los conceptos por uno de sus atributos. Ello ha revelado ideas poco diferenciadas con respecto al contenido.

En la secuencia discutiremos los cambios sufridos por los conceptos en las estructuras cognitivas de los estudiantes desde el análisis de mapas conceptuales, de notas de campo y de las respuestas a los problemas propuestos. Debemos destacar la mortalidad en la muestra: André no ha resuelto las tareas 5 y 6.

## 4.2. Análisis del conocimiento en la forma predicativa

Hemos procedido de forma análoga a la seguida en el análisis del pre-test, pues hemos construido la tabla 2 que agrupa los atributos criterios de los conceptos a lo largo del proceso de enseñanza.

Hemos dividido la tabla por columnas de conceptos, pues la tarea 1 se refería a los conceptos de Sistema Físico y de Variables Dinámicas, la tarea 2 al de Variable Dinámica, las tareas 3 y 4 al de Estado de un Sistema Físico y las tareas 5 y 6 al de Evolución Temporal, pero como bien se sabe, estos conceptos no están, de forma alguna, desvinculados y pueden ser explícitamente recordados a lo largo de la instrucción de forma espontánea (cuando el alumno lo hace para responder a una pregunta y juzga que aquel concepto es importante para esto) o inducida (cuando el acuerdo de memorias anteriores hace necesario en función del enunciado, mencionar el concepto explícitamente).

En la codificación, el primer código representa la tarea en que ha sido mapeado el atributo: *a - tarea 1, b - tarea 2, c - tarea 3, d - tarea 4, e - tarea 5, f - tarea 6*. El segundo código representa la clase en que ha sido incluido el atributo. El tercer código representa el concepto al que se refiere el atributo: *S. Sistema Físico, V. Variable Dinámica, VI. Variables Dinámicas Incompatibles, VI(C). Variables Dinámicas Incompatibles o Compatibles, E. Estado de un Sistema Físico, SE. Superposición de Estados, T. Evolución Temporal*.

Los atributos asociados al concepto de Sistema Físico son: **a.1.S.** Objetos físicos que interactúan de acuerdo con leyes específicas; y **c.1.S.**

Los atributos asociados al concepto de *Variable Dinámica* son: **a.1.V.** Magnitudes físicas de varios campos (Mecánica, Electromagnetismo, Termodinámica, Mecánica Cuántica); **a.2.V.** Magnitudes físicas de la Mecánica; **b.1.V.** Magnitudes físicas que cambian a lo largo del tiempo; **b.2.V.** Medir es lo mismo que determinar; **b.3.V.** Magnitudes Físicas; **b.1.VI(C).** Variables no mensurables (mensurables) de forma simultánea; **b.2.VI.** La medición secuencial de dos variables incompatibles implica la destrucción de información previa de una de ellas; **b.3.VI.** Variables incompatibles siguen el principio de la incertidumbre; **c.1.V** que es igual al atributo b.1.V.; **d.1.V.** Energía y operador hamiltoniano son variables dinámicas que pueden ser incompatibles con otras en Mecánica Cuántica; **d.2.V.** El operador hamiltoniano (la función hamiltoniana) es una variable asociada a las interacciones; **e.1.V.** Variables Dinámicas Clásicas son simultáneamente determinables, **e.2.V.** Variables Dinámicas y auto-estados están relacionados por la multiplicidad de valores exclusividad mutua entre ellas; **f.1.VI.** Variables Dinámicas Incompatibles atribuyen carácter probabilístico a la Teoría Cuántica; **f.2.VI.** Variables Dinámicas Incompatibles son no simultáneamente determinables; **f.3.VI.** Si determinamos  $p_x$ , solamente podemos determinar la probabilidad de encontrar  $x$  a lo largo del tiempo.

Los atributos relacionados con el concepto de *Estado de un Sistema Físico* son: **c.1.E.** Representación de las propiedades de un Sistema Físico; **c.2.E.** Un conjunto de Variables Dinámicas en un cierto instante; **c.3.E.** Auto-estados están asociados a los valores posibles de una variable; **c.1.SE.** La Superposición de Estados representa la coexistencia de dos valores de una Variable Dinámica; **c.2.SE.** La Superposición de Estados es la ocurrencia de dos eventos simultáneos; **c.3.SE.** La Superposición de Estados es la combinación lineal de dos Estados; **d.1.E.** El operador

<sup>1</sup>No identificamos en qué nivel de generalidad el alumno concibe el sistema masa-mola.

hamiltoniano (la función hamiltoniana) representa el Estado del Sistema; **d.1.SE.** que es igual al atributo c.1.SE.; **d.2.SE.** que es igual al atributo c.2.SE.; **d.3.SE.** La medida colapsa el Estado en uno de los valores de la Superposición; **e.1.E.** El Estado es un ente superfluo: está resumido a un conjunto de Variables Dinámicas; **e.2.E.** El Estado cuántico es un ente indeterminado; **e.3.E.** El estado cambia a lo largo del tiempo; **e.4.E.** Variables Dinámicas poseen varios valores mutuamente exclusivos que pueden ser adoptados en una medida, siendo los auto-estados, los estados relativos a estos valores; **f.1.E.** El estado es una función de valores complejos; **f.2.E.** La densidad de probabilidad asociada a la posición y la amplitud de probabilidad a un valor de una variable dinámica cualquiera.

Los atributos relacionados con el concepto de Evolución Temporal son: **e.1.T.** El sistema es lo que sufre la Evolución Temporal; **e.2.T.** La Evolución Temporal tiene una causa física; **e.3.T.** La Evolución Temporal en Mecánica Cuántica y en Mecánica Clásica depende de condiciones iniciales. En Mecánica Cuántica esta asociación es hecha a través de las probabilidades; **e.4.T.** El estado es lo que sufre la Evolución Temporal; **f.1.T.** que es igual al atributo e.1.T.; **f.2.T.** La ecuación de Schrödinger describe la Evolución Temporal del Estado del Sistema manteniendo las Variables Dinámicas Fijas y la de Heisenberg describe la Evolución Temporal de las Variables Dinámicas manteniendo el Estado del Sistema Fijo.

## Sistema Físico

Percibimos que ocurrió una uniformidad en las categorías de significados presentados por los estudiantes en el fin de la primera instrucción (sobre el concepto de Sistema Físico). Cuatro de ellos presentaron respuestas substancialmente similares, con ejemplos diferentes (sistema Tierra-Sol, átomo de hidrógeno, átomo de forma general). Percibimos también evidencias de superordenación conceptual, a través de la identificación de los términos objeto e interacción (más generales) con expresiones más específicas (interacción gravitacional, objeto Tierra, objeto Luna, etc.).

Tabla 2: Análisis de las tareas

Alumno	Sistema Físico	Variable Dinámica	Estado de un Sistema Físico	Evolución Temporal
André	a.1.S.; c.1.S.	a.1.V.; b.1.V.; b.2.V.; b.1.VI(C); b.2.VI.; c.1.V.; d.1.V.	c.1.E.; c.1.S.E.; c.2.SE.; d.1.E.; d.3.SE.	
Úrsula		b.2.VI.	c.2.SE.; d.2.SE.; e.1.E.; e.2.E.; f.1.E.	e.1.T.; f.1.T.
Maria	a.1.S.; c.1.S.	a.3.V.; b.2.V.; b.3.V.; b.1.VI(C); b.2.VI.; c.1.V.; d.1.V.; d.2.V.	c.2.E.; c.3.E.; c.1.SE.; d.1.SE.; e.1.E.; f.1.E.	e.2.T.; f.1.T.
Eva	a.1.S.; c.1.S.	b.3.V.; b.1.VI(C); b.2.VI.; c.1.V.; d.1.V.; f.1.VI.; f.2.VI.; f.3.VI.	c.1.SE.; c.3.E.; d.1.SE.; e.2.E.	e.2.T.; f.1.T.; f.2.T.; e.1.T.; e.3.T.; e.4.T.
Judith	a.1.S.; c.1.S.	a.1.V.; b.1.V.; b.2.V.; b.1.VI(C); b.2.VI.; b.3.VI.; c.1.V.; d.2.V.; e.1.V.; e.2.V.	c.2.E.; c.3.E.; c.3.SE.; e.3.E.; e.4.E.; f.2.E.	f.2.T.

## Variables Dinámicas

Para el concepto de Variables Dinámicas en la primera tarea, hemos encontrado, básicamente, dos grupos: uno en el cual los alumnos mencionaban Variables Dinámicas de *REIEC Volumen 9 N°o 1 Mes Julio*  
Recepción: 18/09/2012

*Un ejemplo de sistema físico puede ser un conjunto de cuerpos masivos, como por ejemplo el par Tierra-Sol. Ellos interactúan de acuerdo con la ley de la Gravitación Universal, con estructuras esféricas..."(André)*

*".. el sistema Tierra-Luna, donde hay dos objetos (pudiendo ser considerados como una partícula o esfera) que interactúan conforme la ley de gravitación universal, llevando en consideración la masa de cada uno de ellos..." (Maria)*

0

Esta uniformidad muestra una adquisición de significados coherente con lo propuesto en clase y cierta diferenciación de los subsumidores en la estructura cognitiva. Es importante resaltar que una de las alumnas presentó una copia explícita del material de apoyo, construido por nosotros (Pantoja, 2011) y facilitado a ellos, mientras el resto de los alumnos parece haberse basado en sus ideas y en lo que aprendieran en clase, lo que ha sido verificado por las respuestas con sus propias palabras.

Debemos resaltar que en Mecánica Cuántica los ejemplos de sistemas físicos se presentaban como más generales que los clásicos, como sigue:

*Núcleo x electrosfera, átomo x átomo."(Eva)*

*Ejemplo 1: átomo... interacción es electromagnética (suponiendo esto con protones y electrones)."(Judith)*

En la resolución de la tercera tarea, los alumnos mostraron cierta estabilidad para el concepto de sistema físico, pues presentaron conocimientos substancialmente semejantes a los de la primera tarea, que fueron inferidos desde la construcción de mapas conceptuales por los estudiantes. En la construcción de un mapa conceptual sobre estado, los alumnos lo empezaban por el concepto de sistema físico.

varias áreas de la Física, como un todo, y otro en el cual mencionaban Variables Dinámicas solamente de la Mecánica, en particular. Esta distinción, aunque pueda ocurrir de respuestas cuya selección de las Variables Dinámicas haya sido hecha de forma aleatoria por los

alumnos, es relevante, pues puede revelar qué amplitud atribuyen los alumnos al concepto de Variable Dinámica.

Para el concepto de Variables Dinámicas logramos evidencia de la existencia de tres atributos comunes a los estudiantes en la segunda tarea. El atributo **b.3.V.** (Variables Dinámicas son magnitudes físicas) es compartido explícitamente por dos estudiantes y el atributo **b.1.V.** (Variables Dinámicas cambian a lo largo del tiempo) en otros dos. Es posible que los cuatro alumnos posean los dos atributos, pero la explicitación de uno de ellos puede haber sido considerada como relevante para los alumnos. En la resolución de la tarea 1, tres de los cinco estudiantes presentaron como Variables Dinámicas, magnitudes físicas cambiantes en el tiempo como la posición, el momentum y la energía cinética. La consciencia de estos atributos requiere como un segundo paso la investigación específica de esta variable que no ha sido enfatizada en este estudio.

Un punto importante en el trabajo está asociado a la indistinción entre medición y determinación. De los cinco estudiantes, por lo menos cuatro usaban los términos medición y determinación como sinónimos, es decir, como semejantes. Una de las estudiantes (Eva) ha presentado en una situación particular los conceptos de forma diferente de los demás, que usaban uno de los conceptos y en seguida se referían a este por el otro o usaban solamente uno de los dos para referirse a estos procesos.

*“Variables Incompatibles no pueden ser determinadas simultáneamente, por eso cuando medimos unas las otras quedan sin ser determinadas. La Superposición de Estados está asociada a eso, mientras medimos unas, las otras están allá, escondidas, pero no pueden ser determinadas...” (Eva)*

*“Variables Dinámicas Compatibles son aquellas que pueden ser medidas simultáneamente sin que eso altere el valor obtenido. Variables Dinámicas Incompatibles son aquellas que la medición de una altera la condición del sistema, dificultando la medición de la otra ” (André)*

En cuanto al aspecto de la compatibilidad/incompatibilidad de las Variables Dinámicas, los cinco estudiantes parecen haber asimilado el carácter de destrucción de información previa para Variables Dinámicas Incompatibles, concepto de carácter esencialmente cuántico y bastante importante en el entendimiento de los fundamentos de la teoría. En este sentido, la situación-problema del experimento de Stern-Gerlach contribuyó bastante a facilitar la asimilación. Recomendamos, en la implementación de un abordaje didáctico semejante a éste, la presentación de más situaciones-problema en las cuales sea posible explorar este atributo. María es una de las alumnas que lo describe en forma proposicional basada en esa idea.

*Si dejamos pasar solamente uno de ellos [haz con componente  $z$  de spin definido] por el segundo [electroimán cuyo campo está dirigido en el eje  $z$ ], será notado que para aquella dirección, no habrá modificación del sistema, así, éste guarda tal información de aquella Variable Dinámica. Por otro lado, si el campo magnético estuviera en la dirección  $x$ , se tendría el spin en esta dirección y el haz se dividiría en dos partes. Poniendo un*

*tercer electroimán direccionando el campo magnético en  $z$  y bloqueando el pasaje de  $s_z$  negativo, el haz se divide otra vez, ya que en la medida de una variable habrá destrucción de las informaciones referentes a la otra variable (María)*

Antes del entendimiento de la *destrucción* de información previa, subsumida al concepto de Variables Dinámicas Incompatibles, los alumnos tuvieron que asimilar el propio concepto: algunos de ellos parecieron haber asimilado este atributo de forma directa cuando asociaron las Variables Dinámicas Compatibles a la Física Clásica y miraron el concepto de Variables Incompatibles conforme se enfatizó en la instrucción (Pantoja, 2011b). La estudiante Judith es la única que se ha anclado en el principio de la incertidumbre (b.3.VI.).

En la tercera tarea, los alumnos explicitaron su entendimiento sobre el contenido subsumiendo el concepto de Variables Dinámicas al de Estado de forma que el último fuera un conjunto de magnitudes físicas cambiantes al largo del tiempo. De esta forma, la rememoración del concepto de Variables Dinámicas ocurrió bajo la consideración de su atributo más general (para André y Judith), a saber, que son magnitudes físicas que se modifican en el tiempo o bajo la consideración del atributo de incompatibilidad de las Variables Dinámicas (para María y Eva) teniendo en cuenta que el Estado no puede ser caracterizado simultáneamente por Variables Dinámicas Incompatibles.

*“El Estado es una forma de representación de las propiedades físicas de un Sistema como función del tiempo...” (André)*

*“Para mí, Estado físico de un Sistema son las características momentáneas del sistema... en Mecánica Cuántica solo las Variables Dinámicas Compatibles no son suficientes, pero se busca tener las que nos dan una mejor mirada del sistema” (Eva)*

Percibimos una conceptualización compleja en lo que dice Eva. Cuando afirma que “se buscan las variables que nos dan una mejor mirada del Sistema”, la alumna parece afirmar que el conocimiento del estado sólo puede ser hecho de forma limitada, siendo este conocimiento el máximo que se puede obtener acerca de un Sistema Cuántico. El modelo de la alumna se revela complejo y estable a lo largo de las tareas.

Sobre la función hamiltoniana (operador hamiltoniano) en la cuarta tarea, tres alumnos (André, María y Eva) la (lo) consideran una Variable Dinámica, quizás porque la (lo) asociaron directamente a la energía que, para Sistemas conservativos, poseen la misma expresión matemática. Esta asociación no puede ser hecha siempre y debe ser aclarada cuando sea posible. Como la intervención duró 12 horas y componía un estudio exploratorio, preferimos no insistir en este punto bajo el riesgo de no poder abordar la Evolución Temporal. Algunos de los alumnos asociaron explícitamente la función hamiltoniana (operador hamiltoniano) a las interacciones (Eva y María), lo que puede ser facilitado en la discusión del papel de las interacciones en la Evolución Temporal.



En la quinta tarea, verificamos la estabilización del concepto de Variables Dinámicas Compatibles: las Variables Dinámicas clásicas son todas compatibles, pues son simultáneamente determinables. Un atributo esencialmente cuántico, la existencia de auto-estados posibles para una variable, y la exclusión mutua entre ellos fueron asimiladas por una de las alumnas, a saber, Judith.

*“... E' es uno de los valores obtenidos en el proceso de medición y el auto-estado de  $\hat{H}$  es el estado relativo a este valor” (Judith)*

*El estado inicial de un sistema es la combinación lineal de dos auto-estados. El significado físico indica que es posible encontrar el sistema en un estado en que ocurra la superposición de dos auto-estados diferentes...! (Judith – énfasis nuestro)*

Los puntos explícitos por Eva en la tercera tarea muestran la retención de los atributos más generales asociados al concepto de Variables Dinámicas Incompatibles. El resto de los alumnos no menciona directamente el concepto genérico de Variables Dinámicas, pero Eva lo evoca en la resolución de los problemas propuestos. El principio de la incertidumbre está contenido en el atributo f.l.V(T), asociado al concepto de Probabilidad, noción que fue asimilada de forma intensa por los alumnos bajo un subsumidor cuyo sesgo se asociaba a la forma subjetiva del concepto (Bao y Redish, 2001, Carvalho Neto et al., 2009). Debe ser resaltado que el entendimiento limitado del concepto no impidió la asimilación del concepto de estado cuántico, pero esta adquisición ha sido muchas veces hecha bajo la idea errónea de que el estado cuántico es indeterminado. Esto sugiere, entonces, que se debe enfatizar la diferenciación de los conceptos de probabilidad y de amplitud de probabilidad y que se debe, además, hacer una aclaración del propio concepto de probabilidad en Mecánica Cuántica.

### Estado de un Sistema Físico

Las primeras diferencias en la conceptualización surgen un poco más acentuadas, pero aún bastante uniformizadas, en el tratamiento del concepto de Estado Cuántico. Dos alumnos (André y Eva) consideraron que el Estado es una representación de propiedades de un Sistema en un instante de tiempo. André afirma que la representación es hecha por las funciones de onda, mientras Eva introduce un conjunto de Variables Compatibles que, pueden darnos la más amplia información posible para la configuración del Sistema. Tres alumnas (Maria, Judith y Úrsula) concibieron el estado como un conjunto de variables dinámicas en un cierto instante, afirmando luego que lo mismo representaba el Estado. Aunque más específico que el atributo c.l.E. presentado por André y Eva, este conocimiento fue asimilado por subordinación al concepto de Variables Dinámicas, o sea, el estado fue entendido como una elaboración del concepto de Variable Dinámica y esto puede haberlo tornado superfluo, toda vez que para ellos la referencia al estado significa la referencia directa a las Variables Dinámicas.

*“Un estado es una forma de representación de las propiedades físicas de un Sistema en función del tiempo... en la Mecánica Cuántica las funciones de onda... representan los estados de un Sistema Físico” (André)*

*“ El concepto de Estado de un Sistema está asociado a los valores de las Variables Dinámicas en un determinado instante de tiempo...” (María).*

Durante la tercera tarea, tres estudiantes revelaron una asociación de los auto-estados a los valores posibles en una medición de las Variables Dinámicas, es decir, cada uno de los auto-estados de un operador representativo de una Variable Dinámica es un Estado en el que la Variable Dinámica presenta valor definido relativo al auto-valor respectivo a aquel auto-estado. En otras palabras, si  $\hat{H}|E_1\rangle = E_1|E_1\rangle$ , el auto-estado  $|E_1\rangle$  es un Estado en que la energía está con valor definido (determinada) igual a  $E_1$ . Esta asociación debe ser hecha y, además, optimizada.

En cuanto a la conceptualización sobre la Superposición de Estados en la tercera tarea, se reveló básicamente el énfasis en tres atributos distintos: la coexistencia de dos (o más) valores de Variables Dinámicas por tres alumnos (André, Eva y María); la ocurrencia de dos eventos simultáneos por dos alumnos (André y Úrsula); y la concepción más matematizada de que la Superposición de Estados es una combinación lineal de dos estados, por Judith. Este hallazgo es interesante, pues el hecho de superponer dos estados fue asimilado por los alumnos en una forma que involucra implícitamente el concepto de simultaneidad. Una de las hipótesis que planteamos es la de que el significado de la palabra Superposición evoque adjetivos de este tipo en la estructura cognitiva de los estudiantes. La Superposición de Estados tiene consecuencias interesantes en la Física Moderna, como la criptografía cuántica, el entrelazamiento cuántico e incluso en las discusiones sobre el efecto túnel (Superposición de dos “ondas” propagándose, una para la izquierda y la otra a la derecha). Cuando se propone un curso de Mecánica Cuántica, este concepto debe ser más explorado, pues es uno de los conceptos-clave de esta disciplina y puede ser entendido no solamente bajo el aspecto de las mediciones secuenciales.

Un punto a ser destacado es el de que el alumno André asoció, en la cuarta tarea, la función hamiltoniana y el operador hamiltoniano al Estado de un Sistema clásico, en el caso de la función, o cuántico, en el caso del operador. Esta relación puede estar fuertemente asociada a la ecuación de auto-valores para la energía, enfatizada en la cuarta tarea. El enlace de la ecuación de auto-valores a un auto-estado y la presentación de la misma, específica para los auto-valores de energía, puede explicar este vínculo.

Podemos verificar cierta estabilidad, para algunos alumnos, de la concepción presentada sobre la superposición de estados. Eva y María continuaron evocando en sus respuestas el significado de coexistencia de dos (o más valores) de Variables Dinámicas. Úrsula rememora el concepto a la luz del significado de ocurrencia de dos eventos simultáneos. André, cuando comenta la relación entre el concepto con el de Variables Dinámicas presenta la idea de colapso del Vector de Estado, muy importante en el proceso de medida, aspecto no relevado *explícitamente* por los otros alumnos.



Sobre el concepto de estado, en la quinta tarea, hay evidencia de una pluralidad de significados atribuidos por los alumnos al concepto de Estado. Hemos enumerado por lo menos cuatro significados distintos adquiridos por las cuatro alumnas que realizaron la tarea. Dos alumnas (Úrsula y Maria) presentaron indirectamente la idea del Estado como un conjunto de Variables Dinámicas, asociación que lo tornó superfluo en sus explicaciones, particularmente, las de Úrsula, que lo asimiló arbitrariamente a su estructura cognitiva conforme puede ser visto en el ejemplo siguiente:

*“El Estado es representado por una función compleja de las posiciones o del momentum de cada partícula componente del Sistema” (Úrsula)*

Otra concepción, ya encontrada en la literatura acerca del Estado Cuántico, evidenciado en el estudio por dos estudiantes (Eva y Úrsula), ha sido la de que el Estado Cuántico es un ente indeterminado, por ser probabilístico.

*“... podemos determinar el comportamiento del Sistema clásico si sabemos las condiciones iniciales, no siendo de esta forma para un cuántico que sólo podrá ser probabilístico, o sea, apenas con la probabilidad de saber cómo el Sistema puede comportarse.” (Maria)*

Otro conocimiento *explicito* es lo de que el Estado cambia a lo largo del tiempo. Esta concepción parece ser evidente para las otras alumnas, pero solamente Judith la explicita en la resolución de la tarea. Judith presenta aun un raciocinio interesante que torna explícita también la relación entre la multiplicidad de valores de una Variable Dinámica y la existencia de diversos auto-estados posibles, lo que es fundamental para la externalización del entendimiento del proceso de medición.

En la última tarea, el recuerdo del concepto de estado acusa la obliteración del mismo. Mientras Úrsula presenta lo mismo como función compleja del espacio y del tiempo evidenciando un aislamiento del concepto en la estructura cognitiva, y luego un aprendizaje arbitrario (propiciando la obliteración), Judith lo relaciona al concepto de probabilidades (densidad de probabilidad para la posición y amplitud de probabilidad para una Variable Dinámica cualquiera) bajo la disminución de su umbral de la disponibilidad. El concepto de Variables Dinámicas es más fácilmente recordado por todos los alumnos, mientras el de Estado es difícilmente recordado.

### **Evolución temporal**

Ha sido posible evidenciar cuatro atributos asociados al concepto de Evolución Temporal en la resolución de la quinta tarea. primero, bastante usado por Úrsula, ya que el propio concepto de Estado se muestra superfluo para ella, atribuye la Evolución al propio Sistema. La alumna Eva parece usar este atributo algunas veces, pero por un motivo diferente del adoptado por Úrsula, a saber, economía lingüística, pues ella parece oscilar entre la asociación de la Evolución al Estado y al Sistema (e.4.T. y e.1.T.). Otro atributo presentado por esta alumna y por María es el de que esta Evolución Temporal tiene una causa física.

Mientras Maria resalta el papel de las interacciones, Eva introduce la información sin referenciar el agente causante de la Evolución Temporal. Eva, por otro lado, destaca el papel de las condiciones iniciales en la Evolución Temporal.

En la sexta tarea, tres alumnas (Úrsula, Maria y Eva) evocaron una concepción de que el Sistema es lo que sufre la Evolución Temporal. Conforme se ha mencionado, algunas de ellas evidencian economía lingüística (como Eva y Maria) y otra parece haber asociado la Evolución, de hecho, al Sistema (Úrsula). Es necesaria más evidencia para afirmar con más vehemencia las diferencias entre estas creencias. Eva y Judith, por otro lado, parecen haber asimilado arbitrariamente las ecuaciones de Schrödinger y de Heisenberg a sus estructuras cognitivas, pues la asociación realizada entre la ecuación de Schrödinger al Estado y la ecuación de Heisenberg a las Variables Dinámicas no ha sido argumentada en ningún momento. Debemos resaltar también que la ecuación de Schrödinger involucra solamente el Vector de Estado, mientras la de Heisenberg involucra solamente los operadores, y esto puede haber sido usado implícitamente por las estudiantes para hacer la asociación.

### **4.3. Análisis del conocimiento en la forma operatoria**

A partir de la resolución de los problemas de los alumnos, ha sido posible estudiar los esquemas de asimilación contruidos por los estudiantes. En este sentido, los invariantes operatorios representan los entes que articulan el conocimiento teórico y el práctico en el dominio de una situación. Vale resaltar que la forma presentada de los invariantes operatorios ha sido inferida por nosotros, pues algunos de éstos no han sido explicitados por ellos y han sido inferidos a partir de lagunas dejadas por los estudiantes o desde aparentes contradicciones presentadas por ellos que estaban incluidas bajo la misma concepción.

Estos invariantes son específicos del contenido de Mecánica Cuántica y cada uno de ellos se dirige a una clase de situaciones y, por lo tanto, han sido inferidos pues se aplican a más de un problema y algunas veces a tres o cuatro. Algunos de ellos han sido explicitados durante la instrucción, mientras otros permanecerán implícitos. Las razones por las cuales se mantuvieron implícitos no las sabemos, pero inferimos al menos dos: automatización de una conducta de resolución de problemas (como los de la división del haz de átomos de plata en el experimento de Stern-Gerlach); e inconsciencia del invariante operatorio (como por ejemplo, Estados Cuánticos son probabilísticos pues existen Variables Dinámicas Incompatibles).

A continuación presentamos los posibles invariantes operatorios usados por los estudiantes en la resolución de las tareas.

#### **Posibles invariantes operatorios usados por André**

- La **intensidad** de los haces resultantes de una segunda **medición** en el experimento de Stern-Gerlach será proporcional a las intensidades de los haces resultantes de la primera medición.

- La **superposición** consiste en la coexistencia (**indefinición**) de dos valores definidos para una **Variable Dinámica**. La **medición** lanza el **Estado del Sistema** en uno de los **auto-estados** que se quiere medir.

El primero posible teorema-en-acción usado por André en la resolución de problemas de la segunda tarea nos permite entender las respuestas dadas por él a las primeras situaciones tratando del experimento de Stern-Gerlach.

*“ a) 16.000 átomos en la dirección x positiva. 4000 átomos en la dirección x negativa. b) Después del pasaje por el tercero electroimán, el haz estará necesariamente dividido: parte en la dirección z positiva y parte en la z negativa...”*

El segundo teorema-en-acción usado por André, aunque asociado a un proceso de inferencia, puede ser aclarado y tener su potencialidad explicativa revelada. La inferencia es descrita como:

- “Si  $|s_x\rangle$  es escrito como **Superposición de auto-estados** de  $s_z$ , el es la magnitud indefinida. Como en el estado  $|s_x\rangle$  coexisten valores de  $s_z$ , la coexistencia es indefinida y los valores de  $s_z$ , definidos. Como la variable  $s_x$  es indefinida y su auto-estado es una combinación lineal de auto-estados de  $s_z$ , los **auto-estados**  $|s_z\rangle$  son auto-estados de  $s_z$ .

Siguen abajo algunas citas corroborando el segundo teorema-en-acción y la inferencia conjeturada.

*“[cuál es la variable definida?]  $s_z$ ” (pregunta 5 - tarea 3)”*

*“... es el auto-estado de  $s_z$ ...” (pregunta 5 – tarea 3)*

*“La superposición es la suma de dos estados, siendo que el restante también es un estado. Ello ocurre cuando un objeto simultáneamente posee dos o más valores para una cantidad observable” (pregunta 3 – tarea 3)*

### Posibles invariantes operatorios usados por Úrsula

Como Úrsula ha copiado mucho, sus pocos invariantes operatorios han sido poco desarrollados. Los teoremas-en-acción están enumerados abajo.

- La **intensidad** de los haces resultantes de una segunda **medición** en el experimento de Stern-Gerlach, será proporcional a las intensidades de los haces resultantes de la primera medición;
- La **Superposición de Estados** está asociada a la posesión de varios valores simultáneos en la medición de una Variable Dinámica;
- En Mecánica Cuántica solamente podemos conocer **probabilidades**;

El primer teorema-en-acción, ya encontrado para André, está basado en una respuesta muy semejante a la dada por el alumno a la misma situación-problema.

Creemos factible también que ella conlleve un teorema-en-acción asociado a la superposición de estados entendida  
REIEC Volumen 9 N°o 1 Mes Julio  
Recepción: 18/09/2012

como la coexistencia de distintos valores de una Variable Dinámica o, citando un ejemplo pertinente, el electrón puede estar simultáneamente en muchos lugares (Pantoja, 2011b).

El último teorema-en-acción ignora la posibilidad de que conozcamos Estados de Sistemas Físicos (y, por lo tanto, amplitudes de probabilidad) y que, además, está restringido al caso en que hay mediciones secuenciales de Variables Dinámicas Incompatibles o a las situaciones en las cuales realizamos la medición de una Variable Dinámica para un Sistema cuyo Estado está escrito como una Superposición de auto-estados de esta variable (Pantoja, 2011b). Este teorema-en-acción puede ser obstáculo en el dominio de algunas ideas, como la noción de que la Mecánica Cuántica es predictiva (Carvalho Neto et al., 2009).

### Posibles invariantes operatorios usados por María

- En el aparato de Stern-Gerlach, la división del haz representa la modificación del sistema, debido a la medición de Variables Dinámicas Incompatibles.
- Estados en Mecánica Cuántica siempre son probabilísticos. Solamente es posible, por lo tanto, conocer la probabilidad de que el sistema se comporte de una forma dada.
- Es posible que conozcamos el Estado de un Sistema Cuántico a lo largo del tiempo, pero solamente nos informa de probabilidades.
- No podemos determinar valores simultáneos para las Variables Dinámicas Incompatibles. El conocimiento de una provoca indeterminación de la otra.

El primer teorema-en-acción es usado en varias situaciones, particularmente en el problema 6 de la tarea 2, y es generalizado para otras situaciones. El cuarto teorema-en-acción es la forma generalizada de este teorema. Por ejemplo,

*“Cuando el haz pasa por el primer electroimán en  $s_z$ , resultará igual, 20.000 (–). Cuando el campo magnético estuviera en  $s_x$ , habrá una nueva división en dos haces, con spin positivo  $\frac{\hbar}{2}$  y spin negativo  $-\frac{\hbar}{2}$ ”*

El segundo teorema es restringido, a pesar del importante papel de las probabilidades en Mecánica Cuántica, debemos resaltar que este teorema es restringido. Es necesario que se presente una clase de situaciones en la cual ella podría percibir la restricción del teorema-en-acción formulado. Este teorema-en-acción queda claro cuando analizamos frases de la alumna:

*“... para la Mecánica Cuántica, podemos considerar como ejemplo el experimento de Stern-Gerlach, así, el Estado del Sistema será determinado a través de la función de probabilidad  $|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ ”*

*“La probabilidad está asociada a las amplitudes, teniendo 50% de encontrarnos  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  en una medición de  $s_z$  y, también 50% de  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  en una medición de  $s_x$ ...”*

El tercer teorema-en-acción, aunque sencillo, es importante pues puede facilitar el dominio de conceptos como los de causalidad y previsibilidad, ambos relacionados con la Evolución Temporal. Este teorema-en-acción debe ser, sin embargo, elaborado para incluir el importante concepto de amplitud de probabilidad (Pantoja, 2011b). Es evidenciado por la situación

*“Para que el estado cambie a lo largo del tiempo, es necesario que haya una causa; se verifica eso tanto en la Mecánica Clásica como en la Mecánica Cuántica, no obstante podemos determinar el comportamiento del sistema clásico al saber las condiciones iniciales, no siendo de esta forma para un sistema cuántico que solamente podrá ser probabilístico, o sea, apenas con la probabilidad de saber cómo el sistema puede comportarse”*

#### Posibles invariantes operatorios usados por Eva

- En la Mecánica Cuántica, medir Variables Dinámicas Incompatibles implica una alteración del sistema. Las pérdidas resultantes de estas alteraciones tornan la teoría aleatoria.
- Si Variables Dinámicas no pueden ser simultáneamente determinadas, hay estados independientes asociados a ellas que coexisten. En el proceso de medición, la información acerca de una de las variables es permitida, mientras las otras quedan ‘escondidas’
- Evolución Temporal es un proceso causado por algo.

Para el segundo teorema-en-acción tenemos una cita (que debe ser leída con las debidas puntuaciones o precauciones?) que lo justifica

*“Variables Incompatibles no pueden ser determinadas simultáneamente, por eso cuando medimos una, las otras no resultan determinadas. La Superposición de Estados está asociada a este hecho, mientras medimos unas las otras están allá escondidas pero no pueden ser determinadas, por eso hay la superposición de estados de varias variables incompatibles en estados diferentes en un mismo momento”*

#### Posibles invariantes operatorios usados por Judith

- Estados cuánticos pueden ser superpuestos, siendo ésta la causa de la indefinición ocuriente en la medida.
- Para la alteración del Estado/Variables Dinámicas a lo largo del tiempo hay una causa común entre la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica. Tal alteración es dada por leyes de evolución específicas.
- Estados cuánticos son probabilísticos, debido a las Variables Dinámicas Incompatibles.
- La superposición de estados informa sobre los valores posibles en una medición. Medir es lanzar el sistema en uno de los auto-estados. Las amplitudes de probabilidad nos informan sobre las probabilidades de obtener un valor dado de una Variable Dinámica que se quiera medir.

El teorema-en-acción cuatro es una versión elaborada del primero y es usado para la resolución de los ítems a y b del problema 3 de la tarea 5, pero es evidenciado en otras situaciones. El teorema tres ha sido discutido a lo largo del trabajo y, entonces, no lo discutiremos más. El teorema-en-acción dos, tiene como ejemplo el siguiente extracto:

*“... la Evolución Temporal se dice causal porque, en el caso de la Mecánica Clásica es posible prever, a través de sus leyes, el resultado de la medición de Variables Dinámicas desde que hayan sido determinadas condiciones iniciales en el sistema. En la Mecánica Cuántica lo mismo ocurre considerando algunas informaciones iniciales del sistema, pero, en este caso, debemos tener en cuenta el carácter probabilístico, pues en la Mecánica Cuántica hay Variables Incompatibles”*

## CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDACTICAS

En este trabajo diseñamos una instrucción compuesta de 12 horas sobre conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica, a saber, los de Sistema Físico (objetos físicos - clásicos y cuánticos - e interacciones), Variable Dinámica (Variables Dinámicas Compatibles, Variables Dinámicas Incompatibles y Medición), Estado de un Sistema Físico (Estado de un Sistema Clásico, Estado de un Sistema Cuántico, Auto-estados, Superposición de Estados, Probabilidad y Amplitud de Probabilidad) y Evolución Temporal (Causalidad, Previsibilidad, Ecuación de Schrödinger y Ecuación de Heisenberg), basada en las teorías de David Ausubel y de Gérard Vergnaud. La implementación involucró a cinco estudiantes de grado en “Licenciatura en Física”. Hemos estudiado cómo se asimilan nuevos conocimientos en Mecánica Cuántica desde lo que conocen los estudiantes en Física General de forma implícita (a través de los invariantes operatorios implícitos – el conocimiento en la forma operatoria) y explícita (a través de los subsumidores explícitos en la estructura cognitiva de los estudiantes – el conocimiento en la forma predicativa) y ha sido posible llegar a varias conclusiones y percibir implicaciones didácticas como:

- La mejora significativa de las variables de la estructura. Surgen, no obstante, algunos obstáculos, según el significado atribuido por Bachelard (1996);
- las uniformidades más amplias que las diferencias en algunas etapas como en la asimilación de los conceptos de Sistema Físico y de Variables Dinámicas y menos acentuadas en el caso del aprendizaje del concepto de Estado y, luego, en el dominio del concepto de Evolución Temporal;
- La operación de la mayoría de los alumnos, en la medida de lo posible, en el polo más cercano del aprendizaje significativo, excepto la alumna Ursula que insistió en los procesos de reproducción literal de información, mostrando de esta manera un aprendizaje muy limitado;
- El concepto de probabilidad debe ser introducido a través de la idea de amplitud de probabilidad y debe ser diferenciado, pues el concepto de probabilidad parece ser evocado desde su aspecto



subjetivo (Carvalho Neto et al., 2009; Bao e Redish, 2001), es decir, asociado a la falta de conocimiento de las interacciones y, por lo tanto, relacionado con el azar. Situaciones-problema que muestren que la Superposición de Estados puede generar un auto-estado de una Variable Dinámica dada son fructíferas y esto es obtenido muy fácilmente con el átomo de hidrógeno y con el aparato de Stern-Gerlach;

- El concepto de Evolución Temporal es, a veces, asociado al de Sistema. Para el caso de Eva, ocurrió una oscilación entre la asociación de este proceso al Estado y al Sistema. Discutimos en clase la diferencia entre las ideas y esto puede sugerir dos aspectos: a) un obstáculo natural de asociar la Evolución Temporal a las Variables Dinámicas y éstas vinculadas a los Sistemas Físicos; b) una mera economía lingüística. Para la corroboración de una de las hipótesis necesitamos más investigación;
- El papel del conocimiento previo y del construido queda bastante evidente en la propuesta. Ésta debe ser trabajada en el futuro para facilitar la reconstrucción de estos obstáculos epistemológicos adquiridos. Algunos de ellos pueden ser fácilmente aclarados con la presentación de situaciones-problema potencialmente significativas como las asociadas al átomo de hidrógeno, por ejemplo, o al esparcimiento cuántico simulado por barreras de potencial. Es necesario resaltar que la alta generalidad, incluso para los conceptos clásicos, dificulta la retención de instancias cuánticas específicas.

## REFERENCIAS

- AUSUBEL, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BAO, L.; REDISH, E. Understanding probabilistic interpretations of physical systems: a prerequisite to learning quantum physics. *American Journal of Physics*, 70(3), 210-217.
- BARDIN, L. (2008). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- ÇALISKAN, S.; SEZGIN, G. S.; EROL, M. (2009) Students understanding of some quantum physical concepts. *Latin American Journal of Physics Education*, 3(2), 202-206.
- GRECA, I. M.; FREIRE JR., O. (2003). Does an emphasis on the concept of quantum states enhance student's understanding of quantum mechanics? *Science and Education*, 12(5/6), 541-557.
- GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. (2001). Uma revisão da literatura sobre estudos relativos ao ensino da mecânica quântica introdutória. *Investigações em Ensino de Ciências*, 6(1), 29-56.
- GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.; HESCOVITZ, V. E. (2001). Uma proposta para o ensino de mecânica quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23(4), 444-457.
- OLSEN, R. V. (2002). Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in

Norway. *International Journal of Science Education*, 24(6), 565-574.

PANTOJA, G.C.F; MOREIRA, M.A.; HESCOVITZ, V.E. (2011). Uma revisão da literatura sobre a pesquisa em Ensino de Mecânica Quântica no período de 1999 a 2009. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 4(3), 1-34.

PANTOJA, G.C.F; MOREIRA, M.A.; HESCOVITZ, V.E. (2012). Implementation of a didactic proposal on fundamental concepts of quantum mechanics with students of a professional master's degree in physics teaching. (sometido a publicação).

PANTOJA, G. C. F. (2011b). *Sobre o ensino do conceito de evolução temporal em mecânica quântica*. 344 f. *Dissertação (Mestrado em Ensino de Física)* - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

ROCHA, C. R. (2008). *Sobre o ensino do conceito de estado em cursos introdutórios em mecânica quântica*. 179 f. *Dissertação (Mestrado em Ensino de Física)* - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SINGH, C. (2001). Students' understanding of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 69(8), 885-895.

TSARPALIS, G.; PAPAPHOTIS, G. High-school students' conceptual difficulties and attempts at a conceptual change. *International Journal of Science Education*, 31(7), 895-930.

VERGNAUD, G.; BOOKER, G.; CONFREY, J.; LERMAN, S.; LOCHHEAD, J.; SFARD, A.; SIERPINSKA, A.; WHEELER, D. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Eds.). *Mathematics and cognition: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 14-30.

VERGNAUD, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas*, 26(1), 195-207.

VERGNAUD, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds.). *Learning and teaching mathematics: an international perspective*. Hove: Psychology Press, 1-28.

VERGNAUD, G. A. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181

## APÉNDICE – Tareas propuestas a los en la instrucción

### Pre-test

Nombre:

Formación académica:

Qué entiende usted por:

- Sistema físico?
- Variables Dinámicas?
- Estado de un Sistema Físico?
- Evolución Temporal?

### Tarea 1- Sistemas Físicos



- Haga un mapa conceptual del concepto de Sistema Físico.
- Presente dos ejemplos de sistemas físicos, indicando los objetos que los constituyen, las características externas de los mismos, las interacciones que ocurren en ellos y, también, si el sistema presenta estructura interna. Comente la relevancia del estudio de estos sistemas físicos para el estudio de la Física.
- Dé dos ejemplos de sistemas físicos pertinentes a la Mecánica Cuántica. Discuta la relevancia de estos sistemas.
- Dé tres ejemplos de Variables Dinámicas relativas a cualesquiera áreas de la Física.
- Además de la posición y de la velocidad de la Tierra y del Sol en el ejemplo del par Tierra-Sol, ¿qué otras variables dinámicas asociaría usted al sistema? ¿Porque?
- ¿Qué entiende usted por sistema elemental? ¿Debemos utilizar este concepto apenas como absoluto, o lo podemos adoptar de forma aproximada? Dé un ejemplo de sistema elemental en un contexto dado.

## Tarea 2 – Variables Dinámicas

- Haga un mapa conceptual relacionando los conceptos de Sistema Físico y de Variables Dinámicas ¿Cómo distinguiría usted el concepto de Variables Dinámicas de lo de características externas?
- ¿Qué entiende usted por Variables Dinámicas Compatibles? ¿Qué entiende usted por Variables Dinámicas Incompatibles? ¿Hay alguna relación de las mismas con (o algún reflejo sobre) el Principio de la Incertidumbre?
- ¿Las tres componentes cartesianas ortogonales de posición de un electrón son Variables Compatibles? ¿Y las tres componentes de momentum? Justifique su respuesta. Dé ejemplos de Variables Incompatibles en Mecánica Cuántica.
- En el experimento de Stern-Gerlach, solamente podemos caracterizar los átomos de plata por una de sus componentes de spin ( $s_x$  o  $s_y$  o  $s_z$ ), pues al medir una de las Variables Dinámicas, perdemos la información previa acerca de las otras dos obtenidas en medidas anteriores. ¿Como entiende usted esta afirmación?
- Imagine tres experiencias secuenciales de Stern-Gerlach, con campos magnéticos no homogéneos en las direcciones  $z$ ,  $x$  y  $z$  respectivamente. Un haz de 100.000 átomos de plata pasa por el primer electroimán y resuelta en dos haces, con 80.000 (+) y 20.000 (–) átomos respectivamente.

- a) El haz de menor intensidad pasa por el segundo electroimán. ¿Cuántos átomos espera usted encontrar después de este pasaje, con proyección de spin (+) y cuántos con proyección de spin (–)? ¿En qué direcciones?
- b) Después del pasaje, por el tercer electroimán, del haz con proyección de spin (–) resultante del pasaje por el

segundo electroimán, ¿cómo espera usted encontrar el haz? ¿Cómo expresaría su estado?

- c) Exprese el estado de spin del haz de 80.000 átomos de plata, generado cuando el haz inicial pasa por el primero electroimán.

## Tarea 3 – Estado de un Sistema Físico

- Haga un mapa conceptual (incluso con ejemplos) del concepto de estado de un Sistema Físico, incluyendo la relación de este con los conceptos anteriormente estudiados.
- ¿Cómo entiende usted el concepto de estado de un Sistema Físico: en Mecánica Clásica, en la Teoría Electromagnética, en la Termodinámica y en la Mecánica Cuántica? Exponga las diferencias y similitudes entre estos dominios. Presente ejemplos de Estados de Sistemas Físicos en las áreas de la Física mencionadas arriba.
- ¿Qué entiende usted por Superposición de Estados en Mecánica Cuántica? ¿Cuál es su significancia física? ¿Cómo relaciona la Superposición con el concepto de medición? ¿Y con el de auto-estados?
- Considere un operador  $\hat{H}$  que representa una Variable Dinámica, cuyos auto-estados son  $|E'\rangle$  y cuyos auto-valores  $E'$  son valores de energía. Interprete físicamente la ecuación de auto-valores  $\hat{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ .
- Suponga que en un experimento de Stern-Gerlach se tiene un haz inicialmente preparado en el estado de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $|s_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$ . ¿Cuál es la Variable Dinámica que tiene valor definido en este estado  $s_x$  o  $s_z$ ? ¿Cuál es la probabilidad de obtenerse, en una medición de  $s_z$ , el valor  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ ? ¿Y de obtenerse el valor  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$ , en una medición de  $s_x$ ? ¿El estado  $|s_x, +\rangle$  es auto-estado del operador  $\hat{s}_z$ ; del operador  $\hat{s}_x$ ?

## Tarea 4 – Energía y función hamiltoniana/operador hamiltoniano

- Explique, con sus palabras, las principales diferencias entre la función hamiltoniana y el operador hamiltoniano. No se olvide de mencionar ejemplos concretos.
- Considere la función hamiltoniana en coordenadas esféricas (¡no es preciso hacer cálculos!)

$$H = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \frac{1}{2M} \left[ p_R^2 + \frac{p_\Theta^2}{R^2} + \frac{p_\Phi^2}{R^2 \sin^2 \Theta} \right] + \frac{GmM}{|r - R|}$$

donde  $r$  es la distancia radial de un objeto de masa  $m$  al centro de masa del sistema,  $R$  es la distancia radial de un objeto de masa  $M$  al centro de masa del sistema.  $\theta$  y  $\Theta$  son ángulos polares,  $\phi$  y  $\Phi$  son ángulos acimutales (coordenadas esféricas).  $p_r$ ,  $p_\theta$  y  $p_\phi$  son los momenta conjugados a las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente, mientras  $p_R$ ,  $p_\Theta$  y  $p_\Phi$  son los momenta conjugados a las coordenadas  $R$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$  respectivamente.

a) Identifique la interacción (el término de la ecuación y el tipo de interacción) que ocurre en este sistema, justificando su respuesta.

b) ¿Qué sistemas físicos pueden tener sus Dinámicas tratadas con el uso de la función hamiltoniana expuesta?

c) ¿Qué significa cada término de esta expresión?

- Considere el operador hamiltoniano que representa la interacción que sufre un objeto cuántico de spin  $\frac{1}{2}$  (electrón, átomo de plata):

$$\hat{H} = -\frac{e}{m_e c} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{B}},$$

en que el vector  $\hat{\mathbf{B}}$  caracteriza un campo magnético no uniforme orientado en una dirección que consideraremos ser z (vertical).

a) ¿Con qué objeto o ente físico interactúa el objeto cuántico? Justifique su respuesta.

b) ¿La interacción expuesta es de que naturaleza (gravitacional, electromagnética, floja, fuerte)?

c) Sabiendo que  $\hat{s}_z|s_z\rangle = s_z|s_z\rangle$  es decir, la componente z del spin asume dos valores:  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  o  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  que tal sistema es considerado conservativo, ¿cuántos valores posibles de energía el sistema puede adoptar?

- ¿Cuál la relación existente entre el concepto de Variables Dinámicas Incompatibles y la Superposición de Estados?

## Tarea 5 – Evolución Temporal I

- Construya un mapa conceptual que involucre los conceptos de Sistema Físico, Variables Dinámicas, Estado de un Sistema Físico y Evolución Temporal. Relacione a estos conceptos, otros que juzgue más importantes.
- Comente la afirmación abajo, diferenciando la noción de estado en Mecánica Clásica de la noción de Estado en Mecánica Cuántica. "La Evolución Temporal del Estado de un Sistema Físico es causal, tanto en Mecánica Clásica cuanto en MQ".
- Un átomo de plata con valor inicial de componente x del spin igual a  $\frac{\hbar}{2}$ , es decir, preparado inicialmente en el auto-estado  $|s_x = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ , es puesto a interactuar con un campo magnético no uniforme orientado en la dirección z. La interacción es del tipo

$$\hat{H} = -\frac{e}{m_e c} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{B}},$$

Siendo e la carga del electrón, m su masa, c la velocidad de la luz,  $B_z$  la intensidad del campo magnético y  $s_z$  el operador de proyección de spin en la dirección z.

- El Estado del electrón en un instante de tiempo t, posterior al inicial, donde  $\omega = \frac{eB_z}{m_e c}$ , es:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\omega t/2}}{\sqrt{2}} |s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} |s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$$

a) Si en el instante de tiempo inicial, tomado en  $t = 0$ , fuera realizada la medida de la Variable Dinámica  $s_x$ , ¿Qué se obtendría?

b) Si en el instante de tiempo inicial tomado en  $t = 0$ , fuera realizada la medida de la Variable Dinámica  $s_z$ , ¿Qué se obtendría?

c) Sabiendo que (el auto-estado)  $|s_y = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ , ¿en que instantes de tiempo una medición de la Variable Dinámica  $s_y$  resultará en el valor definido  $\frac{\hbar}{2}$ ? En estos instantes, ¿Cuál será la probabilidad de obtener el valor de  $s_y$  negativo?

d) En el instante de tiempo  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , ¿Alguna Variable Dinámica tendrá valor definido? Justifique su respuesta.

- ¿Cuál es el papel común de las ecuaciones de Schrödinger, de Maxwell e de Newton?

## Tarea 6 – Evolución Temporal II

- Construya un mapa conceptual que involucre los conceptos de Sistema Cuántico, Variables Dinámicas, Estado de un Sistema Cuántico y Evolución Temporal. Relacione a estos conceptos otros que considere importantes. Acuérdesse de que este mapa debe articular tales conceptos de acuerdo con el contenido de Mecánica Cuántica presentado.
- Considere el operador hamiltoniano de una partícula cuántica libre de masa m en el espacio tridimensional en coordenadas cartesianas ortogonales,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2].$$

Se sabe que las componentes de momentum ( $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ ) son Variables Dinámicas Compatibles, luego existen auto-estados de  $\hat{H}$  simultáneos de las mismas. Se sabe, aun, que la energía es auto-valor del operador hamiltoniano y es una función del momentum. Podemos, entonces, escribir el estado de la partícula libre en términos de auto-estados de momentum.

Considere ahora el caso unidimensional (operador  $p_x$ , denotado simplemente  $\hat{p}$ ). Suponga que preparemos el sistema con un valor de momentum  $p'$ , es decir,

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\delta p'}} \int_{p'}^{p'+\delta p'} |p'\rangle dp'$$

a) En este instante de tiempo ( $t = 0$ ), ¿qué podemos afirmar acerca de la posición de esta partícula libre? ¿Qué relación puede ser establecida con el concepto de trayectoria clásica?

b) El Estado del Sistema cambia a lo largo del tiempo, presentando posteriormente la siguiente configuración:

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\delta p'}} \int_{p'}^{p'+\delta p'} \exp\left[-\frac{iE(p)t}{\hbar}\right] |p'\rangle dp'$$

¿Qué valor de momentum se obtendrá en el proceso de medida de esta Variable Dinámica? Justifique su respuesta, acordándose de que para una partícula libre, el momentum es conservado.

c) ¿Cuál es la relación del concepto de función de onda con el de estado del sistema? ¿Cuál es el significado físico de la función de onda?

- Dadas las ecuaciones de Schrödinger y de Heisenberg, respectivamente:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} [\hat{A}_h(t)] = [\hat{A}_h(t), \hat{H}_h(t)] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\hat{A}_h(t)]$$

comente acerca del carácter de Evolución Temporal presente en las dos.

**Glauco Cohen Pantoja**

Professor Asistente de Física del Instituto de Ciencias de la educación, UFOPA, Santarém - PA.

Pos-grado (en curso) en Enseñanza de la Física. Nivel - Doctorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS - Investigación no finalizada. Título del trabajo: Influência das UEPS no domínio do conhecimento operatório do conceito de Campo Eletromagnético a partir das equações de Maxwell.

Pos-grado en Enseñanza de la Física. Nivel - Master. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS - 2011, Porto Alegre, RS, Brasil. Proyecto: Sobre o conceito de evolução temporal em Mecânica Quântica.

Graduación en Física. Universidade Federal do Pará - UFPA - 2009, Belém, PA, Brasil