Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

Aldana Bermúdez, Eliécer; González Astudillo, Mª Teresa

La función valor absoluto y el desarrollo del esquema de la integral definida

Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 11, núm. 1, julio, 2016, pp. 8-17
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

La función valor absoluto y el desarrollo del esquema de la integral definida

Eliécer Aldana Bermúdez[1], Mª Teresa González Astudillo[2]
eliecerab@uniquindio.edu.co, maite@usal.es

[1]*Universidad del Quindío, Carrera 15, calle 12N, Armenia, Quindío, Colombia*
[2]*Universidad de Salamanca, Paseo de Canalejas 169 Bajo, Salamanca, España*

Resumen

En este artículo se describen las dificultades que muestran los alumnos de tercer año de la Licenciatura de Matemáticas de una universidad colombiana en torno al concepto de función valor absoluto cuando se enfrentan a una tarea sobre la integral definida. Con el objetivo de estudiar el desarrollo del esquema del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE se diseñó un cuestionario en el que se incluye una actividad sobre la función valor absoluto. Los datos del cuestionario se completaron con una entrevista y un mapa conceptual que permitieron identificar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que se establecen entre ellos y el uso que hacen los alumnos de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Los resultados permitieron encontrar que muchos estudiantes tienen dificultades con la función valor absoluto para el desarrollo del esquema de Integral Definida.

Palabras clave: Función valor absoluto, integral definida, elementos matemáticos, descomposición genética.

The absolute value function and the development of the scheme of definite integral

Abstract

In this article the difficulties third year Colombian university Mathematics students show about the concept of Definite Integral when they solve a task about the absolute value function concept are described.. With the aim of studying the development of the scheme of the concept of Definite Integral in the frame of APOS theory a questionnaire was designed that included a task about the absolute value function. The data were completed with an interview and a conceptual map in order to identify the mathematical elements, the logical relations that were established between these elements and the graphical, algebraic and analytical systems of representation that pupils use to solve the tasks. The results allowed discovering the difficulties students have with the absolute value function in the development of the scheme of Definite Integral.

Key words: Absolute value function, Definite Integral defined, mathematical elements, genetic decomposition.

La fonction une valeur absolue et le développement du schéma

Résumé

Dans cet article on décrit les difficultés que montrent les élèves de la troisième année de la Licenciatura de Mathématiques d'une université colombienne autour du concept de fonction une valeur absolue quand ils font front à une tâche sur l'intégrale définie. Avec l'objectif d'étudier le développement du schéma du concept d'intégrale définie dans le cadre de la théorie APOE on a dessiné un questionnaire dans lequel une valeur absolue inclut une activité sur la fonction. Les données du questionnaire ont complété avec une interview et une carte conceptuelle que les éléments mathématiques ont permis d'identifier, les relations logiques qui s'établissent entre ils et l'usage que font les élèves des systèmes graphiques, algébriques et analytiques de représentation. Les résultats ont permis de trouver que beaucoup de sujets ont des difficultés avec la fonction une valeur absolue pour le développement du schéma d'Intégrale Définie.

Recepción:10/03/2016 *Aceptación: 24/06/2016*

Mots clefs: la Fonction une valeur absolue, une intégrale définie, des éléments mathématiques, une décomposition génétique.

1. INTRODUCCIÓN

Este reporte de investigación también ha sido motivo de estudio por otros investigadores (Mundy, 1984¸Ordaz,2007; Guzmán, 1998; Cerizola, Pérez & Martínez, 2000¸ Colin & Lázaro, 2009; Gagatsis & Thomaidis, 1994¸ Tsamir, Rasslan & Dreyfus, 2006; Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007) quienes han señalado las dificultades que tienen los alumnos en relación con el aprendizaje y la comprensión del concepto de integral definida que, en muchos casos, tiene su origen en que no poseen los conceptos previos necesarios. Si además a los alumnos se les plantean tareas en las que interviene la función valor absoluto se combinan esas dificultades con las de la propia función que han de manejar. En una investigación realizada por Mundy (1984) el 95% de los estudiantes no fueron capaces de calcular correctamente la $\int_{-3}^{3}|x+2|\,dx$. En este caso se demostró que los estudiantes no son capaces de establecer una relación entre la representación algebraica formal y la visualización gráfica de la función. Por ello algunos investigadores (Ordaz, 2007) han elaborado secuencias didácticas en la que se combinan los registros gráficos y analíticos.

En otras investigaciones (Cerizola, Pérez & Martínez, 2000) se ha comprobado que las dificultades tienen que ver no sólo con la traducción de la representación algebraica de la función valor absoluto a un registro gráfico, sino también con el concepto mismo de función, con la noción de valor absoluto y con el dominio y rango de una función (Guzmán, 1998). En general, se ha evidenciado que en la enseñanza se privilegia el desarrollo del pensamiento algorítmico y el registro algebraico dejando de lado el gráfico (Cerizola, Pérez & Martínez, 2000). Este tratamiento algebraico de la función también conduce a ciertas dificultades. La definición que aparece en los libros de texto de esta función induce a los alumnos a asumir que el signo menos implica que se está tratando con un número negativo. Y, en el aula, se considera habitualmente que *"el valor absoluto de un número es el número sin signo"* (Colin & Lázaro, 2009) lo que induce obstáculos epistemológicos (Gagatsis & Thomaidis, 1994), porque el significado que se atribuye a la función es de tipo numérico. En este caso, esto induce a asociar la función valor absoluto con una función lineal.

En general, cuando la función valor absoluto ha de manejarse en consonancia con otros conceptos matemáticos o aplicarla en diferentes contextos, muchas de estas dificultades salen también a la luz. Así, por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una ecuación con valor absoluto consideran que siempre tiene que tener solución positiva; si estas ecuaciones tienen más de una solución, se asimilan a las ecuaciones cuadráticas; además, se muestran incongruencias entre los registros semióticos de representación (Cerizola, Pérez & Martínez, 2000). Incluso, aunque los alumnos son capaces de dar una definición correcta de la derivada de una función en un punto consideran que la función valor absoluto no es derivable en ningún punto (Tsamir, Rasslan & Dreyfus, (2006).

Para Wilhelmi, Godino & Lacasta (2007) las dificultades en torno a este concepto son tanto de tipo sociológico como pedagógico por lo que es necesario integrar el significado atribuido a esta noción en diferentes contextos de uso caracterizando previamente su complejidad ontológica y semiótica.

En esta investigación se trata de responder a la pregunta *¿Cuáles son las dificultades que muestran los alumnos en torno al concepto de función valor absoluto cuando se enfrentan a una tarea sobre la integral definida?*

2. MARCO TEÓRICO

Para tratar de contestar a la pregunta anterior se va a analizar las respuestas que un grupo de alumnos dio a una pregunta sobre la integral definida de una función valor absoluto. El marco teórico en el que se ha enmarcado la investigación es el de la teoría APOE (Dubinsky, 1991 y Asiala.; Brown; DeVries; Dubinsky; Mathews; y Thomas, (1996). Desde la perspectiva teórica de esta investigación se considera que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas para comprender los conceptos matemáticos. La progresión en estas construcciones mentales está ligada a ciertos mecanismos mentales como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, **y** tematización (Dubinsky, 1991). El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema (triada) propuestos por Piaget & García (1982), ha contribuido a la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky & MacDonalds, 2001). DeVries (2001) denomina estos niveles de desarrollo de un esquema como: intra, inter y trans.
En este estudio, al igual que Sánchez–Matamoros (2004), para caracterizar dichos subniveles se analizan los elementos matemáticos del concepto de integral definida y las relaciones lógicas que establecen entre ellos los alumnos cuando resuelven tareas sobre este concepto. Se considera que los elementos matemáticos son "el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa" (Piaget, 1963, p. 8) y las relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional directa y contrario de la condicional) como la coordinación de procedimientos que se establecen entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema.

3. METODOLOGÍA

Esta investigación forma parte de un estudio más amplio en el que se trata de caracterizar el desarrollo del esquema de la Integral Definida de alumnos de tercer año de la Licenciatura de Matemáticas de una universidad colombiana que ya han estudiado la función valor absoluto pero que se enfrentan por primera vez con el concepto de Integral Definida. Primeramente, mediante un estudio de libros de texto que incluían el concepto de Integral Definida se determinaron los siguientes elementos matemáticos que configuran este concepto matemático (Aldana, 2011):

- *el área como aproximación* (**ACA**), cuando se considera el cálculo aproximado de un área bajo una curva por medio de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos a dicha curva, así como la consideración de particiones del intervalo y el cálculo de las correspondientes sumas de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos o las sumas inferiores y superiores de Riemann;
- *el área como límite de una suma* (**ALS**), considerando el área como el límite de las sumas inferiores y superiores de Riemann;
- *la Integral Definida* (**LID**), teniendo en cuenta su interpretación geométrica como el área de una región cuando la función es positiva así como la integrabilidad de una función y las consideraciones acerca de las funciones positivas y negativas.
- *las propiedades de las integrales* (**PID**), como la unión de intervalos, la linealidad, la conservación de desigualdades, la comparación de una función con ciertas cantidades, la integración de la función constante, la simetría o no según sea la función par y la integración de funciones especiales;
- y *los teoremas fundamentales y del valor medio* (**TFV**), que incluye esos dos teoremas.

También se tuvieron en cuenta los sistemas de representación gráfico (**G**), algebraico (**A**) y analítico (**AN**) ligados a dichos elementos matemáticos (Aldana, 2011). Esto permitió establecer una descomposición genética previa del concepto para analizar las producciones de los alumnos (Aldana, 2011).

Posteriormente, se diseñó un precuestionario que fue aplicado de forma experimental y que se envió a expertos en Didáctica del Análisis con el fin de validarlo. A partir del informe de los expertos y de las respuestas dadas por los alumnos se elaboró el cuestionario definitivo que constaba de ocho tareas. Este cuestionario fue contestado por once alumnos de la Licenciatura de Matemáticas identificados por los códigos A1 hasta A11.

En el análisis de las respuestas dadas por los alumnos se identificaron los elementos matemáticos que ponían en juego y se estableció el guion de una entrevista semiestructurada (Ginsburg; Kossan; Schwartz; y Swanson, 1983) individualizada para cada alumno que permitiera profundizar y establecer de forma detallada el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida de cada alumno. Dichas entrevistas fueron audiograbadas. Finalmente, para completar la información y con el objetivo de la triangulación de los instrumentos utilizados, los alumnos realizaron un mapa conceptual sobre el concepto de Integral Definida.

El análisis de los datos se realizó utilizando conjuntamente los resultados recogidos mediante los tres instrumentos mencionados anteriormente: el cuestionario, la entrevista y el mapa conceptual. Para ello se caracterizaron las relaciones lógicas que un sujeto puede establecer entre los diferentes elementos matemáticos mencionados anteriormente y la coordinación que realizan entre los diferentes sistemas de representación: gráfico (**G**), algebraico (**A**) y analítico (**AN**) al resolver las distintas tareas (Aldana, 2011).

En este artículo, nuestro principal objetivo es describir cómo las dificultades que presentan los alumnos universitarios con la función valor absoluto influyen en su comprensión del concepto de integral definida.

La tarea que tuvieron que resolver los alumnos, y que estaba incluida en el cuestionario, es la siguiente:

> Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

Para este estudio se han seleccionado las respuestas dadas a esta tarea por seis estudiantes teniendo en cuenta el manejo del concepto de función valor absoluto. La selección se ha hecho para mostrar diferentes formas de solución de la tarea de estos alumnos. En el análisis se han organizado las respuestas dadas por ellos comenzando por los que presentaron mayores dificultades y/o errores hasta llegar a quienes muestran una solución correcta de la tarea.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se muestra cómo los alumnos resolvieron esta tarea que involucra el concepto previo de la función valor absoluto. Para ello, se presentan las evidencias de los alumnos agrupadas progresivamente de acuerdo con sus soluciones: aquellos que *no son capaces de representar la función y no resuelven correctamente la tarea*; los que hacen una *representación gráfica incorrecta y los cálculos que presentan también son erróneos*; los que realizan una *representación gráfica correcta pero cálculos incorrectos* y quienes muestran una *representación gráfica y unos cálculos correctos.* Esta forma creciente de presentar el desarrollo del esquema de comprensión del concepto está ligada al análisis realizado desde el marco teórico APOE aplicado en esta investigación.

En el primer grupo, se describe la respuesta de un alumno que **no realiza la gráfica de la función y además no resuelve correctamente la tarea**:

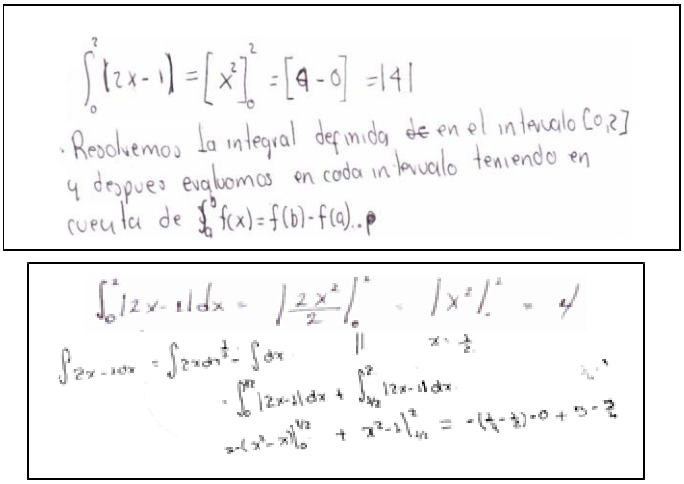

Figura 1: **A5 Resolución A de la tarea 4 del cuestionario**

Este alumno, por un lado, no tiene en cuenta que la función que está integrando es la función valor absoluto y prescinde de dicho valor absoluto. Por otra parte, la primitiva asociada a esa función no es correcta, sólo ha calculado la primitiva de una parte de la función; no ha tenido en cuenta parte de la expresión algebraica de la función. Los errores están asociados tanto a su desconocimiento de la función valor absoluto como al cálculo de la primitiva. Además, como no ha representado gráficamente la función, no tiene otros recursos para calcular el área que se le pide. En la entrevista no es capaz de justificar los cálculos que hace:

I: ¿Considera que esa función está bien integrada?

A5: Pues no se profe, en este momento no sé, pues yo la hice así pero…

Asocia la Integral Definida de manera memorística con el área, sin darse cuenta que existen formas más sencillas para calcular áreas cuando no se conoce la primitiva de una función o cuando el área corresponde a una forma geométrica de la que se tiene una fórmula algebraica para calcularla.

Este alumno pone en evidencia que no tiene los conocimientos previos necesarios para resolver la tarea, muestra un desconocimiento total de la función valor absoluto, de su definición y representación gráfica y por tanto calcula de forma incorrecta la primitiva y no logra hacer una traducción de la representación algebraica de la función valor absoluto a un registro gráfico (Guzmán, 1998).

En el segundo grupo, se presenta en primer lugar la solución de una alumna que hace una **representación gráfica incorrecta y un procedimiento también incorrecto para resolver la tarea.** En el caso de la alumna representa la función de la siguiente manera:

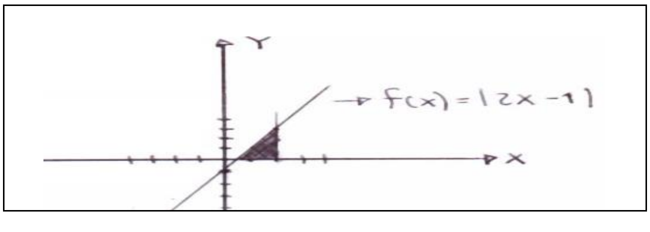

Figura 2: **A4, representación G de la tarea 4 del cuestionario**

Esta alumna no se da cuenta que se trata de la función valor absoluto y representa de forma incorrecta la gráfica de la función formando un sólo triángulo bajo la gráfica de la función. A continuación utiliza dos procedimientos de resolución de la tarea en el sistema de representación **A**:

*Figura 3***: A4, resolución A de la tarea 4 del cuestionario**

En el primero utiliza los elementos matemáticos **LID** y **TFV** de forma **A**, pero de forma incorrecta, porque calcula la integral como si el integrando fuera una función lineal y determina mal la primitiva puesto que sólo tiene en cuenta parte de la expresión algebraica de la función.

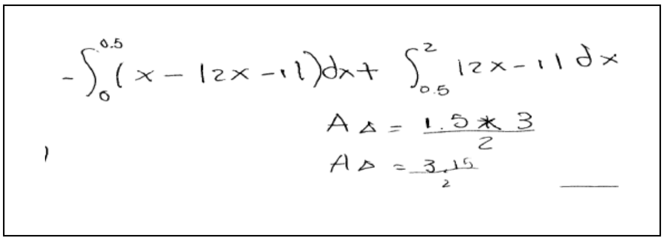

*Figura 4***: A4, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista**

Durante la entrevista utiliza para resolver la tarea un procedimiento **A** incorrecto. Plantea el cálculo como una suma de integrales usando el elemento matemático **PID**, en concreto la propiedad de las funciones positivas y negativas. Trata de calcular nuevamente el área de manera **A** pero no lo consigue. Divide el intervalo en dos subintervalos correspondiente a la parte positiva y la negativa de la función, plantea incorrectamente la función del integrando, le antepone un menos a la primera integral puesto que está calculando un área y considera la función negativa en el intervalo [0,0.5] y luego le suma la función valor absoluto en el intervalo [0.5, 2]. Para tratar de explicar esa suma de integrales recurre a la representación gráfica de la función:

A4: ….primero grafiqué la función.

I: ¿Qué figura se formó bajo la recta?

A4: 2 triángulos.

I: ¿Qué le piden hallar?

A4: El área limitada por la gráfica de la función…

Por el planteamiento que hace pone en evidencia que presenta un conflicto entre la definición del valor absoluto y la propiedad que debe aplicar para calcular el área:

I: ¿Qué integrales está planteando?

A4 Si es 0,5 es que no sé, entonces lo voy a tomar como si fuera 0,5

I: ¿De qué función?

A4: La que está por encima sería el eje x *, menos la que está por debajo que sería* $2x-1$ *menos acá, antes de la integral, porque está por debajo del eje* x *,*

Esta alumna a diferencia del alumno anterior, hace una representación gráfica aunque incorrecta y un procedimiento también incorrecto para resolver la tarea, y trata de establecer más relaciones entre los elementos matemáticos**,** no es capaz de coordinar la representación gráfica con la definición del valor absoluto de la función. Al ser la representación gráfica incorrecta, esto no le permite visualizar adecuadamente el área que va a calcular de forma geométrica, y cómo no tiene construido el concepto de función valor absoluto, no es capaz de determinar cuáles son las funciones del integrando correspondiente cuando se recurre al elemento matemático PID.

Por su parte, en segundo lugar se presenta la solución de un alumno que también pertenece al grupo de aquellos que hacen una representación gráfica incorrecta y un procedimiento incorrecto**,** sólo que utiliza más argumentos y trata de relacionar algunos elementos matemáticos para resolver la tarea, porque intenta recordar la función valor absoluto de x para poder aplicar sus conocimientos a la función que aparece en la pregunta.

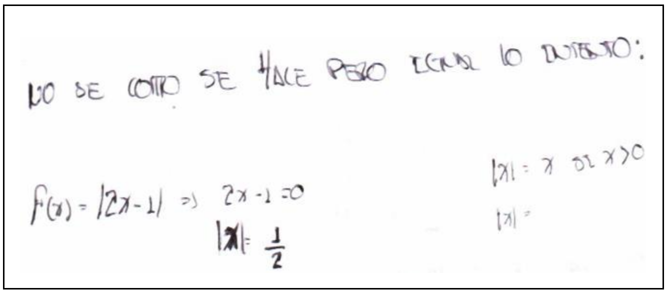

Figura 5**: A9, representación A la tarea 4 en el cuestionario**

Nótese que el alumno tiene dificultad para definir el valor absoluto de la función y aunque despeja el valor para x, no logra asociar la función dada con la representación gráfica adecuada para poder calcular el área de forma geométrica o algebraica utilizando el elemento matemático PID.
Durante la entrevista representa gráficamente la función siendo su razonamiento el siguiente:

I: ¿Dónde cortaría esta recta el eje x ?

A9: La cortaría en 0,5. Sería una recta…pero tengo un problema, porque me piden el área desde cero a dos, y cero está por fuera de la gráfica, seria desde 0,5 hasta 2 que sería esto y me están pidiendo es toda esta área.

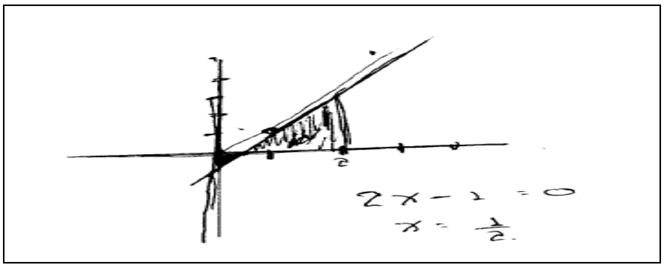

Figura 6**: A9, representación G de la tarea 4 durante la entrevista**

Para calcular el corte con el eje x, despeja el valor de x en la función, y traza la gráfica como si se tratara de una función lineal, sin tener en cuenta que tiene que representar la función valor absoluto. Forma dos triángulos determinados por la gráfica y el eje x, uno de forma correcta entre la gráfica de la función y el eje x, y otro de forma incorrecta bajo el eje x. Para calcular el área pedida lo hace de dos formas. En primer lugar utiliza el elemento **ACA** de forma **G** que sólo aplica a uno de los triángulos:

I: ¿Qué figura tiene formada?

A9: Tengo 2 triángulos. Seria hallarle el área a estos 2 triángulos que sería…base por altura sobre 2, seria $\frac{1}{2}$ por la altura en y.

En el segundo procedimiento aplica los elementos matemáticos **LID** y **PID** de forma **A**.

A9: …Usando la integral. Sería la integral desde cero hasta $\frac{1}{2}$. Porque, en $\frac{1}{2}$ corta la gráfica el eje x, esta área está por debajo del eje x que daría negativa, tendría que anteponerle un signo, para que el área de positiva.

I: ¿Cómo lo escribiría?

A9: Así, $2x-1$e dx mas la integral definida desde $\frac{1}{2}$ hasta 2 de la función $f(x)$ que sería el valor absoluto de $2x-1$dx.

I: ¿El resultado que le dio al hallar el área usando la integral y el resultado del área a partir de los triángulos seria la misma?

A9: En esos triángulos por ser una recta y el triángulo considero que sería la misma área.

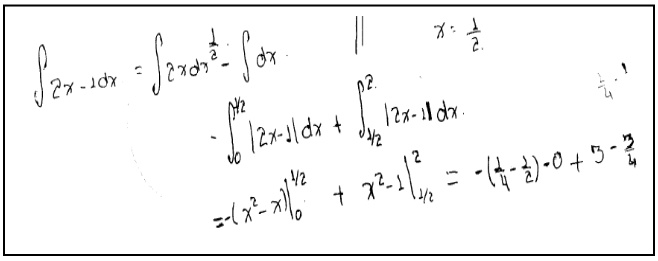

Figura 7**: A9, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista**

A partir de la representación gráfica realizada, utiliza los elementos matemáticos **LID, TFV y PID,** en concreto la propiedad de la unión de intervalos, de forma **A**, cuando plantea una integral y la subdivide en dos integrales según que la función sea positiva o negativa (lo que no se corresponde con esta tarea porque la función siempre es positiva) luego aplica el **TFV** como si se tratara de una función lineal; de hecho una de las primitivas (la segunda) está mal calculada. Finalmente al sustituir en los extremos del intervalo se confunde en los cálculos aritméticos.

A lo largo del desarrollo de la tarea, tanto en el cuestionario como en la entrevista, los alumnos necesitan establecer una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **LID, PID y TFV** en los sistemas de representación **G y A,** para poder inferir el valor del área de la región en el intervalo dado; pero se pone en evidencia que, aunque recuerdan los elementos matemáticos e intentan relacionarlos, no logran resolver la tarea debido a la forma incorrecta en que han representado gráficamente la función, el desconocimiento de la función valor absoluto como un objeto matemático.
Generalmente la definición que aparece en los libros de texto de esta función induce a los alumnos a asumir que el signo menos implica que se está tratando con un número negativo. Y, en el aula de clase se considera habitualmente que *"el valor absoluto de un número es el número sin signo"* (Colin & Lázaro, 2009) lo que induce obstáculos

epistemológicos (Gagatsis & Thomaidis, 1994), porque el significado que se atribuye a la función es de tipo numérico. En este caso, esto induce a asociar la función valor absoluto con una función lineal.

En el tercer grupo, en primer lugar se presenta la solución de un alumno que realiza una **representación gráfica correcta pero el procedimiento algebraico ligado a la tarea es incorrecto**.

Inicialmente, este alumno, en el cuestionario, mostró grandes dificultades para resolver la tarea. Durante la entrevista recurre a un procedimiento **A**:

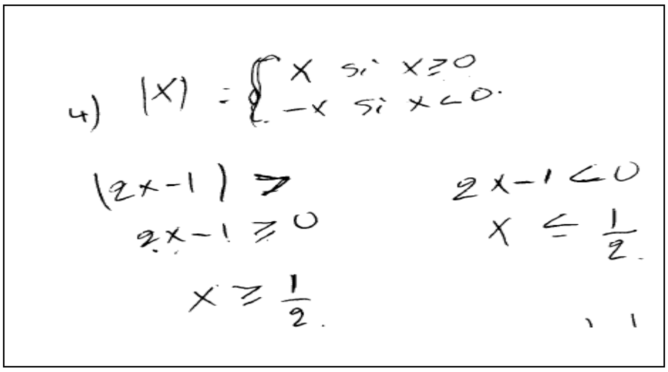

***Figura 8*: A8, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista**

Para ello recuerda la definición de valor absoluto de x, y lo aplica con algunos errores algebraicos a la función planteada en la tarea. Resuelve dos desigualdades y obtiene los valores: $x \geq \frac{1}{2}$, y $x \leq \frac{1}{2}$ que le ayudan a representar gráficamente la función. El alumno coordina la representación A y la **G** de la función para llegar a la siguiente representación.

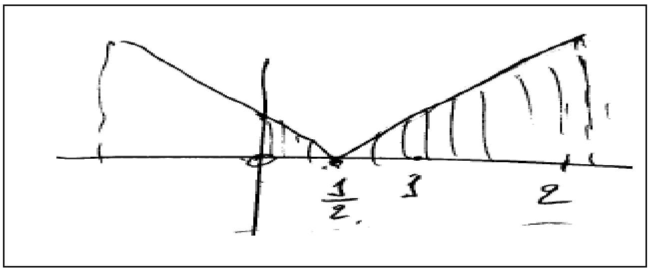

***Figura 9*: A8, representación G de la tarea 4 durante la entrevista**

Para resolver la tarea recurre al elemento matemático **ACA** de forma **G,** una vez dibujada correctamente la gráfica de la función. Forma dos triángulos rectángulos correspondientes al cálculo del área que se pide en la tarea. Encuentra el punto de corte con el eje x que corresponde a la solución de las desigualdades planteadas en el procedimiento algebraico, pero no logra calcular el área de los triángulos que se han formado bajo la gráfica de la función.

I: ¿Puede explicarme cómo ha resuelto la tarea?

A8: … no la resolví, porque no recuerdo el manejo del valor absoluto. Bueno, lo que recuerdo del valor absoluto es que es x, si x es mayor o igual, y $-x$ si x es menor que cero. Seria $2x$, esto se dividiría por 2, sería x mayor o igual, seria 1 y aquí x seria mayor o igual a $\frac{1}{2}$.

I: ¿Podría decirme cómo hallaría esta área?

A8: Esta área, pues la haría con base a dos integrales. Porque, es que aquí en el valor absoluto veo una parte. Del $\frac{1}{2}$ manejándola desde el cero, seria de cero a $\frac{1}{2}$ Entre $\frac{1}{2}$ y 2.

I: ¿El área que calcula con los triángulos seria la misma que cuando la calcula con la integral?

A8: Si, porque la integral es un método, que se puede utilizar para hallar el área.

Este alumno ha utilizado los elementos **ACA y LID** de forma **G** y **A**, pero no logra resolver la tarea. A nivel gráfico logra representar la función, pero no es capaz de calcular el área bajo el gráfico utilizando ACA y, cuando intenta utilizar **LID,** menciona que debe partir la integral en dos. Además menciona el elemento PID, en concreto la propiedad de la unión de intervalos que es uno de los elementos necesarios en la resolución de la tarea pero no lo utiliza para dar respuesta a la pregunta planteada (Aldana, 2011). Asimismo, muestra dificultad en el manejo del registro algebraico, y falta de coordinación entre los registros de representación **G** y **A (**Duval, 1996).

En el cuarto grupo, en primer lugar se presenta un alumno que realiza una **representación gráfica y un cálculo algebraico correctos de la tarea**. Por ejemplo, el alumno A10 hace una representación G de la función:

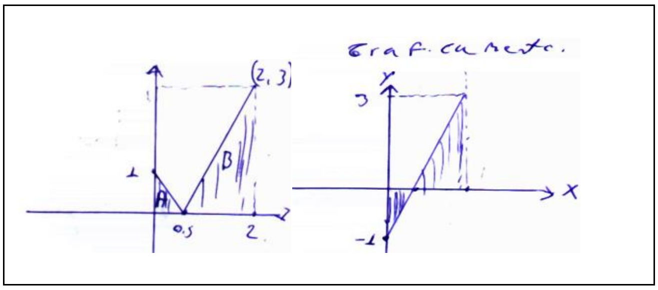

***Figura 10*: A10, representación G de la tarea 4 del cuestionario**

Para realizar la gráfica primero hace la representación de la función lineal y luego la del valor absoluto:

A10: Porque me están pidiendo que halle esa área pero en valor absoluto y entiendo que el valor absoluto de una función, es su parte positiva y como encuentro que un área está en la parte negativa de la función del eje x.

A partir de la representación **G** calcula el área de los triángulos y muestra que es capaz de coordinar dos representaciones **G** y **A**:

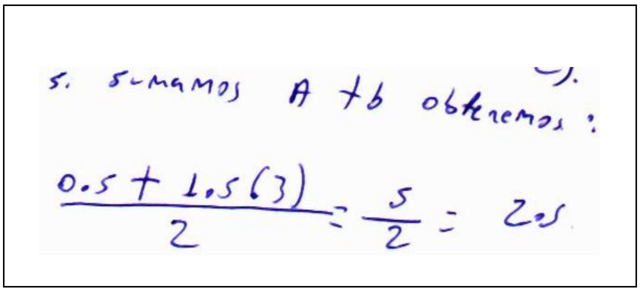

***Figura 11*: A10, representación A de la tarea 4 del cuestionario**

Utiliza el elemento matemático **ACA** de forma **A**, cuando aplica la fórmula del área del triángulo. Para ello calcula las áreas de los triángulos **A** y **B,** las suma y obtiene correctamente el área limitada por la función en el intervalo indicado.

I: ¿Cómo calcula luego el área?

A10: Al transponer la figura sobre el eje x, encuentro que se forman 2 triángulos y uno está seguido del otro y hallo el área de un triángulo aplicando la fórmula geométrica base por altura. El primero me dio de altura 1 y base 0,5 el área es 0,5 por 1 dividido 2. El segundo una altura de 3, la base es 1,5, luego base por altura dividido 2. Entonces el área total que me están pidiendo es 2,5.

No obstante, cuando trata de utilizar el elemento **LID** tiene dificultades para hacerlo:

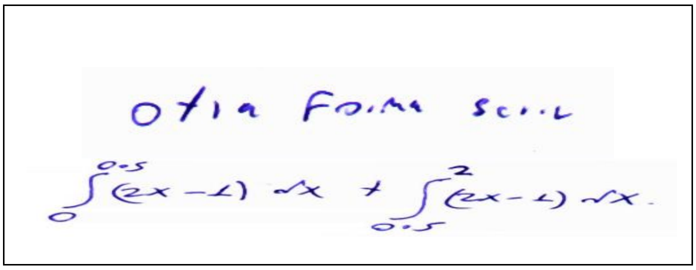

***Figura 12*: A10, resolución A de la tarea 4 del cuestionario**

Recurre a los elementos matemáticos **LID** y **PID** de forma **A** cuando plantea una suma de integrales pero lo hace de forma incorrecta porque no tiene en cuenta que la función que tiene que integrar es la función valor absoluto; expresa correctamente los límites de integración haciendo uso de la propiedad de la unión de intervalos pero no termina de calcular el área utilizando estos elementos matemáticos. Durante la entrevista intenta nuevamente utilizar los elementos **LID y PID.**

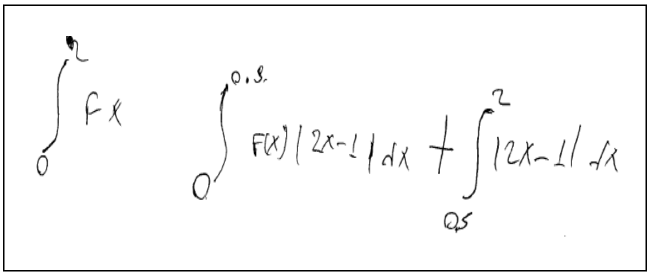

***Figura 13*: A10, resolución A de la tarea 4 durante la entrevista**

A10: ...como tengo la función y el intervalo donde está definida puedo aplicar la integral definida. La integral definida, tiene una propiedad. La propiedad aditiva

I: ¿Cómo sería esa integral?

A10: Tengo un corte que me dio 0,5, y 3 valores de x, el 0, el 0,5 y el 2 que se cuentan en ese intervalo, entonces aquí está definida la función también, luego tomo una integral de 0 a 0,5 de la función.

I: ¿Está de acuerdo con el planteamiento de esas integrales?

A10: Si, porque estoy hablando de un área que geométricamente se puede hallar, porque se encuentra formada por 2 figuras geométricas llamadas triángulos.

I: ¿Cómo calcularía esas integrales?

A10: Me remitiría aplicar un procedimiento, como la parte positiva de esa función se encuentra sobre el eje x.

I: ¿Recuerda cómo integrar estas funciones?

A10: En este momento no recuerdo como se integra estas funciones.

Este alumno pone de manifiesto que plica la propiedad de la unión del intervalo pero presenta conflicto con el elemento matemático **TFV**, porque no sabe cómo hallar la primitiva de la función para poder aplicar la regla de Barrow (Cerizola, Pérez & Martínez, 2000), y aunque logra resolver la tarea de forma geométrica utilizando ACA, tiene dificultad para aplicar PID y LID.

Asimismo, en segundo lugar este otro alumno realiza una representación gráfica y un cálculo algebraico correctos de la tarea, para poder representar la función, analiza los valores que toma según que sea positiva o negativa la función 2x-1, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

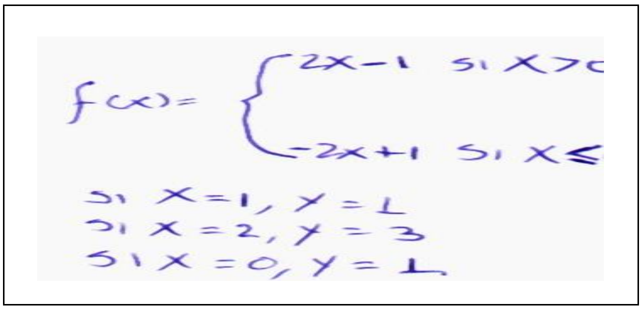

***Figura 14*: A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario**

Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de 2x-1.

A7: El valor absoluto de esa función, habría que redefinirla, como la función va a valer $2x-1$, si x es mayor que 0 y va a valer $-(2x+1)$, si x es menor o igual a 0.

Para representar gráficamente la función, tiene que dar valores a x para obtener los de y.

I: ¿Podría decirme cómo ha esbozado el gráfico de la función?

A7: Teniendo la función, tabulé le di a x tres valores.

Finalmente representa la gráfica correctamente.

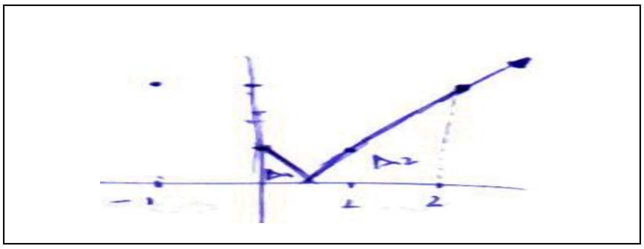

***Figura 15*: A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario**

Una vez representada gráficamente la función, calcula el área limitada por la gráfica y relaciona varios elementos matemáticos de forma **A**.

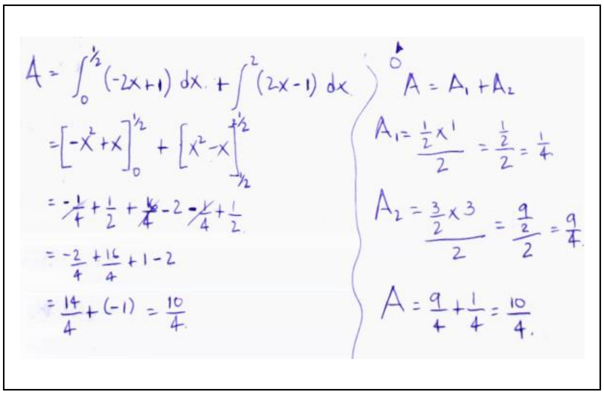

***Figura 16*: A7, resolución A de la tarea 4 del cuestionario**

Este alumno establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID, PID y TFV**, de forma **A**. En la columna de la derecha se puede ver cómo aplica el elemento matemático **ACA**. A partir del gráfico calcula el área de los triángulos que conforman el área total, las suma y obtiene el área que se le pide. Para ello ha necesitado coordinar los registros gráfico y algebraico. En la columna de la izquierda utiliza los elementos matemáticos **LID, PID** y **TFV**, porque calcula el área a partir del planteamiento de una integral, aplica la propiedad de la unión de intervalos correctamente y utiliza la regla de Barrow para hallar las primitivas y evaluarlas en los límites respectivos. Cuando se le preguntó por la solución mediante el cálculo de las áreas de los triángulos lo explica de la siguiente forma:

I: ¿Cómo ha calculado el área, a partir de la representación gráfica?

A7: Calculando dos integrales, una de 0 *a* $\frac{1}{2}$ *de la función, más otra de* $\frac{1}{2}$ *a* 2.

I: ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A7: 2 triángulos. Tenemos dos triángulos, vamos a llamarlos a_1 *y* a_2, *el triángulo* a_1 *tiene de base* $\frac{1}{2}$ *y de altura 1.*

I: ¿De dónde obtiene la altura?

A7: Evaluando la función en $x = 0$ *, obtengo un punto. Porque el intervalo de integración es* $[0,2]$, *entonces necesito saber de dónde a dónde va la gráfica, y los puntos apropiados para evaluar son cuando* x *vale 0 y cuando* x *vale 2. El segundo triángulo tiene de base* $\frac{3}{2}$ *y de altura* 3, *entonces el área es* $\frac{9}{4}$, *y el área del primer triángulo es* $\frac{1}{4}$ (hace cálculos). *El área total seria* $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$ *, la suma de las áreas de los dos triángulos es* $\frac{10}{4}$.

Este alumno establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos **ACA, LID, PID y TFV** para inferir el valor del área bajo la gráfica de la función valor absoluto. Además de describir los procedimientos utilizados en el desarrollo de la tarea, el alumno compara los valores obtenidos a partir del uso del elemento **ACA** y del elemento **LID:**

I: ¿Cómo son los valores obtenidos?

A7: Son exactamente iguales

Este alumno muestra que establece una relación lógica entre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, coordina los sistemas de representación **G** y **A**.

De manera global, en este reporte de caso encontramos que los seis estudiantes muestran diferencias continuas y progresivas en la comprensión del desarrollo del esquema del concepto de integral definida, por los razonamientos que realizaron al establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos necesarios para resolver la tarea planteada, y en particular por los argumentos que utilizaron para justificar sus producciones, la coordinación de registros de representación, y por los procedimientos que utilizaron en las respuestas correspondientes a la tarea propuesta que involucra el dominio de contenido sobre la función valor absoluto.

CONCLUSIONES

En general, en el análisis de la comprensión del concepto de la integral definida mediante el desarrollo del esquema del concepto, pone en evidencia las dificultades que tienen los estudiantes para comprender y utilizar uno de los elementos matemáticos del concepto, como son las propiedades de la integral definida (**PID**), cuando tienen que resolver situaciones relacionadas con la función valor absoluto. Un gran número de alumnos suelen *recordar algunos elementos matemáticos con errores* porque los manejan incorrectamente. Por ejemplo, realizan cálculos incorrectos (con los signos que se obtienen al aplicar la regla de Barrow), desconocen la función valor absoluto y su definición, calculan incorrectamente la primitiva de la función valor absoluto y tienen problemas con su representación gráfica, tienen una falta de manejo tanto del registro gráfico como del algebraico y una falta de coordinación de estos dos registros de representación.

Recepción:10/03/2016 *Aceptación: 24/06/2016*

Hay que considerar que el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida está ligado al de otros conceptos como, en este caso, el de la función valor absoluto. Las dificultades más notorias que presentan los alumnos cuando tiene que utilizar la función valor absoluto son: confunden la función valor absoluto con la función lineal, falta de coordinación entre la representación gráfica y la algebraica, manejo inadecuado de las desigualdades como conceptos previos dentro de la descomposición genética del concepto de la integral definida, como no tienen un dominio de la definición de la función valor absoluto no pueden aplicar la propiedad aditiva de la integral y por tanto tienen dificultad para determinar los límites de integración de la función que van a integrar, y falta de domino de la propiedad aditiva de la integral definida.

En la medida que los estudiantes demostraron mejores desempeños en la resolución de esta tarea que incluye el dominio de contenido del concepto de la función valor absoluto, también mostraron una mayor comprensión en el desarrollo del esquema del concepto de la integral definida, y esto se pudo evidenciar por la forma global cómo ellos resolvieron las diferentes tareas del cuestionario, la manera cómo justificaron los procedimientos realizados durante la entrevista y la imagen que tienen del concepto (Tall y Vinner, 1981) de integral definida que representaron mediante la elaboración del mapa conceptual. Este estudio aporta a futuras investigaciones, porque se deriva de una investigación más amplia que muestra una descomposición genética final que puede ser utilizada en el aula de clase y advierte la necesidad de configurar la solidez del concepto del valor absoluto como elemento fundante en la construcción y uso del concepto de la integral definida de Riemann.

Los resultados hallados indican que en el aprendizaje de las matemáticas existen diversos problemas para su comprensión, posiblemente por la falta de un aprendizaje consciente y duradero en los conceptos previos estudiados, o porque en muchos casos hay privilegio de aspectos procedimentales de tipo algorítmico que dejan de lado la construcción real del concepto, en otros casos, el aprendizaje que adquiere el estudiante es producto de la instrucción previa recibida. Esto sucede, por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que resolver una tarea en el campo del Cálculo integral que involucra la definición del concepto de valor absoluto. Asimismo, existen otros elementos matemáticos asociados al concepto de integral definida y que en muchos casos constituyen una dificultad para los estudiantes cuando van a resolver una tarea que tenga que ver con el concepto de límite, la integral definida en el cálculo áreas bajo curvas cuando la función pasa de positiva a negativa, o es continua a trozos.

Una posible hipótesis, es que una descomposición genética previa de un concepto ayuda a generar una buena instrucción en la clase y por ende garantiza un mejor aprendizaje del concepto. Paralelo a esto, surgen varios interrogantes al respecto y que pueden ser motivo de otras investigaciones ¿Qué acciones son necesarias para que los conceptos matemáticos que circulan en el entorno y son llevados a las aulas de clase tengan sentido y significado? ¿Cómo lograr que los estudiantes no olviden “los temas” con el paso del tiempo, o que sólo “aprendan” para responder a una prueba estandarizada? ¿Cómo lograr dentro de las diferencias individuales, que todos los estudiantes en niveles diferentes de progreso como lo muestra este artículo, alcancen el dominio de los conceptos que involucran la comprensión matemática como, por ejemplo, el valor absoluto u otros conceptos que configuran otras entidades matemáticas?

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría “APOE”*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.J.; Dubinsky, E.; Mathews, D; & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education,* 2, 1 – 32**.**

Cerizola, N., Pérez, N., & Martínez, R. (2000). *Una noción matemática básica y aparentemente simple: el valor absoluto de un número real*. Actas de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Editor CLAME.

Colín, M. P., & Lázaro, L. (2009). *El valor absoluto en el nivel básico. Su uso en el contexto aritmético*. X Congreso Nacional de Investigación Educativa.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / *APOS Theory Glossary.* Georgia Collage & State University. Milledgeville. http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. & MacDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7* (pp.273- 280). Dordrecht: Kluwer Academia Publisher.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) Investigaciones en matemática educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 173-201.

Gagatsis, A. & Thomaidis, I. (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. In M. Artigue et al. (Eds), Vingt Ans de Didactique de Mathématiques en France (p. 343-348). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ginsburg, H. P.; Kossan, N. E.; Schwartz, R.; & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on

Mathematical Thinking**.** In H. P. Ginsburg (ed.): *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Relime, *1, 1,* 5-21.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (Eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education. Proceedings, ICME 5. Working group reports and collected papers*, Nottingham: ShellCenter, 170-172.

Ordaz, M. G. (2007). *Las secuencias didácticas con enfoque constructivista: el caso de la función valor absoluto*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (Vol. 20). CLAME.

Piaget, J. (1963). Las Estructuras Matemáticas y las Estructuras Operatorias de la Inteligencia. En la Colección Psicología y Educación. *La Enseñanza de las Matemáticas* (p. 3-28). Madrid: Editorial Aguilar.

Piaget, J; & García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Sánchez-Matamoros, G.M. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151-169.

Tsamir, P., Rasslan, S., & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to *Right-or-Wrong* tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 240–251.

Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2, 2,* 72-90.

Eliécer Aldana Bermúdez. Categoría Investigador Junior (IJ). Profesor de planta Universidad del Quindío, Armenia – Colombia.
Formación Académica
Doctorado Universidad de Salamanca. Doctor en Educación Matemática.
Maestría/Magister Universidad del Valle – Univalle. Administración de la Educación
Especialización Universidad Santo Tomás De Aquino - Sede Bogotá – Usta.
Docencia Universitaria: Pregrado/Universitario Universidad Del Quindio – Uniquindio. Licenciatura en Matemáticas.
Líneas de investigación: Educación Matemática. Didáctica de la matemática. Educación matemática en y para la diversidad.