Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Interpretando estrategias en Resolución de Problemas desde dos constructos teóricos: Un estudio de caso

Miguel A. Rodríguez[1], Marcela Parraguez[2]

mrodriguez@upla.cl , marcela.parraguez@ucv.cl

[1] *Universidad Playa Ancha, Av. Playa Ancha 850*
Valparaíso, Chile.
[2] *Instituto de matemática Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Brasil 2950,*
Valparaíso, Chile.

Resumen

En este artículo se establecen directrices para interpretar estrategias de Resolución de Problemas (RP) desde los constructos teóricos concepto imagen y concepto definición de Vinner, y praxeologías de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Desde un estudio de caso, se analizan las respuestas a un problema planteado en una olimpiada (ORPMAT) que convoca a estudiantes cuyas edades fluctúan entre los 11 y 17 años, en la región de Valparaíso, Chile. Como producto se propone un indicador, PECDIS, que permitirá identificar caracterizaciones que expliquen el uso de una estrategia en RP en estudiantes y una rúbrica para evaluar el desempeño en RP en distintos contextos.

Palabras clave: Estrategia, Resolución de Problemas, TAD, Vinner.

Interpreting Strategies in Problem Solving from two theoretical constructs: A Case Study

Abstract

This article establishes guidelines for interpreting strategies of problem Solving (RP) from the theoretical constructs concept image and concept definition of Vinner, and praxeologies of the Anthropological Theory of Didactics. From a case study, we analyzed the answers to a problem raised in the Olympics (ORPMAT) that gather students from 11 to 17 years old, in the region of Valparaíso, Chile. As a result an indicator PECDIS, enabling identification characterizations that explain the use of a strategy in RP in students and a rubric to evaluate performance in RP in different contexts is proposed.

Keywords: Estrategy, Solving problems, TAD, Vinner.

L'interprétation de stratégies de Résolution de Problèmes depuis deux approches théoriques. Une étude de cas

Résumé

Dans cet article on définit les directrices pour l'interprétation de stratégies de Résolution de Problèmes (RP) depuis les approches théoriques du concept-image et du concept-définition de Vinner, ainsi que des praxéologies de la Théorie Anthropologique de la Didactique. Dans une étude de cas, on analyse les réponses à un problème posé lors d'une olympiade (ORPMAT) qui a rassemblé des élèves âgés de 11 à 17 ans, dans la région de Valparaiso (Chili). En tant que produit, on propose l'indicateur PECDIS qui a permis d'identifier des caractérisations expliquant l'emploi d'une stratégie en RP chez des élèves, ainsi qu'une rubrique pour évaluer les performances en RP, dans des contextes différents.

Mots clés: Stratégie, Résolution de Problèmes, TAD, Vinner.

Interpretando Estratégias na resolução de problemas a partir de duas construções teóricas: Um Estudo de Caso

Resumo

Este artigo estabelece as diretrizes para interpretar estratégias de resolução de problemas (RP) da constructos teóricos imagem conceito e conceito definição Vinner e praxeologies da Teoria Antropológica do Didático. A partir de um estudo de caso, as respostas para um problema levantado nas Olimpíadas (ORPMAT) que atrai estudantes cujas idades variam entre 11 e 17, na região de Valparaíso, Chile são analisados. Como resultado, um indicador PECDIS, permitindo caracterizações de identificação que explicam a utilização de uma estratégia de estudantes de RP e uma rubrica para avaliar o desempenho em RP em diferentes contextos é proposto.

Palavras chave: Estratégias, Resolução de problemas, TAD, Vinner.

1. UNA MIRADA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMA EN MATEMÁTICA

La Resolución de Problemas (RP), como actividad humana, se remonta a los inicios de la humanidad, dado que en registros como el Papiro de Rhind los problemas ya están presentes en contextos de agrimensura o del comercio a través del uso de ecuaciones (Cruz, 2006). Cruz (2006) destaca como matemáticos en distintas épocas se preocuparon de la RP desde la matemática. Por otro lado, el desarrollo de la psicología cognitiva, ha permitido entender los procesos cognitivos que involucra la RP; destacando los trabajos de Spearman, Thurstone, Guilford, Gardner y Sternberg, en el marco del desarrollo de la inteligencia, la psicometría y el procesamiento de la información (Cruz, 2006).

Desde un punto de vista educativo, Polya (1990) propone cuatro fases en la RP, a saber: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Si bien la propuesta de Polya (1990) es la base para los trabajos en RP, donde se enfatiza el empleo de heurísticas y la explicitación de estrategias en el proceso de resolución, es en la propuesta de Schoenfeld (1994) donde se pone de relieve los procesos metacognitivos. La propuesta de Polya (1990) ha dado lugar para que otros autores no sólo aborden el tema de la RP en otras áreas, como Ciencias Sociales y Ciencias de la Naturaleza (Pozo, et al., 1994), sino que también ha servido para desarrollar y estimular otros métodos de resolución. En este sentido, se puede mencionar a Mayer (Cit. en Pozo et al., 1994: 64) quien reduce el método propuesto por Polya (1990) en dos grandes procesos: traducción y solución del problema.

En relación a experiencias de aprendizaje se menciona el aporte de Rubenstein quien implementó, en el año 1969, un curso a estudiantes universitarios para enseñarles técnicas en RP; estableciendo en 1980 algunas directrices en relación a la enseñanza de estas técnicas.

En cuanto a investigaciones, el trabajo de la enseñanza de heurísticas y estrategias en RP que Schoenfeld realiza en 1979 y 1980, desde un estudio de caso con grupo control y experimental, establece la necesidad de fortalecer las heurísticas desde la explicitación de estrategias que orienten el proceso de RP.

Los educadores japoneses en cuanto a la enseñanza en RP se enmarcan en la metodología de estudio de clases. Dicha metodología está sustentada en principios más bien generales de la psicología cognitiva de los años 60 y 70 donde la puesta en escena de un problema requiere de una postura constructivista del aprendizaje dando cabida a los procesos de representación conceptual como los propuestos por Bruner y un marcado componente social.

Finalmente cabe mencionar que el concepto de problema se sitúa en los marcos teóricos de la Didáctica de la Matemática (DDM), Espacio de Trabajo Geométrico, Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), la Teoría de los Campos Conceptuales, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), desde distintas concepciones; como por ejemplo tarea en la TAD y situación adidáctica en la TSD.

2. LA RESOLUCIÓN DEP ROBLEMAS EN EL CONTEXTO EDUCACIONAL

Desde una perspectiva actual, la misión de los profesores de matemática no debe estar abocada sólo al desarrollo conceptual de su disciplina en cuestión, sino que además, debe promoverse el desarrollo de un pensamiento matemático como está declarado en MINEDUC (2007). Pero ¿qué es pensar matemáticamente?, probablemente la respuesta a esta pregunta encuentre –como en muchos otros conceptos– distintas vertientes o énfasis. Para este artículo, pensar matemáticamente será en esencia el poner de manifiesto tanto aspectos cognitivos como afectivos en situaciones diversas, como se plantea en el Modelo T. ¿Cómo lograr perseverar, relacionar, inferir, argumentar, modelar, sorprenderse desde una matemática que a veces resulta ser, desde la forma como se la presenta, sólo mecánica y algorítmica? Siempre se percibe el mismo objetivo, llegar a una única respuesta utilizando una ecuación o fórmula. La RP puede ayudarnos a dar respuesta a la interrogante planteada. En la actualidad, ésta es considerada una rama fundamental de la educación matemática y puede ser vista como el sustrato para el desarrollo tanto de capacidades como de valores y actitudes.

La RP puede ser planteada como una forma de pensar, donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar variadas estrategias en su aprendizaje de la matemática. Donde "problema" lo asumiremos, desde una tendencia más bien general, como una situación o enunciado que demanda de una respuesta, no siempre única, y cuya forma de abordarlo no es evidente, aunque comprenda que hacer; siendo el concepto de estrategia un elemento clave en el desarrollo de RP así como también para esta investigación.

Recepción: 07/03/2014 *Aceptación: 02/10/2014*

3. ESTRATEGIA EN RP Y REFERENTES TEÓRICOS PARA SU INTERPRETACIÓN

3.1. El concepto de estrategia, caracterización y tipos

El término estrategia, según la real academia española, procede del griego y etimológicamente significa “el arte de dirigir las operaciones militares”. A lo largo del tiempo se ha perdido la connotación militar, y se ha extendido a otros ámbitos y está más en consonancia con las actuaciones realizadas para el logro de un objetivo o en la resolución de un problema. En ambos casos, las estrategias se desarrollan a través de una serie de acciones.

El uso, aplicación y desarrollo de estrategias ha variado, de modo tal que las encontramos en situaciones de la vida cotidiana, en la laboral, científica y en la enseñanza de cualquier disciplina del conocimiento, por citar algunos casos. En el plano educativo en el que se ubica esta investigación, se distinguen diferentes tipos de estrategias como son: estrategias de aprendizaje y de enseñanza, que consisten de lo siguiente:

i) Estrategias de aprendizaje. Son procesos de toma decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplimentar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción.

ii) Estrategias de enseñanza. Serie de acciones sistemáticamente organizadas por el profesor y que tienen la intención de producir aprendizaje en los estudiantes.

Otro aspecto no menos importante acerca de las estrategias, es que han sido conceptualizadas desde diferentes enfoques y puntos de vista. En la investigación, los trabajos pioneros que se han dado a la tarea de caracterizar este concepto, es el de Bruner, quien sostiene que una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención, utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse de que se den esos resultados y no otros.

En investigaciones posteriores, Montanero y León (2003) distinguen dos acepciones del término estrategia: la sustantiva y la adjetiva. La primera, se refiere al conjunto de operaciones ordenadas, aunque con un carácter flexible. Y la segunda, se refiere a determinadas formas de actuar. Asimismo destacan que la complementación de ambas acepciones origina algunas características esenciales:

.-La serialidad. Se relaciona con la forma de conocimiento procedimental, es decir, de las secuencias de las acciones.

.-La interactividad. Se asocia a la toma de decisiones en condiciones específicas.

.-La funcionalidad. Se refiere a una función de mediación y regulación de los procesos cognitivos.

Escoriza (2003) manifiesta que las estrategias son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Distingue las siguientes características sustanciales en las estrategias:

a) Son secuencias organizadas de objetivos, acciones y operaciones cognitivas.

b) Forman parte del conocimiento procedural, es decir, nos indica cómo realizar una acción cognitiva o una acción determinada con la finalidad de conseguir el logro de un objetivo específico.

c) Son procesos deliberados, es decir, son controlados y regulados por una cognición intencional, las acciones y operaciones son guiadas por las estrategias haciendo posible su regulación y evaluación en la progresión hacia el objetivo previsto.

d) Son procesos propositivos pues su ejecución está orientada al logro intencional de determinados objetivos. Especificar los objetivos de la actividad es una cuestión esencial en el conocimiento estratégico pues implica intencionalidad y autocontrol.

e) Son secuencias de operaciones mediadas simbólicamente, en esto el lenguajes juega un papel primordial, ya que regula el comportamiento y con ello supone que la estrategias sean realizadas de manera consciente y por tanto bajo control voluntario.

Un aspecto importante de la caracterización de Escoriza es que reconoce tres características fundamentales en la lectura (de un problema):

.-Cantidad de conocimiento del lector.

.-Calidad de lo que sabe.

.-Diversidad de los conocimientos previos que posee.

Estas características contribuyen en una adecuada interpretación y comprensión del problema.

Por otra parte, en la Didáctica de la Matemática también se han realizado estudios que se han ocupado por caracterizar este concepto, uno de ellos es Cervera (1998), quien afirma que estrategia es el conjunto de acciones que en determinado orden realiza un alumno para obtener la respuesta de un problema con un mínimo de esfuerzo, previendo en el caso de que los resultados no sean deseados; Cabañas (2000) menciona que las estrategias son actividades preconcebidas para realizar o ejecutar una acción y de alguna manera se trata de lograr unos objetivos y no otros; Olave (2005) señala que estrategia es el plan o un curso de acción conscientemente deseado y determinado de forma anticipada con la finalidad de asegurar el logro de los objetivos, un conjunto de actividades y procedimientos dirigidos hacia un fin.

De las definiciones anteriores, se perciben rasgos comunes de las estrategias:

a) Secuencia de actividades u operaciones mentales

b) Planes dirigidos a la consecución de una meta

c) Acciones conscientes e intencionales

d) Implican procesos de toma de decisiones ajustados al objetivo.

Por otro lado, una estrategia es conocimiento procedural ya que indican cómo realizar una acción, son deliberados, controlados y orientados hacia un objetivo (Escoriza, 2003).

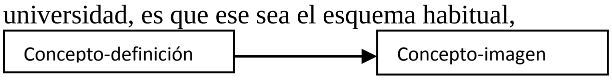
3.2. Dos constructos teóricos para interpretar las estrategias en RP

La interpretación de una estrategia requiere de la utilización de nociones y mecanismos apropiados que permitan describir sus distintos componentes, desde el saber matemático, que emerge de la actividad matemática, inserta en el problema, así como de las concepciones que los estudiantes tienen de las ideas que se explicitan en la resolución de este.

Para el análisis o interpretación de las estrategias de RP en matemáticas, se han considerado dos constructos teóricos; concepto imagen y concepto definición de Vinner (Tall y Vinner, 1981) y la teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) que procurarán identificar elementos para analizar una estrategia en la RP.

A la luz de las distintas definiciones de estrategia que se han mencionado justificamos, por un lado, que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) permite describir la actividad matemática y el saber que emerge de la estrategia en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas; y el concepto definición e imagen de Vinner, nos procura interpretar el grado de interacción y su incidencia con la RP en sí.

Hacia principios de los años ochenta, S. Vinner introdujo la terminología *concepto imagen* y *concepto definición* asociadas a cualquier concepto matemático. “Concepto imagen es la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados y concepto-definición es la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto” (Tall y Vinner, 1981: 152). El mismo Vinner explica que el concepto-imagen se va “llenando" gradualmente, pero no necesariamente refleja todos los aspectos del concepto-definición. Sin embargo, lo que esperan muchos profesores de enseñanza secundaria o de universidad, es que ese sea el esquema habitual,



es decir, que el concepto-imagen se forme en las mentes de los aprendices a partir del concepto definición y que esté completamente controlado por éste" (Vinner, 1991: 71). Lo que en realidad suele ocurrir es que coexisten ambas imágenes conceptuales, que además pueden incluir aspectos contradictorios. Esas contradicciones sólo se manifiestan cuando sean evocadas simultáneamente. El comportamiento deseable de complementariedad entre imagen y definición para producir una respuesta, que esquemáticamente será el que muestra el siguiente diagrama, Figura 2, (Vinner, 1991: 72).

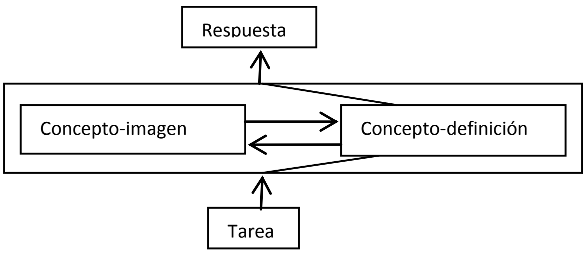


Figura 2: Interacción entre la definición y la imagen en RP.

Es reemplazado, cuando no existe una verdadera integración entre las imágenes conceptuales, por el más *natural e intuitivo*, Figura 3:

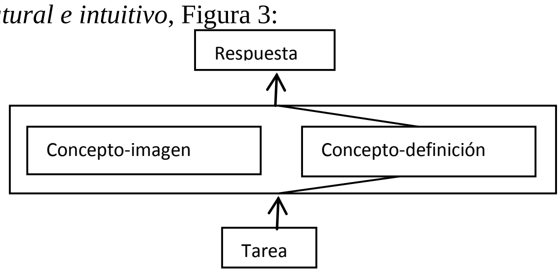


Figura 3: Respuesta intuitiva en RP.

Y sólo los problemas no rutinarios, aquellos en que los conceptos-imagen incompletos se perciben como equivocados, pueden estimular a referirse al concepto-definición. Tales problemas son raros y cuando se proponen a los estudiantes los suelen considerar improcedentes o injustos. Por tanto, “no parece haber nada que tienda a cambiar los hábitos comunes de enseñanza que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos” (Vinner, 1991: 73).

El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera *comprensión* del concepto, tal como se ha puesto de manifiesto en numerosos trabajos, algunos relativos a cuestiones más o menos básicas del Análisis Matemático (Azcárate y Camacho, 2003), Figura 4.

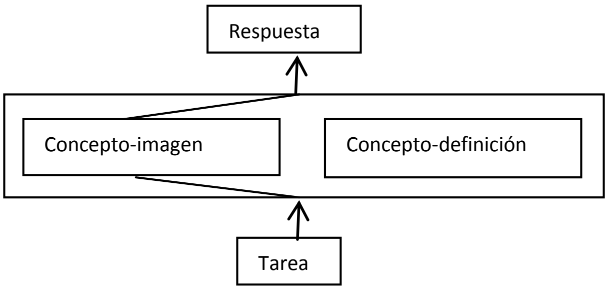


Figura 4: Deducción puramente formal en RP.

Chevallard (1999), inicia la TAD como un modelo que describe cualquier actividad humana en atención a una praxeología, en particular el saber matemático y, de manera particular, el saber escolar se puede describir en términos de praxeologías, las que se desarrollan como respuestas a una tarea o a un conjunto de tareas. Se puede afirmar, por tanto, que el saber matemático se construye en torno a la búsqueda de la respuesta a esas tareas (Chevallard, 1999).

El modelo epistemológico de la TAD postula que una persona frente a una tarea problemática, usa y construye matemáticas. Es así que, el término praxeología, como proceso y producto de la actividad matemática, hace referencia explícita al hecho de que el “saber” y el “saber hacer” son ambos elementos constituyentes tanto de la actividad matemática desarrollada como del producto logrado como resultado, siendo además proceso y producto aspectos difícilmente distinguibles (Chevallard, 1999).

Las praxeologias tienen dos elementos constituyentes: la praxis, saber o saber hacer, que engloba un cierto tipo de problemas que se estudian, así como las técnicas para resolverlos; y el logos o saber, que se refiere a la tecnología necesaria para la descripción, explicación y justificación de las técnicas, así como a la teoría, o el argumento formal, que permite justificar dicha tecnología (Chevallard, 1999).

3.3. Un ejemplo a las interpretaciones de posibles estrategias a un problema específico

Problema: Determine la suma, si es que existe, de:

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots$$

El objetivo de este problema es describir y analizar las estrategias de resolución desde los elementos teóricos que propone la TAD (Chevallard, 1999) y el referente teórico concepto imagen y concepto definición propuesto por Vinner (Tall y Vinner, 1981).

Considerando distintas estrategias se proponen diferentes interpretaciones, desde estos referentes teóricos, para el tipo de respuesta que puede dar un estudiante, de 7° básico hasta un estudiante de enseñanza universitaria, en relación al problema ya planteado.

i) Primera estrategia: Doblar una hoja de papel cuadrada, haciendo coincidir un par de los bordes paralelos de la hoja y luego el otro.

Utilizando la estrategia se obtiene un cuarto de la hoja de papel. Al desdoblar y marcar uno de los cuartos en que fue dividida la hoja de papel, ésta se vuelve a doblar. Luego, al realizar los dos dobleces sucesivos al cuarto de la hoja de papel, se obtiene un cuarto de un cuarto de la hoja; al desdoblar y marcar, sobre un nuevo cuarto, un cuarto de un cuarto de la hoja, Figura 5, se comparan las partes del mismo tamaño para establecer, desde la regularidad de las regiones seleccionadas, que la respuesta a la suma es $\frac{1}{3}$.

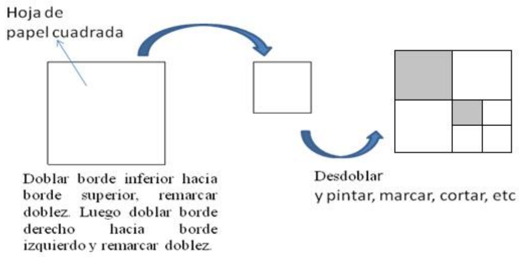
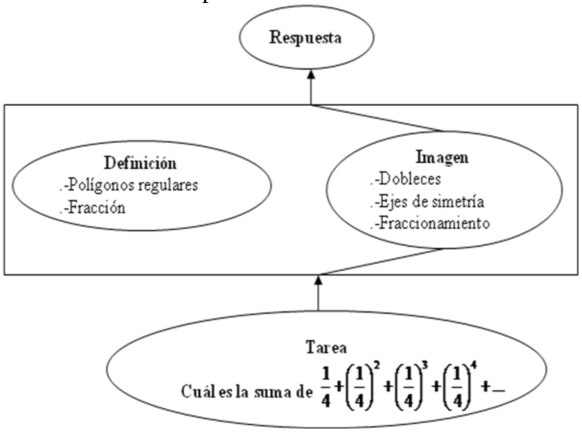


Figura 5: Representación del uso de dobleces para abordar el problema.

Interpretación desde Vinner



Interpretación desde TAD

Técnica: Dobleces a una hoja de papel cuadrada haciendo coincidir sus bordes paralelos para dividirla en partes iguales.
Tecnología: Ejes de simetría, fracción y Razón.
Teoría: Polígonos regulares.

ii) Segunda estrategia: Dividir una región cuadrada, delimitada por un cuadrado de lado unitario, en cuartos.

Seleccionar un cuarto y repetir el proceso de división sobre un nuevo cuarto, en concordancia con los sumandos de la expresión numérica, Figura 6.

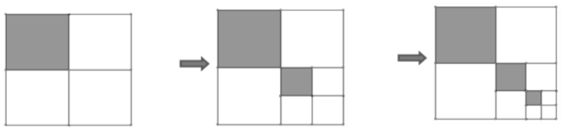
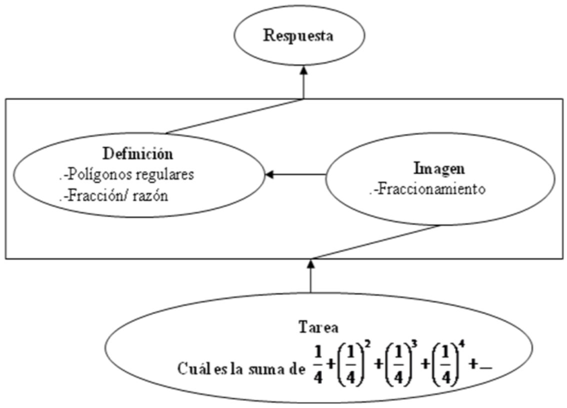


Figura 6: Fraccionamiento de una región cuadrada en cuartos

Interpretación desde Vinner



Interpretación desde TAD

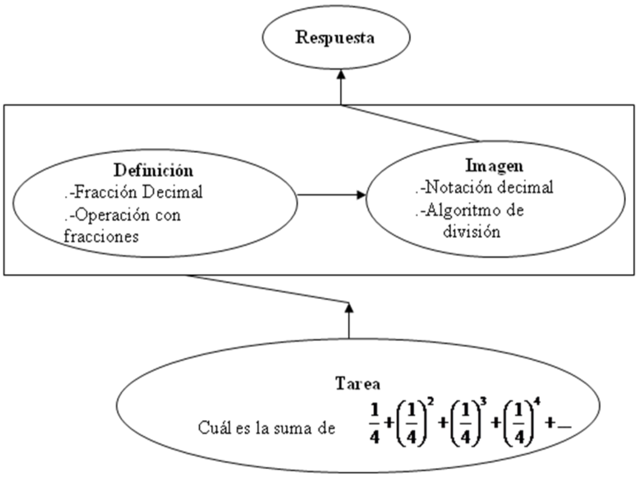
Técnica: División de una región cuadrada en regiones congruentes.
Tecnología: Punto medio, simetral de un trazo y área de una región cuadrada.
Teoría: Polígonos regulares.

iii) Tercera estrategia: Obtener una aproximación de la expresión numérica, transformando las potencias a una fracción y éstas a una expresión decimal.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots \rightarrow 0{,}25 + 0{,}0625 + 0{,}015625 + \ldots$; luego al sumar progresivamente los números decimales observar la regularidad 0,33… y establecer que la suma de la expresión numérica es $\frac{1}{3}$.

Recepción: 07/03/2014 *Aceptación: 02/10/2014*

Interpretación desde Vinner



Interpretación desde TAD

Técnica: Calcular potencias de una fracción y
Luego transformar dicha fracción a un número decimal.
Tecnología: algoritmo de la división.
Teoría: El cuerpo de los números racionales

iv) Quinta estrategia: Estableciendo una regularidad al manipular igualdades.

$$S_1 = \frac{1}{4}$$

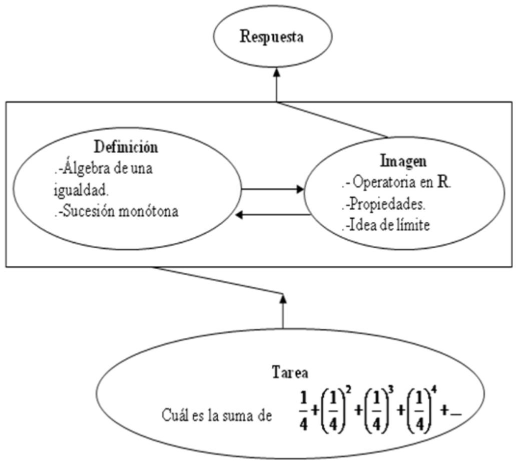
$$S_2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} /\cdot \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{16}+\frac{1}{64}$$
$$\Rightarrow S_2 - \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{4}-\frac{1}{64}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4}S_2 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^2}\right) /\cdot \frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64} /\cdot \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}S_3 = \frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$$
$$\Rightarrow S_3 - \frac{1}{4}S_3 = \frac{1}{4}-\frac{1}{256}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4}S_2 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^3}\right) /\cdot \frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^3}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

De las expresiones anteriores, se puede apreciar que: a partir de S_2 (suma de dos términos de la serie), se repite la siguiente secuencia: multiplicar por un cuarto y luego restar ambas igualdades para obtener tres cuartos de S_2. Finalmente se multiplica por cuatro tercios para establecer el S_2. Así, una regularidad que se puede generalizar desde el uso de una variable para luego pensar en el “límite” de la expresión para un valor tan grande de la variable como sea posible.

Interpretación desde Vinner



Interpretación desde TAD

Técnica: Trasformar una igualdad en otra para eliminar términos intermedios de la expresión original, reescribiendo la igualdad original para establecer una regularidad y su generalización.
Tecnología: Álgebra de igualdades y concepto de límite.
Teoría: **R** como cuerpo ordenado y completo.

En definitiva lo que se persigue con la TAD es poder describir y situar la actividad matemática de un estudiante a través de lo que plasma en un cuadernillo de trabajo desde una praxeología y como ello está en sintonía con lo que está declarado en los programas de estudio vigentes en Chile y que se declara en el ajuste curricular. Por otro lado desde lo que propone Vinner, ver cómo interactúa el concepto definición y el concepto imagen en función de los argumentos que se esgrime en cada respuesta desde lo que se despliega al utilizar una estrategia.
Es importante mencionar que un avance de esta investigación se publicó en las actas de la VII CIBEM.

4. LA OLIMPIADA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICA COMO UN CASO DE ESTUDIO EN ESTA INVESTIGACIÓN

ORPMAT (Olimpiada de Resolución de Problemas en Matemáticas) es una actividad anual que organiza la carrera de Pedagogía en Matemática de la Universidad de Playa Ancha (UPLA), Campus San Felipe, en Chile. El principal objetivo que se persigue con ORPMAT es mantener un punto de encuentro entre establecimientos municipales y subvencionados de la quinta región cordillera y la UPLA para indagar en el uso de estrategias en RP y su relación con el contenido matemático que despliegan los estudiantes en los cuadernillos de trabajo que se utilizan. Por otro lado, crear un espacio para reflexionar en torno a la RP como vehículo de aprendizaje, con los profesores asistentes al evento, desde un taller dirigido a éstos en el marco de la ORPMAT. El análisis de los cuadernillos pretende ser una herramienta para establecer y clasificar las estrategias utilizadas y documentar su relación con el contenido matemático que se despliega cuando se resuelve un problema.

Recepción: 07/03/2014 *Aceptación: 02/10/2014*

Por otro lado, establecer directrices para incorporar y fortalecer el proceso formativo de los estudiantes de pedagogía en matemática, reflexionando con ellos la selección de problemas para configurar los cuadernillos de la ORPMAT y luego, analizar la información que despliegan los y las participantes; en cuanto a estrategias y conocimiento matemático utilizado, desde lo que plantea el ajuste curricular (MINEDUC, 2012).

4.1. Justificación del caso de estudio

La identificación, caracterización y análisis de las estrategias en RP, desde estos dos referentes teóricos, procura describir con mayor precisión procesos que conlleva la RP o situaciones problemáticas presentes en esta u otro tipo de instancias, a fin de mejorar procesos de enseñanza y fomentar aprendizajes matemáticos que apunten a desarrollar o estimular un pensamiento matemático. En este contexto se sitúa nuestro reporte de investigación. Interesa comprender como se articula el conocimiento matemático, que estudiantes del sistema escolar, despliegan en los cuadernillos de ORPMAT cuando resuelven problemas matemáticos. Por otro lado, nos interesa identificar y analizar las estrategias desde los dos referentes teóricos ya descritos, cuando se resuelve un problema de matemática. Para ello, nos planteamos las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de estrategias utilizan estudiantes de establecimientos educacionales municipales y subvencionados de la quinta región cordillera cuando resuelven problemas matemáticos de la prueba ORMAT? ¿Qué tipo de conocimiento matemático se despliega desde una estrategia en RP?

4.2. El Estudio de caso como Método de investigación

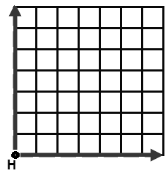
La investigación se inscribe en un estudio de casos, el cual es considerado como una forma de estudiar a un individuo o a una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa y detallada posible (Castillo, 2008).

Este tipo estudio es considerado como un método de investigación que facilita la búsqueda de respuestas respecto del "cómo" o del "por qué" de los hechos, ya que se centra en el análisis profundo de uno o varios casos específicos. Por ello, lo consideramos como un método adecuado para llevar a cabo nuestra investigación, ya que nos permite profundizar en el entendimiento de los procesos desarrollados por los estudiantes durante la RP matemáticos, sin buscar una generalización de los resultados, sino más bien, una caracterización de estrategias y los despliegues matemáticos asociados, desde dos referentes teóricos.

Los participantes considerados para investigación fueron 32 estudiantes de enseñanza media, cuyas edades fluctuaban entre los 13 y 14 años, los que fueron seleccionados previamente en sus respectivos establecimientos educacionales para participar de la fase final de ORPMAT, que se efectuó en la universidad. La selección de los estudiantes partícipes del caso atendió a los criterios siguientes: a) Participantes de la ORMAT 2010; b) Cumplir con el rango de edad establecido por la ORMAT; c) Participación voluntaria en las olimpiadas; y quienes además d) resolvieron de manera individual el problema que a continuación se analiza.

4.3. Un problema en ORMAT 2010 y su análisis a la luz de los dos referentes teóricos

Para este reporte se presenta el análisis a uno de los problemas planteados en la versión ORPMAT 2010, del cual se describen estrategias que cuatro estudiantes, de manera individual, plasmaron en su cuadernillo de trabajo. Dicho problema se ha denominado "la hormiga en el plano cartesiano" y el cual se enuncia a continuación:



El Problema de la Hormiga: Una Hormiga vive en el origen del plano cartesiano. Un día decide salir de excursión prometiendo cumplir las siguientes reglas: a) El primer día avanzará en línea recta una unidad y, a partir del segundo día, cada día andará una unidad más que el día anterior. b) Todas las noches pernoctará en un lugar con coordenadas enteras. c) Durante su recorrido nunca cruzará por ningún lugar por el que haya pasado antes d) En todo su recorrido nunca cruzará ninguno de los dos ejes coordenados. e) Al iniciar su recorrido cada mañana, la hormiga cambiará la dirección que llevaba con respecto al día anterior.

¿Si la hormiga cumple todas las reglas, existe algún recorrido que le permita volver al punto de partida?

4.4. Un análisis a Priori del Problema

Se solicita encontrar algún recorrido, que permita a la hormiga –bajo ciertas condiciones dadas– volver al punto de partida. La intención explícita de este problema es, enfrentar al estudiante a una situación donde, dar respuesta, requiere de la comprensión de los conceptos involucrados, en este caso: punto, coordenadas de un punto en el plano cartesiano, distancia, teorema de Pitágoras, trayectoria; para así trazar el recorrido de la Figura 7, como un polígono.

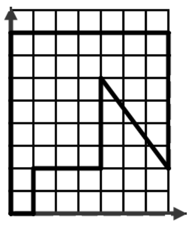


Figura 7: Recorrido de la hormiga bajo las condiciones dadas

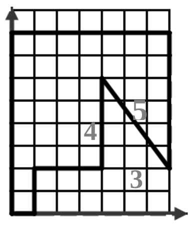


Figura 8: Números pitagóricos en el recorrido de la hormiga

Interpretar la solución que se indica en las dos figuras anteriores, Figuras 7 y 8, desde la perspectiva de Vinner, significa una articulación entre la figura imagen del recorrido de la hormiga con los números pitágoricos.

5. DISCUSIÓN: DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES, ANÁLISIS A POSTERIORI

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, seleccionamos 4 respuestas de los 32 estudiantes participantes en ORMAT y dispuestos en nuestro caso de estudio, haciendo notar que el resto de las respuestas se circunscribe a las estrategias que a continuación se analizan.

5.1. Análisis general a la respuesta 1

En la Figura 9 se muestra que el camino dispuesto como el recorrido de la hormiga, interactúa con la definición matemática de poligonal. Esto, a la luz de la estrategia utilizada por el estudiante de dibujar segmentos horizontales y verticales produce que la respuesta dada por el estudiante sea: *"no existe recorrido"*.

Figura 9: Concepto imagen con interacción con concepto definición de poligonal.

En la Figura 9 se aprecia cómo a través de una poligonal escalonada se muestran algunas de las condiciones que la hormiga debía cumplir en su desplazamiento y se deja entrever que el problema no tiene solución dado que se va configurando una figura abierta. Probablemente si se unen los extremos de la poligonal de la Figura 9, se dará paso a la Figura 10 para obtener una figura cerrada, la cual nos lleva a no tener respuesta al problema ya que esta figura cerrada no es un polígono; pero pone de manifiesto la posibilidad de hacer un trazado oblicuo y conectar con la idea de hipotenusa de un triángulo rectángulo.

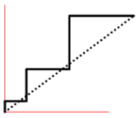


Figura 10: Uniendo los puntos extremos de la poligonal escalonada.

Por otro lado, si se intenta romper con la idea de escalón, Figura 9 con un cambio de dirección en "diagonal", es posible que desde la longitud de la diagonal de un triángulo rectángulo de lados, 3, 4 y 5 el problema encuentre solución, Figura 11. Por otro lado, la Figura 12 muestra otra posibilidad, al cambiar el primer trazado en el comienzo del trayecto de la hormiga.

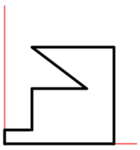


Figura 11: Poligonal con el recorrido exitoso.

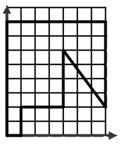


Figura 12: Poligonal con el recorrido exitoso.

5.1.1. Interpretación desde los constructos dados

Interpretando la estrategia desde Vinner, podemos señalar que hay una interacción entre la poligonal y algunas condiciones que sustentan el recorrido de la hormiga, Figura 9, lo que no es suficiente para dar con la solución, Figura 13.

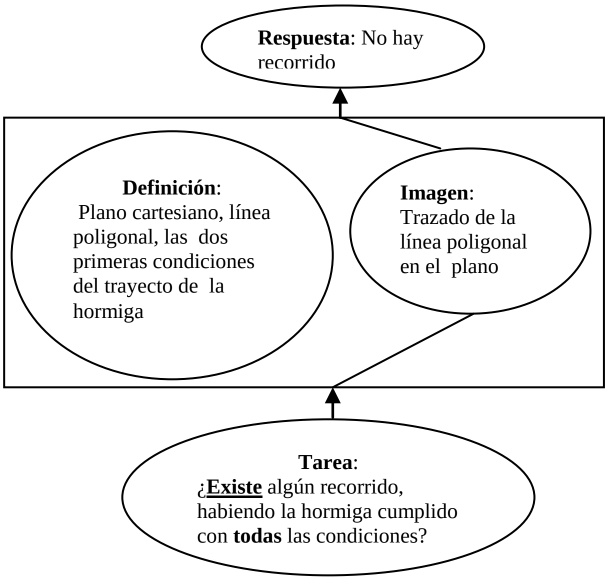


Figura 13: Análisis de la estrategia que se reporta en el cuadernillo de ORPMAT.

En términos de la TAD, la técnica de trazar segmentos horizontales y verticales, cada vez de mayor longitud, hace referencia a una poligonal abierta como tecnología y se enmarca en una geometría sintética como teoría. Por otro lado si la tecnología estuviese referida a una geometría analítica, como se aprecia en el análisis a priori, donde el teorema de Pitágoras se relacione con la distancia entre puntos; la diagonal de un triángulo rectángulo, cuyos lados asociados al trío pitagórico 3, 4 y 5, con el uso o no de las coordenadas desde un ensayo y error, como estrategia genérica en RP, guiará hacia la solución del problema.

5.2. Análisis general a la respuesta 2

En la Figura 14 se plantea una situación parecida a la respuesta 1, donde el recorrido de la hormiga en forma de gráfica, en el plano cartesiano, interactúa con el concepto definición de poligonal.

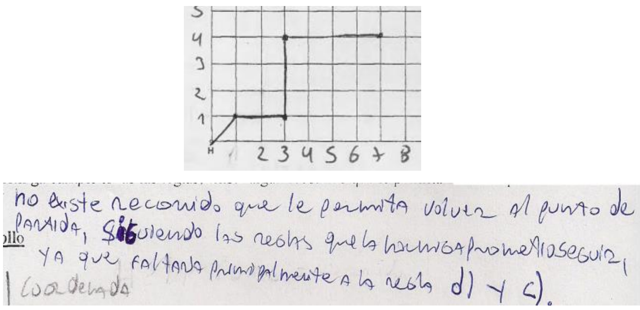


Figura 14: Argumento de que no es posible dado que falla d) y c).

Sin embargo, el estudiante que hizo uso de esta estrategia menciona (Ver Figura 15), "*no existe recorrido que le permita volver al punto de p4rtida, siguiendo las reglas que la hormiga prometió seguir ya que faltaría principalmente la regla d) y c)*". Para ello muestra que una solución cuyo recorrido contenga la diagonal de un cuadrado, Figura 15, no es posible, dado que contradice una de las condiciones del problema.

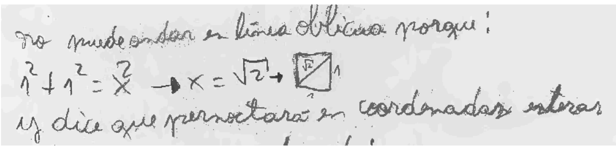


Figura 15: Argumento de que no es posible trazado en diagonal.

5.2.1. Análisis desde los constructos dados

La estrategia utiliza la idea de poligonal con dos trazos horizontales, uno vertical y uno oblicuo. Si bien el recorrido que se muestra en la Figura 14 cumple algunas de las condiciones de desplazamiento de la hormiga, la respuesta que se obtiene es que no hay solución. Ahora si procedemos como los muestra la Figura 16, se obtiene una figura cerrada, que si bien no cumple con el recorrido de la hormiga, pone de manifiesto la posibilidad de hacer un trazado en diagonal y así pensar en $3^2 + 4^2 = 5^2$.

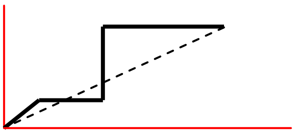


Figura 16: Uniendo los puntos extremos de la poligonal escalonada.

Desde la perspectiva teórica de Vinner, podemos señalar que hay una interacción entre la poligonal, el teorema de Pitágoras y algunas condiciones que sustentan el recorrido de la hormiga, Figura 17.

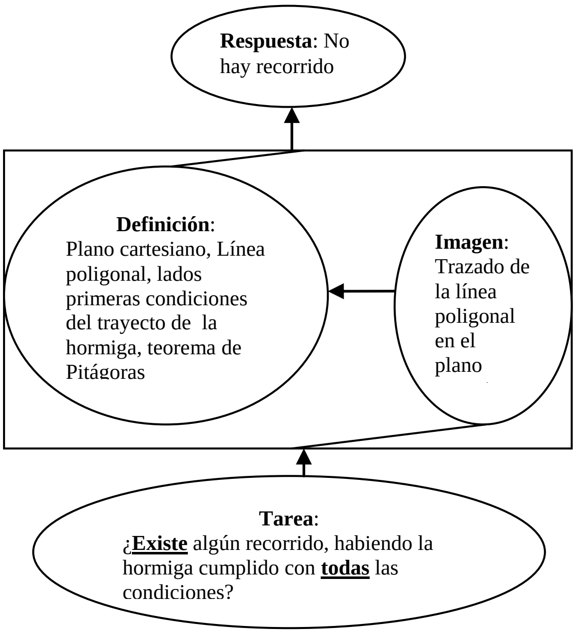


Figura 17: Análisis de la estrategia que se reporta en el cuadernillo de ORPMAT.

Según la TAD, en la Respuesta 2, podemos ver que hay indicios que la tecnología se centra en una geometría analítica, como teoría, y la idea de hipotenusa, desde una geometría sintética, evidencia que los dos catetos y la hipotenusa están asociados como un todo, en una sola figura, lo que impide ver el trazo que marca la diferencia para establecer el recorrido de la hormiga en un polígono convexo.

5.3. Análisis general a la respuesta 3

La estrategia de considerar una figura orientada, a partir de la técnica de ir etiquetando los puntos de la poligonal, hace que no sea una estrategia efectiva para obtener la respuesta esperada del problema, Figura 18.

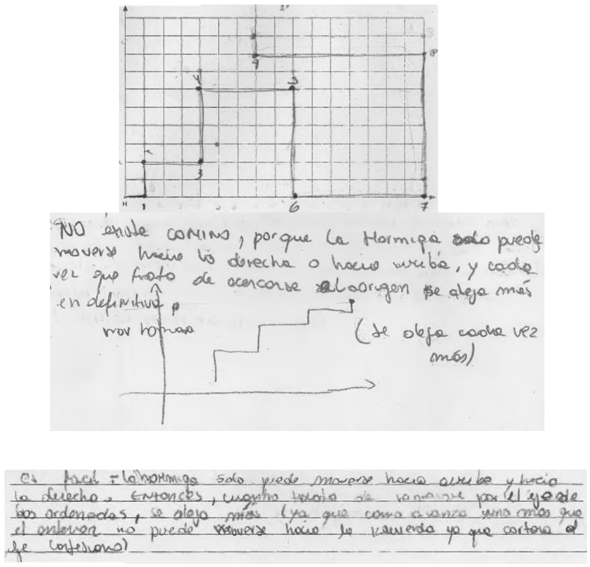


Figura 18: Ir etiquetando los puntos de la poligonal, no basta para dar con la respuesta.

5.3.1. Comentarios según los constructos dados

Desde el concepto imagen y definición de Vinner, podemos señalar que hay una interacción entre poligonal abierta, etiquetar puntos de intersección, orientación de puntos y algunas condiciones que sustentan el recorrido de la hormiga, Figura 19. Pero tampoco es posible dar con la respuesta

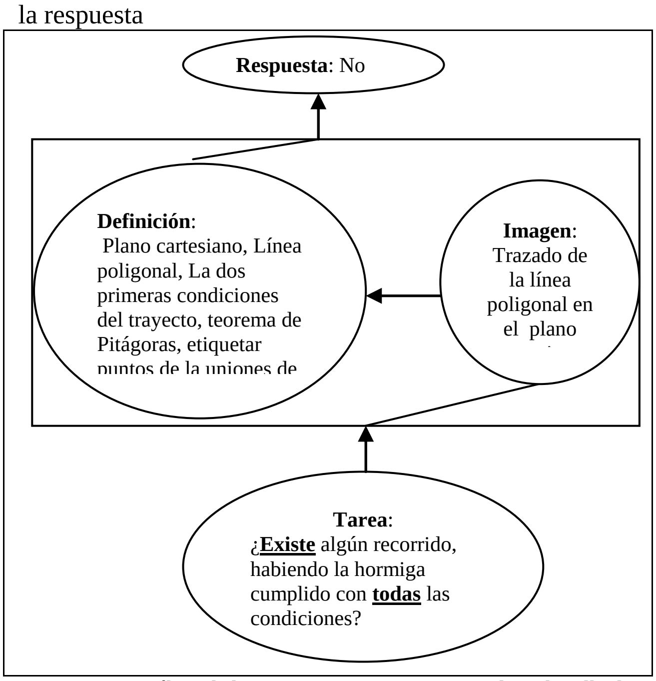


Figura 19: Análisis de la estrategia que se reporta en el cuadernillo de ORPMAT.

La respuesta 3, desde la TAD, es similar a la respuesta 1. Al parecer se queda en una geometría sintética y no se activan las coordenadas o las proyecciones ortogonales de los trazos a los ejes.

Recepción: 07/03/2014 *Aceptación: 02/10/2014*

5.4. Análisis general a la respuesta 4

En las Figuras 20 y 21, se evidencia que la interacción entre la imagen y la definición de trayectoria orientada, a partir del relato de los movomientos de la hormiga por día, hacen que sea una estrategia efectiva para conseguir la respuesta esperada.

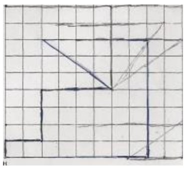
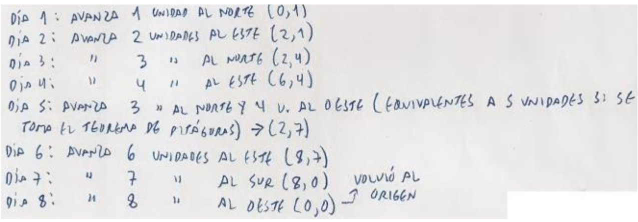


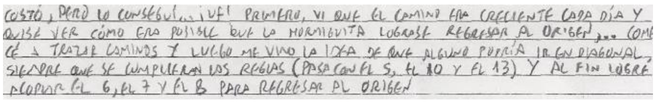
Figura 20: Recorrido de la hormiga considerando el trío pitagórico y una poligonal cerrada.



DÍA 1: AVANZA 1 UNIDAD AL NORTE (0,1)
DÍA 2: AVANZA 2 UNIDADES AL ESTE (2,1)
DÍA 3: " 3 " AL NORTE (2,4)
DÍA 4: " 4 " AL ESTE (6,4)
DÍA 5: AVANZA 3 " AL NORTE Y 4 U. AL OESTE (EQUIVALENTES A 5 UNIDADES SI SE TOMA EL TEOREMA DE PITÁGORAS) → (2,7)
DÍA 6: AVANZA 6 UNIDADES AL ESTE (8,7)
DÍA 7: " 7 " AL SUR (8,0)
DÍA 8: " 8 " AL OESTE (0,0) VOLVIÓ AL ORIGEN

Figura 21: Relato orientado por día, del recorrido de la hormiga.

Para finalizar queremos dar evidencia de la sensación que mostró el estudiante, después de haber resuelto el problema, Figura 22, "*costó, pero conseguí ¡uf! Primero vi que el camino era creciente y quise ver cómo era posible que la hormiga lograse regresar al origen…comencé a trazar caminos y luego me vino la idea de que alguno podría ir en diagonal siempre que se cumpliese las reglas (pasa con el 5, tb 10 y 13) y al fin logré ocupar el 6, el 7 y el 8 para regresar al origen)*



COSTÓ, PERO LO CONSEGUÍ... ¡UF! PRIMERO, VI QUE EL CAMINO ERA CRECIENTE CADA DÍA Y QUISE VER CÓMO ERA POSIBLE QUE LA HORMIGUITA LOGRASE REGRESAR AL ORIGEN... COMENCÉ A TRAZAR CAMINOS Y LUEGO ME VINO LA IDEA DE QUE ALGUNO PODRÍA IR EN DIAGONAL, SIEMPRE QUE SE CUMPLIERAN LAS REGLAS (PASA CON EL 5, EL 10 Y EL 13) Y AL FIN LOGRÉ OCUPAR EL 6, EL 7 Y EL 8 PARA REGRESAR AL ORIGEN

Figura 22: Descripción de la respuesta al problema.

Es importante destacar que la Respuesta 4 considera los distintos aspectos declarados en el análisis de las respuestas anteriores tanto de la perspectiva de Vinner como de la TAD, lo que permite al estudiante dar con la respuesta cuando aparece la idea de cambiar el patrón "creciente" de los trazos horizontales y verticales de la poligonal escalonada desde la diagonal asociada a un triángulo rectángulo, cuyos lados determinan el trío pitagórico 3, 4 y 5.

6. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

6.1. Respecto de las teorías utilizadas

Las dos teorías, TAD (Chevallard, 1999) y concepto definición e imagen de Vinner (Tall y Vinner, 1981), que se han considerado para describir las estrategias en RP, han permitido dar cuenta, desde los elementos constitutivos de éstas y de manera complementaria, lo que ocurre en términos generales respecto de la actividad matemática involucrada en una situación específica, desde las relaciones conceptuales que se explicitan y que dan cuenta cómo se está concibiendo o interactuando el concepto, en cuanto a definición o imagen. Por otro lado, desde los desarrollos que despliegan los estudiantes en cuanto a la matemática utilizada, permiten describir el tipo de conocimiento matemático que se utiliza y su relación con los ejes temáticos que promueve el ajuste curricular (MINEDUC, 2012). Además se pone de manifiesto, de alguna manera, indicadores en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en un contexto de RP, para esta comunidad específica de estudiantes participantes. En definitiva, los dos referentes teóricos ayudan a situar el desempeño matemático de un estudiante en cuanto a la interacción que éste tiene con la definición y la imagen de los conceptos matemáticos con los que se desenvuelve al utilizar una estrategia.

6.2. Respecto de las estrategias en RP y su proyección en el sistema educativo

El problema de la hormiga que se ha seleccionado y analizado, proyecta la matemática que se alcanza a partir de la estrategia utilizada. Por otro lado, el desempeño global de los estudiantes denota una desarticulación de los contenidos matemáticos que están en juego en las estrategias utilizadas para la RP.
Ahora bien, el análisis propuesto desde estos dos referentes teóricos, pretende contribuir como proceso de retroalimentación a las entidades gubernamentales preocupadas de incorporar e impulsar el desarrollo de RP en el currículum en nuestro país, resaltando distintos aspectos respecto de las estrategias que los estudiantes utilizan en situaciones problemáticas variadas en función de la matemática que despliegan. En definitiva, consideramos a la luz de los aspectos que se desprenden de esta indagación, procurar la articulación de los ejes temáticos que promueve el ajuste curricular desde la RP; por ende es necesario impulsar iniciativas hacia las unidades educativas que permitan empoderar a los docentes y, por otro lado, a las universidades formadoras de futuros profesores de matemáticas, con miradas desde la DDM que le permitan observar, con sustento teórico, las estrategias en RP de manera más global.

6.3. Productos de esta investigación

Proponemos un indicador que hemos denominado PECDIS, en base a los siguientes rótulos: Problema **(P),** Estrategia **(E),** Concepto – Definición – Imagen **(CDI),** Solución **(S)** para cuantificar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.
Este indicador es un constructo que emerge del análisis de las estrategias a la luz de dos referentes teóricos utilizados y se proyecta para su utilización, cuantificación y estandarización en la ORMAT 2014.
Así también, la rúbrica que se muestra en la Tabla 1, es otro producto que se ha utilizado en la ORMAT para seleccionar a los ganadores de ésta, y se sugiere para quienes desean evaluar el desempeño en RP, centrando la atención en dos dimensiones; las estrategias y cálculos y, la explicación de la estrategia en RP.

Tabla 1: Rúbrica para evaluar el desempeño en RP.

	Aspectos a evaluar	Bueno (B)	Regular (R)	Insuficiente (I)
Estrategias y cálculos realizados	**Uso de cálculos o tablas**	**Planteamiento de cálculos coherentes y correctos. Presentación de tablas o esquemas en coherencia con el enunciado planteado (4ptos)**	**Planteamiento de cálculos coherentes. Presentación de tablas o esquemas en coherencia con el enunciado planteado (2ptos)**	**Planteamiento de cálculos incoherentes e incorrectos. Presentación de tablas o esquemas en coherencia con el enunciado planteado (0ptos)**
Redacción del razonamiento	**Secuencia Verbal y coherencia en la redacción**	**Describe secuencialmente el desarrollo de cálculos y explica el uso de esquemas y tablas. (4ptos)**	**Describe coherentemente pero no en forma secuencial los cálculos y así como el uso de esquemas y tablas. (4ptos)**	**Describe de manera incoherente. (4ptos)**

7. CONCLUSIONES

Con esta investigación se hace explícita la interpretación de estrategias, desde los dos constructos teóricos utilizados, permite describir el grado de articulación entre el contenido matemático y los procedimientos utilizados en función de las respuestas que se proponen y, a la vez, explicar el porqué de la respuesta en términos de lo que el problema persigue para una solución óptima o ideal. Por otro lado, permite reconocer una variabilidad en el pensamiento de los estudiantes, el cual está permeado por su experiencia con la matemática que trabaja en la sala de clases; por lo tanto es posible modelar indirectamente las prácticas de aula.

En cuanto al proceso de RP, desde la interpretación de estrategias, cabe indicar lo importante de:

a) Una comprensión adecuada del problema.
b) La cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee quien resuelve el problema.
c) La forma como aplica sus conocimientos quien resuelve un problema.
d) El tipo de estrategias que desarrolla en el proceso de resolución de un problema.
e) El control de la estrategia en el proceso de RP.
f) La organización de la información que se despliega en el proceso de RP.
g) La explicitación en términos verbales de los hitos que permiten la RP.

Las investigaciones acerca de este tema, reconocen que en el proceso de RP, los estudiantes tienden a aplicar diferentes estrategias incluso ante una misma situación, independientemente si arriban a una respuesta o si esta cumple o no con las exigencias planteadas.
Nuestro estudio, da cuenta de que las estrategias dependen además, del tipo de situaciones que se plantean, y su interpretación desde los constructos que se asumen procura su caracterización para mostrar su uso en RP.

Por último, se espera que esta experiencia pueda ser considerada por profesores de aula para ir, desde la RP, dando cuenta de los desafíos que propone el ajuste curricular.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Cabañas, G. (2000). *Los problemas… ¿cómo enseño a resolverlos?*.México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cervera, P. (1998). *Estrategias para la solución de problemas geométricos que emplean los alumnos en duodécimo grado. Un estudio de caso.* Tesis de Maestría no publicada. Instituto Superior Politécnico “Julio Antonio Mella”. La Habana, Cuba.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1*. La Habana: Educación Cubana.

Chevallard, I. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora*. España: Edicions Universitat.

MINEDUC (2007). *PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación/ Ministerio de Educación de Chile. Recuperado el 10 de enero del 2013 de http://www.agenciaeducacion.cl//biblioteca-digital/archivos-pisa/.pdf

Montanero, M. & León, J. (2003). *El concepto de estrategia: dificultades de definición e implicaciones psicopedagógicas*. Recuperado el 12 de junio de 2013 de: http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Montanero_Fernandez_y_Leon.htm.

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional. México.

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pozo, J., Pérez M. y Domínguez, J. (1994). *La solución de problemas*. España: Siglo XXI.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teachingand Learning of Mathematics, in D. Tall (Ed.): *Advanced mathematical thinking*(pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer A. P.

Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación*. Recuperado el 12 de junio de 2013 de: http://www.cema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/296.pdf.

Miguel Alejandro Rodríguez Jara

Profesor de Matemática; Licenciado en educación y Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en matemática. Universidad de Concepción. Chile

Dr. Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile

Tema de Investigación 1 (Tesis Doctoral): La reconstrucción cognitiva de los espacios vectoriales $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^2$ desde la Teoría APOE: Una propuesta didáctica. Nivel Universitario (En curso)

Tema de Investigación 2: Interpretación de estrategias en resolución de problemas y su articulación con el contenido matemático en estudiantes de 13 a 17 años.