Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

Distéfano, María Laura; Aznar, María Andrea; Pochulu, Marcel David

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS EN LA SIGNIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR

Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 11, núm. 2, 2016, pp. 1-16
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS EN LA SIGNIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR

María Laura Distéfano[1], María Andrea Aznar[2], Marcel David Pochulu[3]

mldistefano@fi.mdp.edu.ar; maznar@ fi.mdp.edu.ar; marcelpochulu@hotmail.com

[1,2] GIEMI, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Juan B. Justo 4302, Mar del Plata, Argentina.
[3]Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Nacional de Villa María, Arturo Jauretche 1555, Villa María, Argentina.

Resumen

En este trabajo se analizan prácticas matemáticas y funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de ciertos símbolos matemáticos. Estos símbolos tienen la particularidad de no ser utilizados fuera del ámbito matemático, pero que son de uso frecuente en las asignaturas de la matemática superior, y al mismo tiempo, no suelen ser objeto de enseñanza. Como marco teórico y metodológico de la investigación, se consideró la Teoría de Registros Semióticos de Duval y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática de Godino y colaboradores. A partir de este marco, se elaboró un instrumento destinado a indagar en las prácticas que realizan los estudiantes para la lectura o la formulación de expresiones simbólicas. Inicialmente se diseñó y administró un instrumento a 41 estudiantes de las carreras de Ingeniería, y en una etapa posterior y con un ajuste del mismo, a 101 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado y Licenciatura en Matemática, y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Se determinaron y definieron funciones semióticas que abarcan los aspectos nominal, sintáctico y semántico, como herramientas para el análisis. Estas funciones derivan de las prácticas involucradas en la construcción de significado y permiten describir y caracterizar, el proceso de construcción de significado de los símbolos algebraicos, evidenciando la red de relaciones que pone en juego un estudiante cuando lleva a cabo procesos cognitivos involucrados en la significación de expresiones simbólicas.

Palabras clave: prácticas matemáticas, funciones semióticas, símbolos matemáticos

Mathematical practices and semiotic functions in the meaning of symbolic representations of higher mathematics

Abstract

This paper discusses some mathematical practices and semiotic functions linked to the construction of meaning of certain mathematical symbols. These symbols have the particular feature of having no use outside the mathematical field, but are frequently used in higher mathematics courses, even though they are not usually a teaching subject. As a theoretical and methodological framework of the research, were considered the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction and the Theory of Semiotic Registers and. From this framework, a test was developed as a tool to investigate about the students' practices of reading and writing symbolic expressions. Initially, the test was designed and administered to 41 freshmen of Engineering careers, and at a later stage and with an improvement, was administered to 101 freshmen of the Engineering carrers, Biochemistry, Mathematics and Biology, of the Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Semiotic functions were identified and defined, covering nominal, syntactic and semantic aspects, as tools for the analysis. These functions are derived from the practices involved in the construction of meaning, and they allow to describe and characterize the process of meaning construction of these algebraic symbols, showing the network of relationships that a student brings into play when performing cognitive processes involved in the meaning of symbolic expressions.

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 03/10/2016*

Keywords: mathematical practices, semiotic functions, mathematical symbols

Des pratiques mathématiques et des fonctions sémiotiques dans la signification de représentations symboliques de la mathématique supérieur

Résumé

Dans ce travail on analyse quelques pratiques mathématiques et les fonctions sémiotiques liées à la construction de la signification de certains symboles mathématiques. Ces symboles ont la particularité de n'être pas utilisé en dehors du milieu mathématique, bien qu'on les utilise souvent dans les matières de la mathématique supérieure et, en même temps, ils ne sont pas objet d'enseignement.

Comme cadre théorique et méthodologique de la recherche, on a considéré l'Approche Ontosémiotique de la Cognition et l'Instruction Mathématique et la Théorie de Registres Sémiotiques. A partir de ce cadre, on a élaboré un instrument destiné à rechercher dans les pratiques que les étudiants réalisent pour la lecture ou la formulation d'expressions symboliques. Premièrement on a dessiné et administré un instrument à 41 étudiants des Études d'Ingénieur et, dans une étape ultérieure, et avec une adaptation de celui-ci, à 101 étudiants de la première année des Études d'Ingénieur, de Biochimie, du Professorat et de la Licence en Mathématiques et du Professorat et de la Licence en Biologie de l'Université Nationale de Mar del Plata (Argentine). Les fonctions sémiotiques qui comprennent les aspects nominal, syntaxique et sémantique ont été déterminées et définis, comme outils pour l'analyse. Ces fonctions dérivent des pratiques impliquées dans la construction de la signification, et permettent de décrire et caractériser le processus de construction de signification des symboles algébriques, en mettant en évidence le réseau de relations qu'un étudiant met en jeu quand il réalise des processus cognitifs impliqués dans la signification d'expressions symboliques.

Mots clés: pratiques mathématiques, fonctions sémiotiques.

Práticas matemáticas e funções semióticas no significado de representações simbólicas de matemática superior

Resumo

Neste trabalho são analisados alguns práticas matemáticas e funções semióticas ligadas à construção de significado de certos símbolos matemáticos. Esses símbolos têm a particularidade de não ser usados fora do âmbito matemático, mas são de uso frequente em disciplinas de matemática superior, e ao mesmo tempo, não costumam ser objeto de ensino. Como marco teórico-metodológico da investigação, foram considerados o Enfoque Ontossemiótico da Cognição e da Instrução Matemática e a Teoria de Registros Semióticos. A partir deste marco, foi elaborado um instrumento para investigar as práticas desenvolvidas pelos alunos para a leitura ou a formulação de expressões simbólicas. Inicialmente o instrumento foi desenhado e administrado a 41 estudantes do curso de engenharia, e numa fase posterior e com um ajuste do mesmo a 101 estudantes de primeiro ano dos cursos de Engenharia, Bioquímica, Bacharelado e Licenciatura em Matemática e Bacharelado e Licenciatura em Biologia, da Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Eles foram determinadas e definidas funções semióticas abrangendo os aspectos nominais, sintático e semântico, como ferramentas para a análise. Essas funções são derivadas das práticas envolvidas na construção de significado, e permitem descrever e caracterizar o processo de construção de significado dos símbolos algébricos, evidenciando a rede de relações que põe em jogo um aluno ao realizar processos cognitivos envolvidos na significação de expressões simbólicas.

Palavras-chave: práticas matemáticas, funções semióticas, símbolos matemáticos

1. INTRODUCCIÓN

Leer y escribir utilizando símbolos matemáticos es una necesidad a la que se enfrentan los estudiantes universitarios que cursan asignaturas de Matemática en este nivel. Pero esa necesidad suele traer aparejadas dificultades, particularmente con algunos símbolos que son de uso exclusivo en el ámbito de esta ciencia. Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media, por lo que los estudiantes suelen no conocerlos, pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática dictadas en el nivel universitario. En este nivel, los docentes los emplean asiduamente en el desarrollo de las clases, la bibliografía contiene gran cantidad de expresiones simbólicas, y se espera que los estudiantes realicen, mediante los símbolos, prácticas operativas y discursivas manifestadas en sus resoluciones y argumentaciones. Por estas razones, los alumnos deben adquirir, rápidamente, la habilidad de la escritura y lectura de expresiones que involucran este tipo de símbolos. Sin embargo, ni los símbolos ni las habilidades ligadas a su uso son objetos directos de enseñanza, tal vez bajo el supuesto de que el estudiante la genera por la mención del vocablo del lenguaje natural o coloquial que está asociado al símbolo. Duval (2006) advierte la divergencia entre lo que se dice en forma oral y lo que se escribe en el pizarrón, y manifiesta que en el aula, mientras se habla en lenguaje natural, se escriben expresiones simbólicas como si las expresiones verbales pudieran hacer transparente el tratamiento simbólico. En la práctica docente se observan las numerosas dificultades que los alumnos presentan al momento de leer o escribir en forma simbólica, que conducen a pensar que el proceso de significación de esos símbolos no ha alcanzado el nivel que estas asignaturas requieren. Estas dificultades impactan negativamente, no sólo en los procesos de comunicación relativos a los objetos matemáticos que representan sino también en los que atañen a su comprensión.

Desde una perspectiva pragmática del significado (Kutschera, 1975), la lectura y la escritura son prácticas que forman parte del significado de un símbolo matemático. Dicho significado implica, no sólo el conocimiento de su denominación coloquial, sino también poder aplicar todas las reglas y convenciones que hacen a su uso. Conocer o describir el proceso de construcción de dicho significado puede aportar herramientas que permitan favorecerla.

Habida cuenta de considerar el rol fundamental que la construcción de significados de símbolos tiene sobre el aprendizaje de la Matemática cabe plantearse el siguiente interrogante: ¿cómo realizar una descripción de dicho proceso de construcción en el escenario de las prácticas matemáticas de los estudiantes de un primer curso de Álgebra de carreras universitarias?

El objetivo de este artículo es presentar el análisis realizado para definir un conjunto de funciones semióticas ligadas a distintas prácticas que hacen al significado de un símbolo matemático, la intervención de las mismas en el diseño de un instrumento destinado a la recolección de datos y su utilización como herramientas de análisis del proceso de construcción de significado. Es de destacar que el propósito del artículo no es presentar los resultados obtenidos de la aplicación de un conjunto de funciones semióticas ligadas a un instrumento particular, sino más bien, la metodología para definirlas y analizar el proceso de construcción de significados que ellas conllevan.

Si bien el estudio de las cuestiones simbólicas en el ámbito de la Matemática ha sido abordado desde distintas perspectivas y líneas teóricas, particularmente en el nivel de la enseñanza básica (Hiebert, 1988; Booth, 1988; Gómez Granell, 1989; Alcalá, 2002; Palencia y Talavera, 2004; Socas, 2011), son escasos los antecedentes de estudios realizados en el nivel superior. Entre estos últimos se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012). Estos trabajos están centrados en la exploración y tipificación del uso que los docentes hacen de expresiones en el registro del lenguaje natural y del registro simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad. Ponen de manifiesto, como problemática, la escasa atención que los docentes dan al uso simultáneo de ambos registros y a la conversión entre representaciones en dichos registros y las dificultades que esto genera en los estudiantes.

Otros trabajos están focalizados en experiencias de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario. Tal es el caso de Distéfano, Urquijo y González (2010), abordado desde la Teoría de Registros Semióticos, y de Lacués Apud (2011, 2014), bajo la perspectiva de los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS). En ambos casos, los autores arriban a una evaluación positiva de las respectivas intervenciones educativas y se concluye que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en la utilización de símbolos matemáticos.

En relación con estudios de significado mediante la utilización de funciones semióticas, se encuentra la tesis doctoral de Rojas Garzón (2012), quien documenta las dificultades que presentan algunos estudiantes, de educación básica y de educación media, en relación a la articulación de los significados asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático.

Otro antecedente en el estudio de significado utilizando funciones semióticas es el artículo de Distéfano, Aznar y Pochulu (2012). En el mismo se explora el uso que realizan los estudiantes de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial, al resolver actividades con números complejos, concluyendo que las prácticas matemáticas desarrolladas en las clases no permitieron una construcción adecuada del significado geométrico en este campo numérico.

Conjugando el estudio de significado de símbolos matemáticos a través funciones semióticas, Distéfano, Pochulu y Font (2015), analizan la complejidad cognitiva de distinto tipo de expresiones simbólicas, identificando categorías en los tipos de respuestas de los estudiantes ante tareas con esas expresiones simbólicas. También analizan, en términos de las funciones semióticas, algunos errores frecuentes que presentan los estudiantes vinculados a cuestiones simbólicas.

2. MARCO TEÓRICO

Los lineamientos teóricos en que se enmarca esta investigación están dados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) y por la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval.

Se partió de la concepción de *práctica matemática,* a la que se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino Batanero y Font, 2008). A partir de este concepto, surge la noción de *significado*. El mismo es definido en este marco como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es de índole ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto la naturaleza como en el origen de dichos objetos (Godino, Batanero y Font, 2008).

Para el EOS, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2008). Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, los distintos objetos no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos, pudiendo ejercer el rol de antecedente o de consecuente (Godino Batanero y Font, 2008).

A diferencia de otras líneas teóricas, en las que los objetos matemáticos se refieren sólo a conceptos, el EOS considera objeto matemático a todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende Matemática (Godino, 2002). La tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), está constituida por: situaciones-problemas, lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos. Estas seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones*, definidas por Godino, Batanero y Font (2008) como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos” (p. 8). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. Por consiguiente, las configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de una función semiótica.

De la descripción ontológica que realiza el EOS se desprende que este enfoque considera que los símbolos matemáticos son objetos matemáticos, por ser elementos del lenguaje. Además, como representaciones ostensivas, tienen, por una parte, un valor representacional y, por otra parte, un valor instrumental:

> El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental ‘algo’ por ‘algo’. En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el ‘iceberg’ de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita (Font, Godino & D’Amore, 2008, p. 13).

De esta manera, este enfoque subraya el rol que tienen las representaciones en las prácticas matemáticas y en la comprensión de un objeto. Esto es debido a que dicha comprensión, por parte del estudiante, se manifiesta en su competencia en el sistema de prácticas asociadas al mismo y, cada subconjunto de ellas, está condicionado por el par objeto/representación.

En su Teoría de Registros Semióticos, Duval (2004) destaca el rol fundamental que las representaciones semióticas juegan dentro del aprendizaje de la matemática, afirmando que dichas representaciones no sólo son indispensables para la comunicación sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. Postula que “es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis” (Duval, 2004, p. 16).

Dentro de esta Teoría se distinguen tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación* de representaciones, el *tratamiento* (transformación efectuada dentro de un mismo registro) y la *conversión* (transformación efectuada entre distintos registros).

La formación de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados, dentro del conjunto de signos utilizados en dicho registro, y la posterior combinación de acuerdo a las reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: la determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades, y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior.

Los tratamientos y las conversiones son actividades cognitivas ligadas a la posibilidad de transformación de las representaciones semióticas. Las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas que sistematicen o regulen su ejecución. Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, ya que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización.

3. METODOLOGÍA

La investigación realizada es de tipo cualitativo. El diseño metodológico escogido lleva a situarla en los siguientes campos (Lincoln y Guba, 1985):

- *Exploratoria*, pues se pretende indagar sobre la construcción de significados, por parte de estudiantes universitarios, dentro del registro simbólico algebraico.
- *Descriptiva*, dado que se procura caracterizar los rasgos fundamentales del proceso de significación de símbolos matemáticos.
- *Etnográfica*, puesto que se pretende comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, a través de una inmersión en su pensamiento y práctica.
- *Empírica*, basada en la observación, con un trabajo fundamentado en hechos de experiencia directa no manipulados por la investigadora.
- *De campo*, pues la información se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- *Hermenéutica*, en el sentido de que se realizarán análisis sobre las interpretaciones que hacen los estudiantes.

Para llevar a cabo la investigación fue necesario acotar la cantidad de símbolos sobre los que se focalizaría el estudio. La selección estuvo basada, en primer lugar, en

orientar la investigación hacia símbolos que fueron creados en el ámbito de la Matemática y que son utilizados, predominantemente, en el quehacer matemático. Son aquellos a los que Pimm (1990) denomina *logogramas* y Socas (2010) define como *signos artificiales*. Esta característica en su uso permite suponer que la construcción del significado de este tipo de símbolos está, en principio, restringido a las prácticas que se realizan en el desarrollo de las asignaturas. En segundo lugar, se pretendía que el proceso de construcción de significado estuviera en evolución, y no completamente avanzado. Por estas razones, se buscó entre aquellos símbolos que no fueran utilizados en la escuela media, o al menos que su uso en dicha etapa fuera poco frecuente.
Finalmente, bajo estas consideraciones, se registró cuáles son los símbolos que más aparecen en los materiales y bibliografía que se utilizan en las asignaturas que cursan los estudiantes a los que se les administraría el instrumento.
La decisión final fue restringir el estudio a seis símbolos: dos operadores relacionales, $\in$ y $\subset$, dos operadores lógicos, $\wedge$ y $\vee$, y los cuantificadores, $\forall$ y $\exists$.
Se diseñó y construyó un instrumento *ad-hoc*, para relevar datos relativos a las prácticas que realizan los estudiantes en la lectura o en la formulación de expresiones simbólicas, como parte del significado de los símbolos en estudio. El mismo tuvo dos versiones que fueron administradas en años consecutivos. Para el diseño de la versión piloto, se tuvieron en cuenta, inicialmente, distintas prácticas asociadas al uso de símbolos estudiados en la lectura, escritura y determinación de valor de verdad de expresiones simbólicas. Posteriormente a la administración de la versión piloto, y constatadas las prácticas previamente consideradas, se ajustó la descripción de las mismas y se definieron funciones semióticas ligadas a dichas prácticas. A partir de ellas, se hicieron ajustes sobre la versión piloto del instrumento que permitieron evaluar en el mismo la manifestación del establecimiento de dichas funciones semióticas, para cada uno de los símbolos en estudio.
El instrumento está compuesto por actividades de lectura y escritura de expresiones simbólicas, tales como la escritura de ejemplos de uso, el reconocimiento de estructuras sintácticas, tareas que implican conversiones entre el registro del lenguaje natural o coloquial y el registro simbólico-algebraico, y la asignación de valores de verdad.
Se propusieron expresiones con distinto nivel de complejidad: expresiones atómicas con símbolos de pertenencia o inclusión, expresiones moleculares con operador lógico de conjunción o disyunción y expresiones moleculares con una variable cuantificada. Esta variación en la complejidad de las expresiones estuvo destinada a que se pudiera extraer información de un modo segmentado. Se incluyeron expresiones similares escritas en dos formas diferentes: por una parte, respetando las reglas de formación de fórmulas de la lógica formal y, por otra, representadas con convenciones de uso habitual en Matemática.
Todas las expresiones refieren a unidades temáticas que se imparten en la escuela media y se repasan en el curso de ingreso, de modo que el contenido matemático al que la expresión refiere no resultara un obstáculo en la comprensión de la expresión.
El protocolo completo de la segunda versión puede verse en el Anexo 1.
La primera versión del instrumento se administró a 41 estudiantes de las carreras de Ingeniería (Electrónica, Eléctrica, Electromecánica, Mecánica, Química, en Alimentos, en Materiales, Industrial). La segunda versión fue administrada a 101 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado y Licenciatura en Matemática y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Los datos fueron relevados, en cada caso, a mediados del curso de Álgebra, durante el primer cuatrimestre de actividad académica.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Las funciones semióticas que se definieron se constituyeron en una herramienta metodológica central en esta investigación. Presentar su definición, su uso y análisis en la investigación desarrollada es el objetivo de este artículo.
Por ello, en esta sección se describen los análisis de las prácticas matemáticas que dieron lugar a la definición de dichas funciones semióticas como así también las características de cada una de estas funciones semióticas y su incidencia, tanto en el rediseño del instrumento como para el análisis de la complejidad semiótica de las expresiones que conforman el instrumento.

4.1. Las prácticas matemáticas

Para poder analizar el proceso de construcción del significado, desde la concepción pragmática del EOS, es necesario distinguir las prácticas matemáticas asociadas al manejo de expresiones simbólicas.
En el proceso de enumerar las prácticas matemáticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo se tuvo en cuenta no sólo lo relativo a lo puramente representacional sino también los aspectos sintácticos y semánticos. La sintaxis y la semántica constituyen – junto a la pragmática – las tres dimensiones consideradas en un análisis semiótico, donde la sintaxis concierne a la relación sistémica que un signo mantiene con otros y la semántica corresponde a la relación entre el signo y los objetos a los cuales se refiere (Tobón Franco, 2004). Es apropiado el estudio de cada dimensión por separado pues, de acuerdo con Klimovsky y Boido (2005, p. 50), "la sintaxis, la semántica y la pragmática, originan problemas muy ligados entre sí, pero constituyen, realmente, ámbitos de estudio diferentes, aunque en conjunto se los considere formando parte de la disciplina llamada 'semiótica' o 'teoría de los signos.' ". Diversos autores plantean el abordaje de ambos aspectos en el estudio del manejo simbólico desde una perspectiva didáctica (Gómez Granell, 1989; Rojano, 1994; Goldin y Kaput, 1996; Palarea Medina, 1999).
Para esta investigación se consideró que las prácticas vinculadas al proceso de construcción de significado de un símbolo matemático están constituidas por:

- *Representar en forma escrita u oral el vocablo asociado a un símbolo dado, o, recíprocamente, representar en forma escrita el símbolo asociado a un vocablo dado.*

Esta práctica está ligada al hecho básico de conocer el símbolo. Constituye, trivialmente, el paso inicial en el proceso de construcción de significado, pues no sería posible efectuar ninguna otra práctica, que implique la utilización del símbolo en cuestión, si no se conoce su grafismo ni la asociación con el vocablo del lenguaje coloquial que lo identifica.

- *Escribir una proposición de manera simbólica, respetando las reglas de sintaxis asociadas a los símbolos utilizados.*
- *Decidir si una expresión simbólica dada está correctamente escrita de acuerdo con las reglas de sintaxis de los símbolos empleados*.

Estas prácticas requieren reconocer la estructura formal de la sintaxis asociada a un determinado símbolo. Implican identificar la secuencia correcta en la formulación de una expresión en la que participa el símbolo, como así también el rol que ejerce cada uno de los restantes símbolos. Estas prácticas están vinculadas con la actividad cognitiva definida por Duval (2004) como 'formación de representaciones' puesto que, en los términos de este autor, se debe realizar o constatar la selección de símbolos apropiados dentro del registro simbólico-algebraico y combinarlos de acuerdo con las reglas de conformidad de dicho registro.

- *Determinar el valor de verdad de una proposición dada de manera simbólica.*
- *Efectuar conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial.*

Estas dos últimas prácticas están ligadas a la cuestión semántica, esa decir a comprender el contenido de la expresión simbólica. Son centrales en tareas de lectura, pues no es suficiente la simple decodificación de los símbolos para interpretar el contenido semántico de una expresión.

Las prácticas matemáticas, como componentes del significado, involucran asociaciones de objetos. Así, la práctica en la que se observa si un estudiante conoce el símbolo implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo de la lengua natural que lo identifica. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica que emplea determinado símbolo, requiere la asociación del símbolo a la forma sintácticamente correcta de su uso. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, en un caso, poder asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y en el otro, asociar la expresión simbólica y la expresión coloquial equivalente.
Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que conjugan los distintos objetos involucrados en las prácticas matemáticas descritas.

4.2. Las funciones semióticas

Teniendo en cuenta los objetos involucrados en las prácticas matemáticas ligadas al proceso de construcción de significado de un símbolo, se definieron tres funciones semióticas, a las que se consideró como *principales*:

F1: relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación.
F2: relaciona el vocablo/símbolo con la estructura sintáctica de la expresión que lo contiene.
F3: relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Las funciones semióticas definidas, de acuerdo a los elementos que vinculan y a las prácticas matemáticas implicadas, pueden clasificarse de la siguiente manera: F1 es *nominal*, F2 es *sintáctica* y F3 es *semántica*.
En la Figura 1 se representan estas funciones semióticas principales, detallando el antecedente y el consecuente para cada una de ellas.

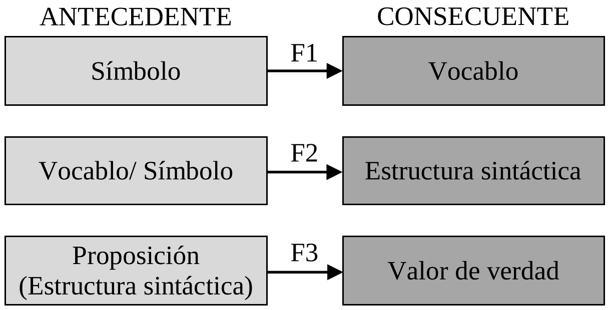

Figura 1. Funciones semióticas principales ligadas a la construcción de significado de un símbolo

Para analizar las *conversiones*, en ambos sentidos, entre el registro de la lengua natural o coloquial y el registro simbólico-algebraico se definieron sendas funciones semióticas que, como se detallará más adelante, requieren de algunas de las funciones semióticas principales. Se las denominó F_{cs}, para las conversiones del registro coloquial al simbólico, y F_{sc}, para las conversiones del registro simbólico al coloquial. También se consideró una función semiótica relativa *tratamiento*, F_t, que debe efectuarse en el registro coloquial, la cual es interna a dicho registro. Estas funciones semióticas se representan en la Figura 2, detallando su antecedente y su consecuente.

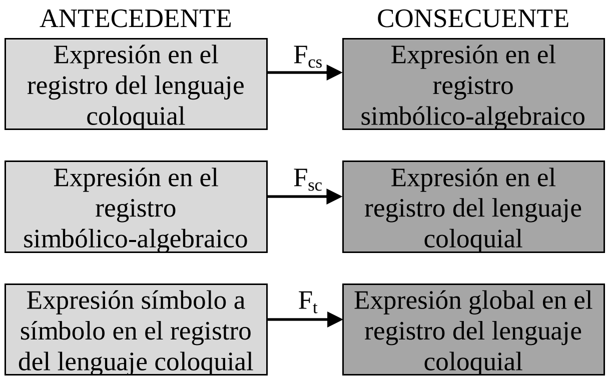

Figura 2. Funciones semióticas relativas a las conversiones y tratamientos

Cada una de las funciones semióticas definidas posee características que le son propias, las cuales se describen a continuación.

La función semiótica F1. Tal como se expresó, la función

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 03/10/2016*

semiótica F1 relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación en el lenguaje natural o coloquial. De las tres funciones principales, es la de menor complejidad y por ello la más elemental. Sin embargo, su construcción por parte de un sujeto se percibe para que puedan construirse las otras dos funciones semióticas. Es decir, no sería posible reconocer la pertinencia de la sintaxis en el uso de un símbolo ni interpretar el sentido de una expresión que lo involucra sin conocer, en principio, cómo se lo denomina.
En el caso de esta función semiótica no se distinguen particularidades en relación a cada símbolo.

La función semiótica F2. Se establece como asociación entre la denominación del símbolo o el símbolo y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Es importante destacar que esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por ellos. Dichos roles están vinculados al universo de objetos matemáticos involucrados en el campo de problemas en el que se realizan las prácticas matemáticas. La sintaxis está ligada a las reglas de formación de representaciones en el registro simbólico, que permiten obtener expresiones *bien formadas*.

La formación de representaciones semióticas es la primera de las actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis descriptas por Duval (2004). Si dicha representación es realizada en un registro semiótico ya construido y utilizado por otros, debe respetar las reglas de conformidad que se definen en dicho registro y que están acordadas por la comunidad que lo utiliza. Tal es el caso del registro simbólico-algebraico, cuyas reglas de conformidad provienen tanto de la Lógica formal como de convenciones propias del uso en el ámbito de la Matemática. Las reglas de conformidad se refieren a: la determinación de las unidades elementales a utilizar (en este caso símbolos), las combinaciones admisibles entre las unidades elementales y las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa.
Cada uno de los símbolos en estudio requiere de una estructura sintáctica particular para formular una expresión que lo contenga. El reconocimiento de dicha estructura, tanto en expresiones ya formuladas como en las de construcción propia, es una manifestación del establecimiento de la función semiótica F2
A continuación se describe la estructura sintáctica que corresponde a cada uno de los símbolos en estudio.

• <u>Pertenencia e inclusión</u>
La pertenencia y la inclusión son operadores relacionales, por lo que cada uno debe ser precedido y sucedido por un operando relacional. El operando relacional de la izquierda, es decir el que precede, será un elemento o un conjunto, según si el símbolo es la pertenencia o la inclusión, respectivamente. El operando relacional de la izquierda debe ser un conjunto en ambos casos.
En la Figura 3 se esquematiza la estructura que debe tener una expresión en la que participe el símbolo de pertenencia o el de inclusión.

Operando relacional de la izquierda	*Relación representada por el símbolo*	Operando relacional de la derecha

Figura 3. Estructura sintáctica para los símbolos de pertenencia y de inclusión

En el caso de la pertenencia, las reglas de sintaxis exigen que, para que una expresión esté bien formada, el operando de la izquierda debe jugar el rol de *elemento* mientras que el de la derecha debe ser un *conjunto*. Por ejemplo, la expresión $-2 \in N$ es una expresión bien formada (aunque sea falsa), porque el operando de la izquierda está en la categoría 'número' y el de la derecha es un conjunto de números; en cambio la expresión $\{-2\} \in N$ no está bien formada pues el operando de la izquierda está en la categoría 'conjunto' y el de la derecha no es un conjunto de conjuntos.
Es necesario hacer una aclaración en relación a este símbolo. En el campo de problemas relativos a conjuntos numéricos, abordados en un curso de álgebra inicial, una expresión del tipo $\{2\} \in N$ está mal formulada, como ya se fundamentó en el párrafo anterior. En cambio, la expresión $\{2\} \in \{\{1\},\{4\}\}$ está bien formulada en un universo que contemple como objetos matemáticos a conjuntos de conjuntos. Esto conduce al hecho de que el objeto $\{2\}$ puede ser considerado como elemento. Dicho de manera general, los conjuntos pueden jugar el rol elementos en ciertos contextos. Esa posibilidad implica ampliar el significado de 'elemento' y de 'conjunto'. Sin embargo, la población de individuos sobre la que se define esta investigación no tiene construida esa ampliación, pues nunca se han enfrentado a prácticas matemáticas que intervengan conjuntos de conjuntos. Por esa razón, esta situación no es contemplada en el diseño del instrumento.
Análogamente, una expresión en la que esté presente el símbolo de inclusión estará bien formada si ambos operandos juegan el rol de *conjunto* en el universo de referencia trabajado.
En este caso, cabe hacer la misma observación que en el caso de la pertenencia. Si se trabajara con conjuntos de conjuntos, la expresión $\{1,2\} \subset \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ está mal formada pues el operando de la izquierda es un conjunto de números y el de la derecha es un conjunto de conjuntos.

• <u>Conjunción y disyunción</u>
Los símbolos de conjunción y disyunción representan operaciones lógicas, por lo que debe ser precedido y sucedido por un operando lógico.
Para una expresión en la que participe el símbolo de conjunción o el de disyunción, se distingue una estructura como la que se esquematiza en la Figura 4.
.

Operando de la izquierda	*Operación lógica representada por el símbolo*	Operando de la derecha

Figura 4. Estructura sintáctica para los símbolos de conjunción y de disyunción

La condición para que la expresión esté bien formada es que ambos operandos sean proposiciones, es decir expresiones para las cuales tenga sentido afirmar que son verdaderas o falsas. Esto requiere que se reconozca si los operandos son proposiciones.
Cabe una observación para el caso de la conjunción. A

diferencia de las reglas que establece la Lógica formal, en Matemática son de uso habitual representaciones en las que se hace un "uso tácito" de este símbolo. Por ejemplo en Matemática, la expresión $a, b \in R$ se interpreta por convención como: $(a \in R) \wedge (b \in R)$. Estas expresiones de uso frecuente también fueron consideradas como correctas en esta investigación.

• *Cuantificadores*
Para expresiones cuantificadas, la estructura estrictamente bien formada desde la Lógica, debe contener al cuantificador seguido de la variable cuantificada y luego una función proposicional (o forma proposicional) referido a la variable cuantificada, como se esquematiza en la Figura 5.

Cuantificador (universal o existencial)	Variable cuantificada	Función proposicional

Figura 5. Estructura sintáctica para los cuantificadores

Se entiende por función proposicional en una variable *x* a cualquier expresión que contiene a la variable *x* y que, al sustituir *x* por algún objeto del universo de referencia (dominio de la variable), la expresión se convierte en una proposición (Garrido, 1979).
Resulta necesario puntualizar algunos aspectos relativos a ciertas convenciones que son de uso en la Matemática, y que por lo tanto son admitidas como correctas aunque difieren de las reglas estipuladas por la Lógica formal.
Por ejemplo, una expresión que, desde la estructura estrictamente bien formada de la Lógica, se representaría:

$$(\exists x)\ (x \in Q \wedge x^2 < 1)$$

en Matemática se admite como correctamente escrita de esta manera:

$$\exists x \in Q \,/\, x^2 < 1.$$

Para el cuantificador universal, en el ámbito de la Matemática se permite la convención del "uso tácito". Expresiones tales como:

$$\text{Si } x, y \in R \text{ entonces } |x + y| \le |x| + |y|$$

son de uso habitual, en lugar de la expresión que sería considerada como bien formada desde la Lógica:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (x \in R \wedge y \in R \Rightarrow |x + y| \le |x| + |y|)$$

Este modo de uso del cuantificador universal, al que aquí se ha denominado como tácito, es reconocido como habitual y válido por Klimovsky y Boido (2004, p. 139), quienes expresan: "En general, muy a menudo, los cuantificadores universales iniciales pueden sobreentenderse, de modo que *x*R*a* se identificará con ($\forall$*x*) *x*R*a*".
En esta investigación, se consideraron como correctamente escritas tanto las expresiones que respetan la estructura sintáctica determinada desde la Lógica formal como las que toman la forma de uso habitual en Matemática.

La función semiótica F3. Esta función semiótica vincula una expresión sintácticamente correcta con su valor de verdad. La manifestación de esta función semiótica permite reconocer si el estudiante le da sentido al contenido semántico que está implícito en la expresión simbólica.

• *Pertenencia e inclusión*
En el caso de la pertenencia, una expresión esté bien formada será verdadera si el operando de la derecha es un conjunto de objetos de una determinada categoría y el de la izquierda forma parte de dicha categoría.
Para que una expresión que utilice la inclusión sea verdadera *todos* los elementos que pertenecen al primer conjunto deben pertenecer al segundo.
Se debe realizar una categorización de los elementos de ambos conjuntos y luego la generalización sobre la pertenencia de todos los elementos del primer conjunto en el segundo.

• *Conjunción y disyunción*
Para establecer el valor de verdad de una conjunción o una disyunción, se debe establecer previamente el valor de verdad de cada una de las proposiciones que constituyen a los dos operandos lógicos. Luego es necesario conocer la asignación de verdad resultante de estas operaciones lógicas. En el caso de la conjunción, *ambas* proposiciones deben ser verdaderas para que el resultado sea verdadero, mientras que para la disyunción es suficiente que *alguna* de las proposiciones sea verdadera para que resulte verdadera.

• *Cuantificadores*
El establecimiento del valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador universal requiere de una generalización sobre todos los elementos del conjunto de referencia, para determinar que todos ellos satisfacen la función proposicional definida en la expresión.
En el caso del cuantificador existencial, para determinar el valor de verdad de una expresión que lo contiene es suficiente con determinar la verdad de la función proposicional para al menos un valor de la variable cuantificada, dentro del conjunto de referencia.

La función semiótica F_{cs}. Esta función semiótica se definió para analizar las conversiones de expresiones desde el registro del lenguaje coloquial al registro simbólico-algebraico. Como se representó en la Figura 2, en esta función semiótica el antecedente es una expresión coloquial y el consecuente es la correspondiente expresión en el registro simbólico.
Se consideró que en estas funciones, correspondientes a este sentido de la conversión, están implícitas las funciones semióticas F1 de cada uno de los símbolos que participan en la expresión, para transformar los vocablos en símbolos, y la función F2 para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico.
En la Figura 6 se esquematiza la función semiótica F_{sc}, en términos de las funciones F1 y F2.

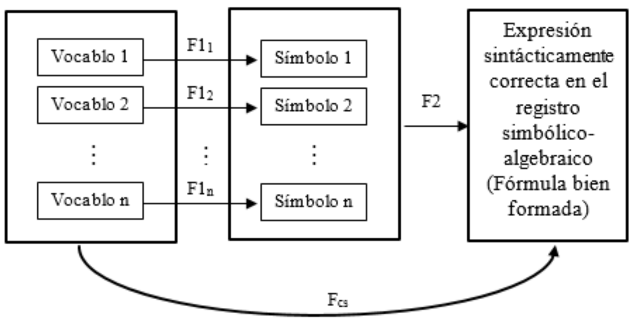

Figura 6. Función semiótica F_{cs} en términos de las funciones semióticas F1 y F2

Las funciones semióticas F_{sc} y F_t. Como en el caso anterior, se consideró que en estas conversiones, del registro simbólico-algebraico al registro coloquial, también intervienen las funciones semióticas F1 correspondientes a los símbolos que participan de la expresión simbólica de partida. La conversión podría resultar en una traducción símbolo a símbolo, proveniente de una conversión efectuada 'uno a uno'. La oración resultante de una traducción de ese estilo podría no expresar la idea global que se está representando, y no asemejarse a las que se utilizan para la comunicación en la lengua oral. Por ejemplo, para convertir al lenguaje coloquial la expresión simbólica '$\exists\, x \in Z,\ x < 0$', no es lo mismo expresar '*Existe equis perteneciente a Z equis menor a cero*' que formularlo como '*Algunos números enteros son negativos*' o '*Existe algún número entero que es negativo*'. Para obtener este tipo de expresiones en el lenguaje coloquial, es necesario realizar una paráfrasis que, como actividad cognitiva implica aplicar un tratamiento en el registro coloquial. Por lo tanto, para efectuar los análisis se definieron dos funciones semióticas, correspondientes a cada una de las actividades cognitivas mencionadas, F_{sc} y F_t, cuyos antecedente y consecuente se presentaron en la Figura 2.
En la Figura 7 se presenta un esquema de estas funciones, en el proceso de obtener una expresión coloquial a partir de una expresión simbólica.

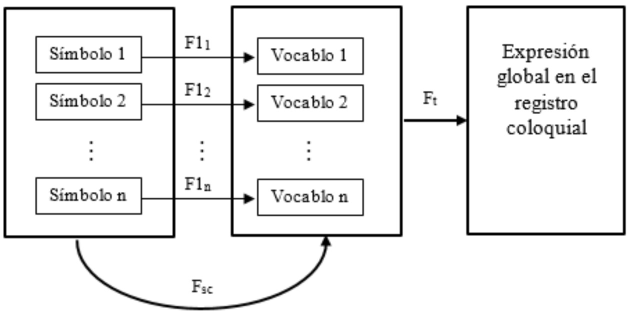

Figura 7. Función semiótica F_{sc} y F_t

En las próximas subsecciones se describe cómo fueron usadas las funciones semióticas en distintas etapas de la investigación. Por una parte, tuvieron incidencia en el diseño del instrumento, y por otra, formaron parte del análisis de la complejidad semiótica de las expresiones simbólicas y del análisis de errores.

4.3. La incidencia de las funciones semióticas en el diseño del instrumento

En esta sección se detalla a través de qué tareas fueron evaluadas las funciones semióticas definidas. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no se describen todos los aspectos que se consideraron en el diseño del instrumento, pues escapa al objetivo de este artículo.
En el Anexo se presenta el protocolo de la segunda versión del instrumento, en el que pueden verse los enunciados de cada uno de los ejercicios que lo componen.
En el Ejercicio 1, el requerimiento de la escritura de la expresión coloquial correspondiente al símbolo permite evaluar la función semiótica F1. La formulación del ejemplo de uso del símbolo está destinada a evaluar la función semiótica F2, en una tarea de escritura.
Con la intención de evitar que los estudiantes formularan expresiones tales como '$x \in R$' o como '$p \wedge q$', en las que el uso de literales no permite conocer con certeza a qué objetos hace referencia el estudiante, se incluyó en el enunciado la condición de que el ejemplo dado fuera verdadero, de modo que los ejemplos fueran proposiciones. Esto permite evaluar, por un lado, los roles de los objetos involucrados en la función semiótica de sintaxis (F2) y, por otro, la función semiótica relativa a la asignación del valor de verdad (F3), que está ligada al aspecto semántico de la expresión.
En el Ejercicio 2, se evalúa la función semiótica de sintaxis (F2), tanto en una tarea de lectura (necesaria para la decisión de responder en relación a la corrección de cada expresión dada) como en una tarea de escritura (al momento de reescribir aquellas expresiones que el alumno considere como incorrectamente escrita). Debe observarse que en este ejercicio se incluyó tanto un ítem correctamente formulado como uno que no lo está, para cada uno de los símbolos en estudio, los cuales no siguen un orden para evitar una automatización en las respuestas.
En el Ejercicio 3 se propusieron algunas expresiones simbólicas para ser expresadas en lenguaje coloquial y algunas expresiones coloquiales para ser expresadas en forma simbólica. Estas tareas permiten evaluar la manifestación de las funciones semióticas correspondientes a las conversiones entre los registros coloquial y simbólico-algebraico, en ambos sentidos. También se solicita el establecimiento de la asignación del valor de verdad, con el objetivo de evaluar la función semiótica F3.
Las funciones semióticas definidas no sólo se tuvieron en cuenta para el diseño de cada ejercicio, sino también determinaron la forma cuantitativa del relevamiento de datos. Así, para cada estudiante, se consignó si se observaba o no la manifestación de cada una de las funciones participantes en cada ítem. Esto dio lugar a la definición de 58 variables dicotómicas asociadas a la manifestación de las funciones semióticas asociadas a los distintos ítems que conforman el instrumento, mediante las cuales se registraron los datos provenientes de las respuestas de cada estudiante.

4.4. Análisis de la trama de funciones semióticas intervinientes en una actividad de simbolización

El significado de un objeto matemático está definido por el conjunto de prácticas matemáticas que involucran a dicho objeto. Al efectuarse una práctica matemática interviene un sistema de objetos matemáticos vinculados entre sí. Dicho sistema constituye una configuración de objetos matemáticos. Los roles que juegan los objetos dentro de la práctica pueden ser representados como el antecedente y el consecuente de una función semiótica. De esta manera, la utilización conjunta de una configuración de objetos y las funciones semióticas que los vinculan, visualiza la complejidad se significados que entran en juego en la resolución de una actividad matemática. Por estas razones, se combinaron estas dos herramientas para observar el complejo sistema de significados que el estudiante debe construir y poner en juego al momento de manipular expresiones simbólicas.
Así, la combinación de estas dos herramientas, aplicada a la resolución de un ítem del instrumento, revela la trama de

funciones semióticas que el estudiante debe establecer.

Para ejemplificar esta trama de funciones semióticas y la complejidad que la misma tiene, en la Figura 8 se presenta la configuración de uno de los ítems de Ejercicio 2, con las funciones semióticas que participan en su resolución. El ítem seleccionado para mostrar en este ejemplo corresponde a una expresión incorrectamente formulada utilizando el símbolo de inclusión (‘3⊂Z’), por lo que la resolución requiere detectar la incorrecta sintaxis y la reformulación del mismo.

En la resolución de cada ítem quedan involucradas una gran cantidad de funciones semióticas. Por esta razón, en el esquema de la Figura 8 se han representado no sólo aquellas que fueron definidas especialmente para esta investigación sino también algunas otras, a las que se denominó ‘Auxiliares’ (FA). Estas últimas no corresponden al proceso de significación propio del símbolo en estudio, pero necesariamente intervienen en la interpretación de la totalidad de la expresión. En el esquema fueron representadas con líneas punteadas y en color gris, mientras que las funciones semióticas principales son representadas en color negro y con líneas más gruesas.

Dado que la expresión podría ser reescrita de dos formas diferentes (‘3 ∈ Z’ ó ‘{3} ⊂ Z’), en la tarea de escritura puede intervenir la función semiótica F2 del símbolo ‘∈’ o la del símbolo ‘⊂’, según la forma de reescritura elegida. Las mismas fueron representadas en el esquema como F2(∈) y F2(⊂), respectivamente.

Las funciones semióticas auxiliares FA1 y FA2 vinculan los símbolos ‘3’ y ‘Z’ con su correspondiente vocablo en lenguaje coloquial, mientras que FA3 y FA4 relacionan el vocablo asociado al símbolo con su rol, como ‘elemento’ y ‘conjunto’, respectivamente. Esto incidirá en la decisión de la regla de sintaxis a utilizar, ya sea para definir si la expresión está correctamente escrita como para reescribirla. Finalmente, las funciones auxiliares FA5, FA6 y FA7 intervienen, desde la Argumentación. La función FA5 es necesaria para la decidir, en la lectura de la expresión, si es adecuada la aplicación de la regla de sintaxis utilizada. Dado que en este ejemplo la expresión está incorrectamente formulada, la función F2 aparece tachada en el esquema de la Figura 8. Con esto se pretende representar que la función semiótica participa en la decisión de que es una expresión que no está bien formada. Las funciones FA6 y FA7 inciden en la decisión de la regla de sintaxis a utilizar en la reescritura de la expresión, según cuál sea la forma de reescritura elegida. Es decir, la función auxiliar FA6 incide en la decisión sobre la aplicación de la sintaxis del símbolo de pertenencia, F2(∈), si es que la opción elegida como reescritura es ‘3 ∈ Z’, mientras que la función FA7 lo hace sobre la función F2(⊂) se reescribe como ‘{3} ⊂ Z’.

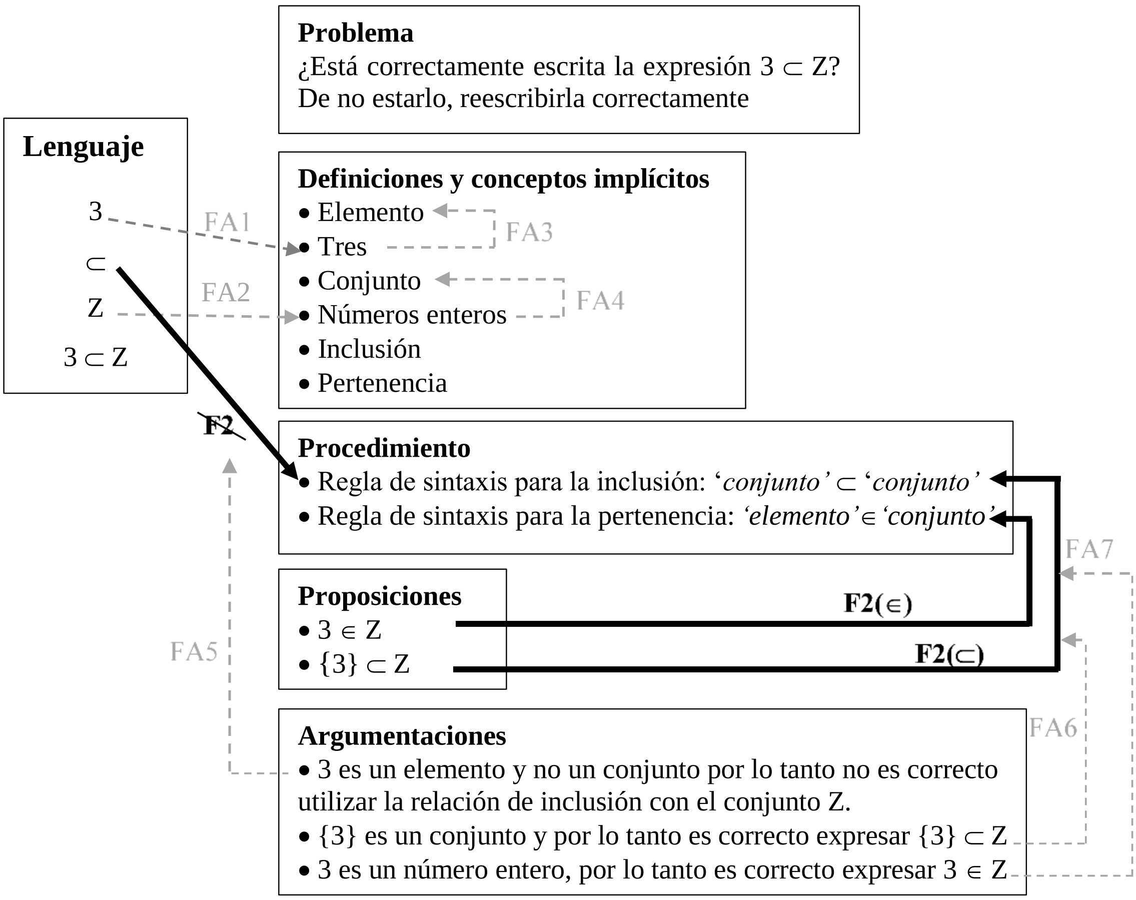

Figura 8. Configuración epistémica y funciones semióticas del análisis de un ítem del Ejercicio 2 del instrumento

Las configuraciones fueron efectuadas para todos los ítems del Ejercicio1 y del Ejercicio 2. La trama de funciones semióticas obtenida en cada caso fue utilizada como herramienta para efectuar un análisis cualitativo de los datos obtenidos de las resoluciones de los estudiantes.
El análisis conjunto de todas estas configuraciones, con sus correspondientes funciones semióticas, permitió obtener un esquema general de esta trama o red de funciones semióticas en tareas vinculadas con las expresiones simbólicas.

CONCLUSIONES

Bajo la postura pragmática del significado de los objetos matemáticos adoptada por el EOS, en este trabajo se describieron las prácticas matemáticas asociadas al significado de algunos símbolos matemáticos, empleados en las asignaturas universitarias de primer año.
Ligadas a las prácticas descritas se definieron funciones semióticas cuya presentación es el objetivo central de este artículo.
Las funciones semióticas definidas se constituyeron en herramientas metodológicas que participaron en distintos momentos de la investigación. Las mismas permitieron, por una parte, refinar el diseño del instrumento utilizado en la investigación, y definir las variables dicotómicas para el registro de datos cuantitativos; por otra parte, su inserción dentro de las configuraciones permitió describir la complejidad de significaciones presentes dentro de las prácticas matemáticas en las que intervienen los símbolos estudiados para un posterior análisis cualitativo.
La evaluación del establecimiento de dichas funciones semióticas fue viable a través de distintas tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas. Además, estas funciones semióticas hacen visibles las conexiones entre los objetos primarios que conforman las configuraciones de los ejercicios propuestos en el instrumento, lo que permite no sólo un análisis detallado sino también el reconocimiento de la complejidad cognitiva implícita en el establecimiento de significado. La conjunción de las funciones semióticas y las configuraciones epistémicas plantea una especie de 'mapa' de las vinculaciones necesarias, a modo se sistema, y ponen en evidencia la trama de funciones semióticas que intervienen al momento de establecer el significado de expresiones simbólicas.
A través del análisis de las configuraciones de cada uno de los ítems de los dos primeros Ejercicios del instrumento, se observó la repetición de ciertos elementos del esquema de análisis, independientemente de la expresión estudiada. Esto permitió obtener un esquema general de la trama o red de funciones semióticas que se ponen en juego en distintas tareas efectuadas con símbolos matemáticos. En la Figura 9 se presenta el esquema de esta trama general de funciones semióticas, para las distintas tareas planteadas con expresiones simbólicas, como la lectura, la escritura y la determinación del valor de verdad.

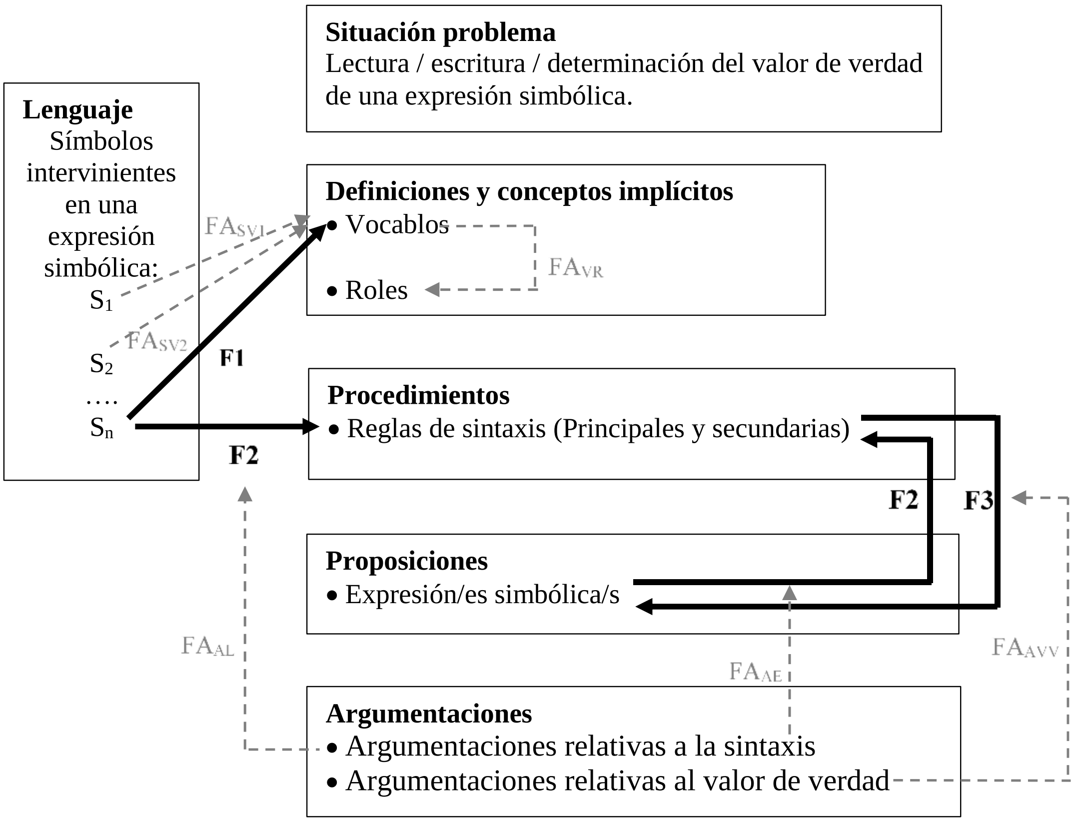

Figura 9. Trama general de funciones semióticas intervinientes en tareas con expresiones simbólicas

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 03/10/2016*

En la trama general de funciones semióticas planteada puede observarse la vinculación de las funciones semióticas entre sí y cómo se establecen las relaciones entre los objetos primarios que conforman la configuración de tareas que involucran expresiones simbólicas. Las tareas concernientes a expresiones simbólicas, que se esquematizan de manera conjunta en la Figura 9 son la lectura, la escritura y/o la determinación del valor de verdad, que se constituyen en la *Situación problema*.

Dentro del *Lenguaje* se encuentran todos los símbolos que intervienen en la expresión simbólica (S_1, S_2,…,S_n). Cada uno de esos símbolos está vinculado, a través de una función semiótica, con su correspondiente vocablo en el lenguaje coloquial. En el caso de los símbolos en estudio, este tipo de función fue denominada F1, y para cada uno de los restantes símbolos que componen la expresión se representó la correspondiente función auxiliar que vincula símbolo con vocablo con las denominaciones FA_{SV1}, FA_{SV2},…(Función Auxiliar entre Símbolo y Vocablo) . Este conjunto de funciones semióticas que vinculan el *Lenguaje* con las *Definiciones y conceptos implícitos*.

Entre los elementos que componen objeto primario *Definiciones y conceptos implícitos* se encuentran los vocablos y los roles que cada uno de ellos desempeña en la expresión. Entre ellos se establecen una serie de funciones semióticas auxiliares, las cuales han sido generalizadas en el esquema como FA_{VR} (Función Auxiliar entre Vocablo y Rol). Estas funciones vinculan al vocablo correspondiente a cada símbolo con el rol que dicho símbolo tiene en la expresión dada. El establecimiento de estas funciones semióticas auxiliares tiene incidencia sobre la función semiótica F2 correspondiente a la sintaxis. Esto se debe a que el rol que desempeña cada símbolo dentro de la expresión incide en su ubicación o posición dentro de la expresión, de acuerdo con la sintaxis correspondiente a los símbolos que forman parte de la expresión.

La función semiótica F2 ligada a una tarea de lectura, particularmente en la que la lectura está destinada a la posterior determinación de la adecuación o no de la sintaxis, vincula al símbolo que pueda considerarse como principal, con la regla de sintaxis que le corresponda. En esta tarea también estarían participando las funciones semióticas ligadas a la sintaxis de los restantes símbolos que intervienen en la expresión, en los casos de expresiones de mayor complejidad como por ejemplo aquellas que contienen un cuantificador. Sin embargo, estas últimas no se han representado explícitamente en este esquema por una cuestión de legibilidad.

El objeto primario *Procedimientos* está conformado por las reglas de sintaxis correspondientes a los símbolos participantes de la expresión, mientras que el objeto primario *Proposiciones* está conformado por la expresión en sí misma. Estos dos objetos primarios están vinculados a través de las funciones semióticas F2 y F3, dependiendo de la tarea que haya sido planteada. Si es una tarea de escritura, la función F2 interviene para organizar los símbolos participantes en la expresión, de modo que esté bien formada, es decir, que sea sintácticamente correcta. Si la tarea es la determinación del valor de verdad de una expresión, interviene la función F3 pues así ha sido definida, vinculando la sintaxis con el valor de verdad.

Finalmente, el objeto primario denominado *Argumentaciones* contiene las justificaciones que corresponden tanto para la aplicación de la sintaxis como para el establecimiento del valor de verdad. Estas justificaciones constituyen el antecedente de las funciones semióticas auxiliares que fundamentan la sintaxis en tareas de lectura o escritura, respectivamente representadas en el esquema como FA_{AL} y FA_{AE} (Función Auxiliar de Argumentación en la Lectura y Función Auxiliar de Argumentación en la Escritura), y la que fundamenta el establecimiento del valor de verdad, FA_{AVV} (Función Auxiliar de Argumentación para el Valor de Verdad). Estas funciones semióticas auxiliares inciden directamente sobre las funciones semióticas principales F2 y F3.

Las construcciones presentadas permiten describir y caracterizar, de manera detallada, el proceso de construcción de significado de los símbolos algebraicos, evidenciando la red de relaciones que se ponen en juego en un proceso de significación de expresiones simbólicas.

La complejidad cognitiva y semiótica observada en los análisis realizados evidencian la necesidad de poner particular atención a la construcción de significado de los símbolos durante los procesos de enseñanza. Como se mencionó en el inicio del artículo, los símbolos no son objeto directo de enseñanza en el contexto de las aulas universitarias, aunque la necesidad de su uso es inmediata al inicio de las asignaturas de matemática en este nivel. Por esta razón, podría considerarse poner en práctica actividades que pudieran favorecer la construcción de la trama de vinculaciones que se ponen en juego al momento de utilizar símbolos matemáticos, tendientes a superar las dificultades que con frecuencia se observan en estudiantes que se inician en carreras universitarias.

REFERENCIAS

Alcalá, M., (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Disponible en: http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf. Recuperado: 12/08/10.

Camós, C.; Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Chile. Disponible en: http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393. Recuperado: 30/06/11.

Colombano, Formica y Camós (2012). Enfoque cognitivista. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, 115-152. Editorial Universitaria de Villa María: Villa María.

Distéfano, M.L.; Urquijo, S., González, S. (2011). Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 03/10/2016*

simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 59-70.

Distéfano, M.L.; Aznar, M.A.; Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 30, 61-80.

Distéfano, M.; Pochulu, M.; Font,V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233. DOI: 10.4471/redimat.2015.1568.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61 (1), 103-131.

Garrido, M. (1979). *Lógica simbólica*. Madrid: Tecnos.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didáctique des Mathematiques,* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ pauta_ valoracion_idoneidad_5enero07.pdf. Recuperado: 12/08/11

Goldin, G.; Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (eds.). *Theories of Mathematical Learning*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 397–430. Disponible en: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CB8QFjAAahUKEwiZ69fN3orIAhVKIpAKHR5_Arw&url=http%3A%2F%2Fwebdelprofesor.ula.ve%2Fciencias%2Flico%2FMateducativa%2FGolding.doc&usg=AFQjCNGnRnWCI3rKTqXmftwOW6Bwn-UE_w. Recuperado:14/05/12.

Gómez Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y la significación. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3(4), pp. 5-16.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies y Mathematics*, 19, 333-355.

Klimovsky, G.; Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Kutschera, F. von (1975). *Philosophy of language*. Reidel: Dordrecht.

Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.

Lacués Apud, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), pp. 299-318.

Lincoln, Y.; Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park: SAGE Publication.

Palarea Medina, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (40), 3-28.

Palencia, A.; Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista ciencias de la educación,* 1 (23), 47-60.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 12 (1)*, 45-56.

Rojas Garzón, (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Bogotá. Disponible en: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Rojas%20Garzon/Tesis%20Pedro%20Rojas.pdf. Recuperado: 18/08/14

Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El álgebra escolar. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 10, 9-42.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Números*, 77, 5-34

Tobón Franco, R. (2004). *Estrategias comunicativas en la educación: hacia un modelo semiótico-pedagógico.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

ANEXO 1- Protocolo de la segunda versión del Instrumento diseñado

❶ Completar:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba una expresión utilizando el símbolo de la que se pueda afirmar que es VERDADERA
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

❷ Determinar si las siguientes expresiones ESTÁN BIEN ESCRITAS. En caso de no estarlo re-escribirlas en forma correcta.

Expresión	Si es la expresión está BIEN ESCRITA señale con una x en esta columna	Si la expresión está MAL ESCRITA, re-escribirla en forma correcta en esta columna
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1 ; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$[2 ; 5] \subset \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$-1 \in \mathbb{N} \ \vee \ -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \ \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		
$\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N} > 0$		
$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		
$\exists\, x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists\, x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

❸ Escribir las siguientes expresiones en lenguaje coloquial o simbólico, según corresponda. Además indicar si son verdaderas o falsas.

EN LENGUAJE COLOQUIAL	**EN LENGUAJE SIMBÓLICO**	**Indicar V o F**
	$0,5 \in \mathbb{Z} \;\vee\; -1 \in \mathbb{Z}$	
	$-2 \in \mathbb{Z} \;\wedge\; -1 \in \mathbb{N}$	
	$\forall x \; (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x<0)$	
	$\exists x \; (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$	
	$\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, x < 0$	
	$\forall\, x \in \mathbb{N} \;\; x > 0$	
	$\forall\, x \in \mathbb{N} \;\; x = 2.k \;\vee\; x = 2.k + 1 \;,\;\; k \in \mathbb{N}$	
3 es un número entero e impar		
3 y 5 son números naturales		
4 es un número natural o es un número entero		
Cada número entero es menor que su sucesor		
Algunos números naturales son negativos		
El cuadrado de cualquier número real es positivo		

María Laura Distéfano

Es Profesora en Matemática por la Universidad Nacional de Mar del Plata y Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán. Es Docente e investigadora de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, se desempeña como Jefe de Trabajos Prácticos con dedicación exclusiva en el área Informática Aplicada, con funciones en la asignatura Computación y en la asignatura Matemática Discreta. Es Integrante del Grupo de Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI), con Categoría V en el Programa de Incentivos a la Investigación