Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
E-ISSN: 1850-6666
reiec@exa.unicen.edu.ar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

Pezoa Reyes, María Inés; Morales Soto, Astrid
EL ROL DE LA MODELACIÓN EN UNA SITUACIÓN QUE RESIGNIFICA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN
Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol. 11, núm. 2, 2016, pp. 52-64
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

EL ROL DE LA MODELACIÓN EN UNA SITUACIÓN QUE RESIGNIFICA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

María Inés Pezoa Reyes[1], Astrid Morales Soto[1]

mpezoareyes@gmail.com, astrid.morales@pucv.cl

[1]*PUCV, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Brasil 2950, Valparaíso, Chile.*

Resumen

Esta investigación aborda la resignificación de los conocimientos matemáticos asociados al concepto de función en un ambiente de modelación. Se analizan los significados y usos que los estudiantes son capaces de construir respecto a las nociones matemáticas que emergen en un proceso de modelación en una situación específica. Postulamos que la modelación genera conocimiento matemático en términos de construcción y enriquecimiento de significados relacionados con los contenidos y objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de función en el currículo vigente en Chile; para comprobarlo se ha diseñado una situación *ad hoc*. El estudio se sitúa en enseñanza media y tiene como sustento teórico la Socioepistemología.

Palabras clave: modelación, resignificar, función, Socioepistemología

The role of modeling in a situation that redefines function concept of function

Abstract

This research addresses the redefinition of mathematical knowledge associated with the concept of function in a modeling environment. We analyze the meanings and uses that students are able to construct regarding mathematical notions emerging in a process of modeling in a specific situation. We postulate that modeling generates mathematical knowledge in terms of construction and enrichment of meaning related to the content and learning objectives related to the concept of function in the Chilean current curriculum; in order to prove it , we designed an ad hoc situation. The research focuses in middle school and its theoretical basis is Socioepistemology.

Keywords: modeling, redefining, function, Socioepistemology**.**

O papel da modelagem em uma situação que reconsidera o conceito de função

Resumo

Esta investigação aborda o novo significado dos conhecimentos matemáticos associados ao conceito de função em um ambiente de modelagem. Analisam-se os usos e significados que os alunos são capazes de construir com respeito das noções matemáticas que emerge em um processo de modelagem em uma situação específica. Nós postulamos que a modelagem gera conhecimento matemático em termos da construção e o enriquecimento de significados relacionado aos conteúdos e objetivos de aprendizagem relativos com o conceito de função no currículo vigente no Chile; para uma comprobação foi desenhada uma situação *ad hoc*. O estudo foi desenhado para o ensino médio e sua base teórica é a socioepistemologia.

Palavras-chave: modelagem, novo significado, função, Socioepistemologia

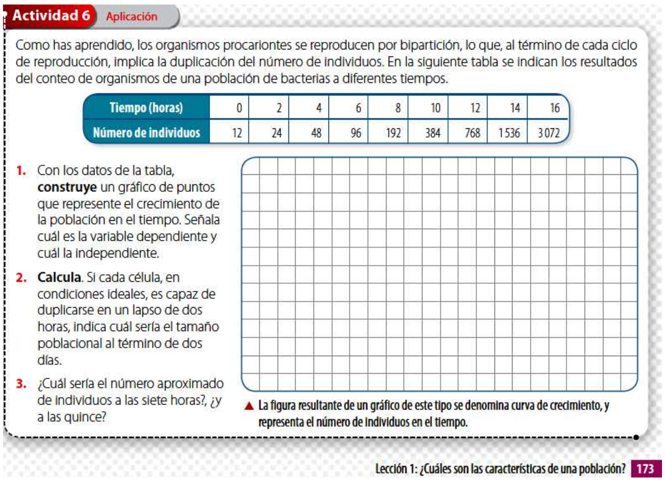
Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 05/11/2016*

1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

1.1. Descripción de la problemática.

El currículo escolar chileno actual, es el resultado de diversos ajustes, que han intentado mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes del país. Tenemos por ejemplo que uno de los propósitos del Ajuste Curricular año 2009 es "ofrecer a los estudiantes conocimientos, habilidades y actitudes, relevantes para su vida como personas, ciudadanos y trabajadores, así como para el desarrollo económico, social y político del país" (Ministerio de Educación Chile [MINEDUC], 2009). En forma conjunta a la implementación de ese ajuste se comienza con la generación de las Bases Curriculares de Enseñanza Básica y luego las de Enseñanza Media (en el sistema escolar chileno[1], los niveles 7° básico a 2° medio, corresponde a estudiantes de 12 a 16 años de edad) con el objetivo de permitir una mayor especificación de los aprendizajes a lograr por los estudiantes. En estas nuevas Bases Curriculares se declara que "el conocimiento se construye de modo gradual sobre la base de los conceptos anteriores y relacionando con conocimientos de otros ámbitos y también con la experiencia real. La posibilidad de aplicar los conceptos en otras situaciones y en otras áreas incrementa el aprendizaje y la comprensión profunda*"* (MINEDUC, 2013, p. 24). Si bien estos cambios apuntan a la calidad y equidad en la educación chilena, la desarticulación de las propuestas no ha permitido una implementación y comprensión por parte de los diferentes actores involucrados (Espinoza, 2014).

Para el caso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la ausencia de marcos de referencia que articulen los contenidos matemáticos con situaciones o fenómenos reales y cercanos a la cotidianidad y vivencias de los estudiantes no permite que el conocimiento matemático escolar sea puesto en un plano diferente al teórico y conceptual y que emerja así como una herramienta importante y de apoyo en otras áreas del conocimiento. En este sentido, para la enseñanza de las funciones hemos evidenciado que en general su estudio se limita a proporcionar a los estudiantes técnicas que les permitan resolver ejercicios (principalmente de carácter algebraico), ignorando una realidad contextualizada, lo que conlleva un aprendizaje centrado en fórmulas, con alguna representación gráfica, la que es tratada como un dibujo y no como una modelación en sí misma, ni usada como argumento. Es decir, las funciones lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, entre otras, representan para el estudiante conceptos matemáticos que tienen ciertas características y propiedades que deben memorizar para aplicarlas en ejercicios y problemas "característicos", pero carecen de sentido si son usadas en otros dominios. Por ejemplo, en el sector de Biología, nivel segundo medio, los estudiantes realizan actividades relacionadas con crecimientos poblacionales en las que deben conocer los modelos de crecimiento y relacionarlos con algunos conceptos básicos de ecología de poblaciones. Estas actividades incluyen construcción de gráficos a partir de tablas, análisis de información y conjeturas acerca del comportamiento de las variables, como podemos observar en la siguiente imagen del texto oficial de Biología que distribuye el Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC (ver imagen 1).


Actividad 6 Aplicación

Como has aprendido, los organismos procariontes se reproducen por bipartición, lo que, al término de cada ciclo de reproducción, implica la duplicación del número de individuos. En la siguiente tabla se indican los resultados del conteo de organismos de una población de bacterias a diferentes tiempos.

Tiempo (horas)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Número de individuos	12	24	48	96	192	384	768	1536	3072

1. Con los datos de la tabla, **construye** un gráfico de puntos que represente el crecimiento de la población en el tiempo. Señala cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.
2. **Calcula**. Si cada célula, en condiciones ideales, es capaz de duplicarse en un lapso de dos horas, indica cuál sería el tamaño poblacional al término de dos días.
3. ¿Cuál sería el número aproximado de individuos a las siete horas?, ¿y a las quince?

▲ La figura resultante de un gráfico de este tipo se denomina curva de crecimiento, y representa el número de individuos en el tiempo.

Lección 1: ¿Cuáles son las características de una población? 173

Imagen 1: Tabla de construcción de curva: Chaucón, M., Vargas, R. 2013 pag.173.

En contraste al status de la "matemática utilitaria" que actualmente está vigente en nuestro currículo escolar, [es decir, o como se aprecia en el ejemplo anterior...] asumimos el concepto de "matemática funcional" que ha sido desarrollado por Cordero (2006, 2008, 2010) en el sentido que "se enseña la matemática bajo el supuesto de que el profesor transmite el conocimiento y no bajo la necesidad de que el estudiante adquiera un conocimiento que le permita no sólo pasar los cursos de matemáticas sino adquirir un conocimiento que le sirva en los ámbitos formativo y profesional, que le ayude a construir y transformar su vida*"*.

Si bien en el currículo del sector de matemática se menciona la modelación, esta es entendida como la aplicación de conceptos aprendidos, que en muchos casos corresponde a problemas propuestos llamados "problemas de modelación" donde no hay referencia directa con actividades que permitan a los estudiantes experimentar en la clase de matemáticas con un fenómeno (tomar datos, graficar, plantear o conjeturar el modelo matemático) promoviendo así la articulación de las matemáticas con otros campos de conocimiento y en contextos diferentes.

Esta investigación aborda el concepto de función en un escenario de modelación. En este proceso se resignifican conocimientos asociados al concepto de función en términos de generar conocimiento y no sólo en la adquisición de objetos o definiciones o la aplicación de éstos.

Nos planteamos como objetivo analizar la construcción del conocimiento matemático que los estudiantes realizan cuando el concepto de función es puesto en juego en una situación de modelación que articula contenidos tratados en otros sectores de aprendizaje, en este caso Biología. Para lograr este objetivo analizamos concepciones del concepto modelación en investigaciones que se enmarcan dentro de la Matemática Educativa, como también el significado que se asigna en el currículum escolar chileno.

Si bien existen un gran número de investigaciones que han abordado el estudio de las funciones en contexto de diferentes disciplinas y aproximaciones teóricas, hemos acotado nuestros antecedentes a aquellas que se enmarcan dentro de la Matemática Educativa y que se vinculan con

[1] El sistema escolar chileno se organiza en un año de educación preescolar obligatoria (kínder), seis años de enseñanza básica seguido de seis años de enseñanza media.

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 05/11/2016*

nuestro marco teórico: la Socioepistemología, que considera cuatro dimensiones en la construcción del conocimiento matemático: la social, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica.

1.2. La modelación en investigaciones desde la Matemática Educativa

Nuestra problemática se ubica en el nivel de enseñanza media, (sistema escolar chileno) y las investigaciones que reportamos nos entregan luces de cómo abordar la *resignificación* de conceptos matemáticos en nuestro currículo, esto es, la generación, reacomodo o rearticulación de significados a la luz de ciertas prácticas, donde la resignificación se produce a través del uso del conocimiento. Lo hacemos desde la práctica de la modelación, considerando para ello lo que constituyen los objetos matemáticos que enseñamos, reconociendo explicaciones que no parten desde la matemática, sino que reconocen al hombre situado y contextualizado haciendo matemáticas (Arrieta y Díaz 2015).

En Morales y Cordero (2014), se aborda una problemática de la matemática escolar en el nivel universitario referido a la enseñanza y aprendizaje del cálculo que consiste en que el discurso matemático escolar maneja los contenidos de manera separada y carentes de interacción, provocando que el proceso de adquisición del conocimiento se logre de manera particionada o segmentada; este es el caso de la Serie de Taylor. En esta investigación se da cuenta que en una situación de modelacion-graficación se resignfica la Serie de Taylor. También se destacan aspectos epistemológicos a la luz de los trabajos de Newton, como también el rol de la predicción y de una situación de modelación de movimiento; estos dos últimos dan cuenta de la resignificación de la Serie de Taylor como el de la ecuación de la recta y la ecuación cuadrática, las que emergen con nuevos significados en la situación planteada.

Cordero (2006), señala que centrarse en los conceptos matemáticos en la enseñanza, no permite que se cuestione lo que constituye a dichos conceptos y de esta manera se hace imposible establecer relaciones. Por ejemplo, que la suma y la resta responden a situaciones de variación y cambio que evolucionan a lo largo del currículo escolar hasta resignificarse y llegar a elaborar la analiticidad de las funciones. En ese trabajo explica que el sentido que posee la modelación puede provenir del significado de modelo, el cual es considerado como copia de algo para ser reproducido, o también suele definirse en el campo de la matemática como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas. En ambas ideas se exige un objeto predeterminado, independiente de que sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos (de ahí lo cualitativo). Por consiguiente, el tratamiento de la modelación (en la enseñanza de la matemática) es considerado como una herramienta didáctica que ayuda al estudiante a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto matemático.

Por otra parte, Del Valle (2010), mediante una situación cotidiana y considerando la modelación como una práctica que articula el pensamiento matemático, aporta elementos que favorecen la noción de función lineal, no solo como una asignación entre objetos, sino que promueve el uso de la visualización matemática como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

A su vez, Córdoba (2011), estudia cómo en el ejercicio de la modelación (asumida como una práctica) del fenómeno de enfriamiento, el uso de un conocimiento matemático escolar (la ecuación diferencial lineal de primer orden) permite que estudiantes de ingeniería de dos cursos de ecuaciones diferenciales interactúen activamente y de esta forma puedan emerger elementos que aporten a la resignificación de ese conocimiento matemático en particular, sin olvidar que lo que se privilegia en este caso es el ejercicio intencional y situado de la práctica como tal y no el objeto matemático en sí.

También en Morales, Mena, Vera y Rivera (2012) reportan el rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos, aquí se pudo evidenciar que al presentar un fenómeno físico (caída libre) y desafiar a los estudiantes que explicaran el fenómeno que estaba ocurriendo, poniéndolos en situación para que surgiera la necesidad de recurrir a las gráficas y poder responder a lo planteado, lo interesante es cómo la gráfica comienza a adquirir un rol argumentativo debido a que a través de ella podían explicar y entender el fenómeno. Desde allí logran entender que lo que esta ocurriendo es la variación de la variación y dejan de lado las expresiones analíticas. Los autores declaran que en una situación de modelación, el aprendiz puede construir conocimiento, resignificar conceptos, articular y generar argumentos.

1.3. La modelación en el currículo chileno

Según las Bases Curriculares establecidas en Chile, "Modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos". (MINEDUC 2012, p.3). Cabe señalar que esta definición no establece qué es un modelo matemático, pero sí enfatiza el hecho que "construir modelos suele requerir el manejo de conceptos y métodos matemáticos avanzados" (MINEDUC, 2012, p.3).

Los programas de estudio vigentes en el año 2014, orientan el trabajo pedagógico del docente señalando los aprendizajes esperados para cada unidad junto a ejemplos y actividades propuestas, por lo tanto son un referente que nos permite conocer la concepción que se tiene de la modelación en diferentes niveles de enseñanza.

En relación a lo que define el currículo chileno en torno a modelar, hemos examinado los tipos de ejercicios que se proponen en los niveles desde 8º básico hasta 4º medio. Los ejemplos que mencionaremos son representativos de cada nivel y son extraídos de los programas vigentes.

Nivel: 8º básico

Aprendizaje esperado: Modelan situaciones en contextos cotidianos identifican variables independiente y dependiente, establecen el término función

Ejemplo: *Marcos cotiza el revelado de fotos en una tienda. Por revelar el rollo le cobran $1.000 y por cada foto que salga bien le cobran $50. Decide calcular el revelado del rollo dependiendo del número de fotos. Obtiene la siguiente fórmula:*

$P = 1.000 + 50\,F$

Se sugiere al docente mostrar modelamientos de situaciones antes de que los estudiantes intenten llegar a un modelo que represente una situación dada. Se sugiere además guiar al *estudiante en el proceso de modelamiento. (*MINEDUC, 2010, p. 77)

Nivel: 1º medio
Aprendizaje esperado: Modelan situaciones asociadas a la función afín.
Ejemplo: *Una compañía de teléfonos celulares ofrece el siguiente plan: cargo fijo de $8.590 y $94 por cada minuto que se habla en cualquier horario. Responden las siguientes preguntas:*
¿Cuáles son las variables involucradas?

- *¿Cuánto se paga por hablar 25, 37 y 55 minutos, respectivamente?*
- *Registrar estos valores en una tabla y graficar, manualmente o usando un software adecuado los valores.*
- *Observando el grafico, que diferencias se observa respecto de la función lineal?*
- *Si llamamos "t" al valor total de la cuenta y "x" a los minutos hablados, exprese t en función de x.*

(MINEDUC 2011 a, p. 51)

Nivel: 2º medio
Aprendizaje esperado: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Ejemplo:
El tiempo que tarda un cuerpo en caer verticalmente a una distancia determinada se representa a través de la siguiente función: $t(d)=\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{g}}$ *Donde: d : distancia recorrida en caída libre vertical medida en metros.*
g : constante de aceleración de gravedad medida en metros por segundos cuadrados (utiliza esta aproximación de la constante $10\frac{m}{s^2}$ *t : tiempo medido en segundos*
Responden:

- *Se deja caer una piedra en sentido vertical desde un acantilado de 180 m de altura sobre el mar; .cuanto tiempo demora en llegar al mar?*
- *Se deja caer una manzana desde un edificio de 15 metros, ¿cuántos segundos tarda en llegar al suelo?*
- *Averigüe la altura de la torre Eiffel y calcule el tiempo que demoraría un cuerpo en llegar al suelo.*

(MINEDUC 2011 b, p. 7)

Nivel: 3º medio
Aprendizaje esperado: Estudian la función cuadrática como modelo de algunos fenómenos o situaciones; organizan una tabla de valores y trazan el gráfico correspondiente utilizando, preferentemente, un programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

Ejemplo: *En el Norte Chico se descubre una vertiente de agua subterránea que debe ser extraída con bombas. Se sabe que por cada nueva bomba que se conecte, la cantidad de* m^3 *diarios que es posible extraer con cada bomba decrece en 5* m^3*, como puede apreciarse en la tabla siguiente:*

Número de bombas	m^3 de agua extraída
1	60 (= 1 • 60)
2	110 (= 2 • 55)
3	150 (= 3 • 50)
4	180 (= 4 • 45)
...	...
...	...

Completar la tabla hasta un número de bombas que parezca razonable. Justificar su elección y graficar convenientemente la tabla anterior.
¿Cuál es la máxima cantidad de agua que se puede extraer diariamente de la vertiente?
¿Con cuántas bombas se logra?
¿Con qué cantidad de bombas comienza a disminuir la cantidad de agua extraída? ¿Cuánta agua se extraerá si se colocan trece bombas? ¿Tiene sentido colocar más bombas? (MINEDUC 2000, p.20)

Nivel: 4º medio
Aprendizaje esperado: Resuelven problemas acerca de fenómenos de distintos ámbitos que se modelan a través de la función exponencial y logarítmica

Ejemplo: *Un modelo matemático del crecimiento de la población mundial, para períodos cortos de tiempo, está dado por:* $P = P_0e^{rt}$ *donde* P_0 *es la población cuando t = 0, r es la tasa de crecimiento en % anual, t es el tiempo en años, P es la población en el tiempo t.*
Si actualmente la población de Chile es de 15 millones de habitantes y la tasa de crecimiento, de acuerdo al período intercensal 1982 a 1992, es igual a 1,6% anual, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población, de acuerdo a este modelo? (MINEDUC 2001, p. 58).

A partir de las actividades señaladas anteriormente y de lo observado en las prácticas pedagógicas[2] en aulas de diferentes establecimientos educacionales, podemos visualizar que la modelación se entiende como la aplicación de los conceptos asociados a la enseñanza de las funciones a lo largo de la enseñanza escolar.

Otro aspecto a considerar

En el programa de estudio de cuarto año medio se presenta un resumen de las construcciones de los diferentes tipos de funciones y cómo estas han servido para modelar y describir variados aspectos del mundo real: "Se han introducido funciones como las funciones lineales, parte entera, valor absoluto, cuadráticas, raíz cuadrada, exponencial, logarítmica y otras que han ayudado a que las alumnas y alumnos perciban la potencia de las funciones como herramienta sólida para modelar fenómenos de la realidad"… además propone, "unificar los conceptos que se encuentran detrás de los modelos estudiados a lo largo de la enseñanza media incorporando el estudio y análisis de los elementos básicos del concepto función, es decir, las nociones de:
· Función: como correspondencia entre dos variables en donde a cada variable independiente le corresponde una única variable dependiente.

[2] *Una de las autoras se desempeñó como docente de matemática durante 14 años en el sistema escolar, y desde el año 2012 es parte del equipo de formación en el área de prácticas de estudiantes de pedagogía en matemáticas en la PUCV.*

· Dominio: como el conjunto de valores posibles de la variable independiente.
· Recorrido: como el conjunto de los valores resultantes o imágenes.
· Gráfico: como el conjunto de los puntos del plano que representan a la función.
Dejando una ventana abierta a los estudiantes para que comprendan que con las funciones estudiadas no se ha agotado el repertorio de funciones inventadas por el hombre". (MINEDUC 2001, p. 46)
Con esto queremos destacar que a pesar de que se trabaja la modelación (o el modelar), se asocia a modelos y no necesariamente al concepto de función

1.4. Aspecto histórico de la evolución del concepto de función y su relacion con la modelación

La revisión histórica de la evolución del concepto función, y en especial los trabajos realizados por Youschkevitech (1976) y posteriormente el de Ruiz (1998) nos permite identificar el rol de la modelación en las etapas más representativas que han estado asociadas a su evolución, desde la búsqueda de regularidades hasta aspectos más abstractos y formales como las relaciones entre las variables en cuestión.
En ambos autores encontramos las tres etapas: la antigüedad, la edad media y el periodo moderno en que declaran el desarrollo del concepto de función.
En relación a la época antigua que reporta Ruiz (1998) destacamos que en el pensamiento griego existía una idea primitiva de función contenida en nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo, los griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas**.** Esta filosofía "estática" de la matemática fue la razón por la que los matemáticos de la época pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas, y no en términos de variables. Esto no condujo a las funciones sino a las proporciones y ecuaciones. Lo que resaltamos es que en la antigüedad la idea del cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas fue un obstáculo para el desarrollo de la noción de función
Por otro lado, Youschkevitech (1976) menciona una idea que recoge de los aspectos estudiados y que difiere de otros estudios en relación al concepto de función que tiene que ver con indicar que el nacimiento del concepto de función esta ligado al momento en que la atención estaba concentrada en el movimiento y no antes de aquello.
En nuestra investigación, la observación de un fenómeno de variabilidad y la representación de relaciones funcionales serán puestas a prueba en un diseño de situación, que considera los siguientes momentos asociados a la evolución del concepto función. (Ver figura 1)

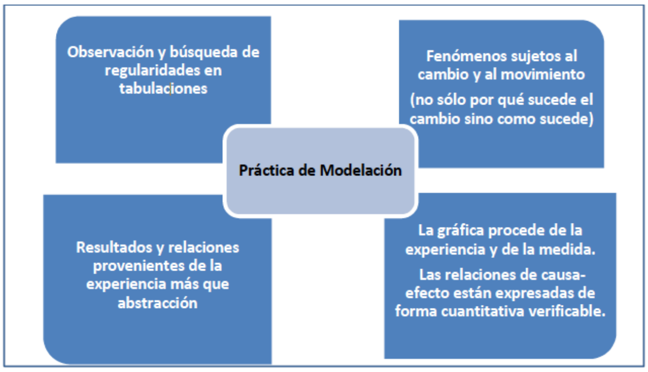


Figura 1: momentos históricos de la evolución del concepto de función asociados a la practica de modelación

Actualmente la falta de referencia directa con actividades que permita a los estudiantes experimentar en la clase de matemáticas con un fenómeno (tomar datos, graficar, plantear o conjeturar el modelo matemático), obstaculiza también la construcción del concepto función. En la situación creada, las gráficas tomaran un cierto rol debido a la relación con el fenómeno planteado y cómo a través de la gráfica se generan argumentos en este proceso de modelación

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Socioepistemología

La Socioepistemología es un marco teórico sistémico que trata los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple: epistemológica, social, didáctica y cognitiva; permite concebir la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre. Es un enfoque teórico que intenta explicar la realidad a través de la matemática, permitiendo transformarla.
Desde este enfoque, consideramos que el conocimiento se construye en la actividad realizada por los estudiantes, frente a una situación que problematice el saber y permita una "construcción de significados compartidos" por el grupo. (Cantoral, 2013, p. 25).
En relación a la problemática que atiende, Cantoral y Farfán, (2003), mencionan aquella concerniente a la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza. Ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad.
En relación a lo anterior, la Socioepistemología plantea una crítica al *discurso matemático escolar* (dME), que define como la manifestación del conocimiento matemático de los participantes en el sistema didáctico, el cual constituye una concepción de enseñanza que está normada por el contrato escolar. Estos hechos han definido la enseñanza tradicional de las matemáticas, cuya característica esencial es que se ha limitado al plano del lenguaje (modelo racional de la ciencia) y ha dejado de lado el papel de las acciones (los sentidos de los participantes) (Cordero, 2003)
La crítica al modelo actual de enseñanza es que el estado del sistema educativo no ha logrado el nivel funcional del

conocimiento matemático, entendiendo funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y transforma su realidad (Cordero 2006) sino más bien se ha dejado en un nivel utilitario; en otras palabras, el modelo de conocimiento basado en la centración en los conceptos no ha podido atender lo funcional y soslaya lo que organiza el humano para conocer, no crea situaciones específicas e intencionales que den significado al conocimiento. De esta manera, el modelo no rinde cuentas de la construcción social del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva teórica se propone romper con el dME y darle un nuevo estatus; por eso se debe crear un modelo que ponga al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento, y crear otro discurso que ofrezca las herramientas necesarias para construir conocimiento.

Hemos elegido este marco teórico dado que nuestro foco está en los significados de las interacciones que emergen entre los estudiantes cuando el concepto de función es puesto en juego en una situación que considera las dimensiones anteriores y nos provee de la reflexion no sólo respecto de cómo se enseña la funcion sino también en qué es aquello que se enseña.

2.2. Resignificación

La resignficiación es un constructo teórico de la Socioepistemología; a través de las investigaciones, se ha ido precisando la manera de explicitar a lo que se refiere este constructo. Por ejemplo, en Cordero (2006) la resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional; es decir el uso del conocimiento en la situación, donde se debate entre su funcionamiento y forma de acuerdo con lo que organizan los participantes.

Según Buendía y Cordero (2005), la resignificación se forma de significados y procedimientos construidos en la situación que conforman un esquema explicativo global.

García (2007) agrega que la noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que abre la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente adoptamos el hecho que en una situación específica decimos que se resignifica un conocimiento matemático cuando el participante desarrolla una matemática que sea funcional, dando evidencia de ello al estudiar el uso del conocimiento, viendo éste como algo que se va organizando y cambiando, es decir, se va desarrollando en la situación o escenario que se enfrente.

Este constructo teórico de la resignificación ha permitido establecer categorías del conocimiento matemático escolar que permiten identificar relaciones funcionales entre los diferentes tópicos que integran el saber matemático.

2.3. Modelación

A diferencia de otras perspectivas tales como la modelación matemática, o la concepción de la modelación descrita en el currículo chileno, la Socioepistemología no considera a la modelación como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. Aquella se interesa en la modelación en Matemática Educativa como una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático.

Cordero (2006) menciona que la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, sino una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión.

Los trabajos desarrollados por Suárez y Cordero (2008, 2010) dan muestra de que en una situación de modelación del movimiento (SMM), el diseño de situación vincula la modelación y la graficación, a través de relacionar los significados, los procedimientos y los argumentos, además declaran que una SMM propicia una resignificación de la variación.

Al asumir la modelación como una práctica no estamos considerando plantear solo en expresiones matemáticas un fenómeno de otro sector de aprendizaje. El ejercicio de esta práctica nos entregará información sobre la forma de que un aprendiz se relaciona con el conocimiento y las debilidades o fortalezas del aprendizaje del concepto función. Es por ello que nuestro objetivo no se centra en el concepto mismo de función sino en las construcciones que los estudiantes realizan cuando se pone en juego en una situación proveniente de otro sector de aprendizaje, en este caso, Biología.

Asumimos en nuestra investigación lo señalado por Córdoba (2011): la modelación es una práctica que, al ser ejercida por grupos humanos (estudiantes y profesores) en un contexto particular y bajo circunstancias determinadas, promueve interacciones que dotan de sentido y significado a un conocimiento matemático escolar~~,~~ y lo que afirma Testa (2004, p.57) en su estudio sobre el proceso de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: "…el conocimiento se va construyendo, y reconstruyendo, en las situaciones de interacción que se dan en el aula, se producen resignificaciones de significados en un proceso de negociación…".

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La metodología que utilizamos en nuestra investigación es de corte cualitativo (Hernández et al., 2010), dado que nuestro interés es adentrarnos en el contexto en que se realiza el estudio, para lograr descripciones detalladas y completas de las interacciones que los estudiantes realizan entre sus pares en el ejercicio de la práctica de modelación propuesta. Hemos trabajado elementos de la Ingeniería Didáctica (Artigue et al, 1995).

En la misma línea del trabajo realizado por Arrieta (2003), el diseño de nuestra propuesta tiene la intencionalidad de proporcionar un contexto en el que la modelación considerada como práctica permita que emerjan herramientas, procedimientos y nociones matemáticas que se evidencian cuando los estudiantes describen el comportamiento del fenómeno utilizando conocimientos previos (no sólo del sector de matemática) y construyen argumentos a través de conjeturas, utilizando las gráficas y/o datos numéricos para validarlas.

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 05/11/2016*

3.1 Escenario y actores

La implementación del diseño se realiza con un grupo de cuatro estudiantes de cuarto año medio de un colegio científico humanista de la ciudad de Valparaíso, particular subvencionado[3]. El criterio de selección de los estudiantes corresponde a su destacado interés en el sector de Biología, otro aspecto a considerar fue la disponibilidad debido a que los tiempos que involucra el desarrollo del diseño es mayor al usual que se tiene al interior del aula, por lo que la implementación se realiza fuera del horario de clase[4]. También está la accesibilidad ya que uno de los investigadores trabaja en la institución escolar de los estudiantes en cuestión.

Es importante manifestar que el rol del investigador es de guía y moderador, no se involucra en proveer respuesta a los estudiantes, sino más bien de ir observando lo que realizan y provocar que ellos discutan en torno a lo planteado.

Los estudiantes, a lo largo de su enseñanza media han estudiado, en el sector de Biología, dinámica de poblaciones y comunidades en los ecosistemas junto a los factores de los que depende su crecimiento y distribución. Mostramos un ejemplo extraído del texto oficial de Biología que distribuye el Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC (ver imagen 2).

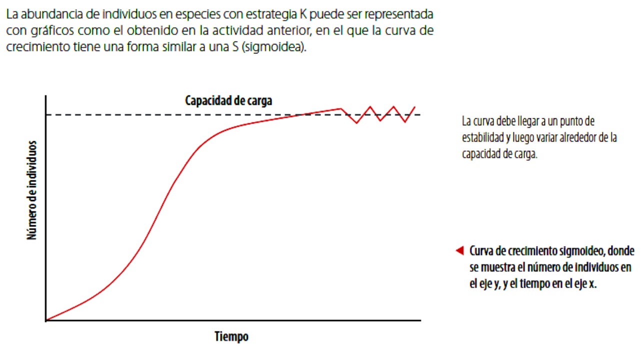


Imagen 2: Curva de crecimiento. Chaucón, M., Vargas, R. 2013 pag.175.

Este conocimiento que ha sido trabajado previamente en cursos anteriores de las estudiantes es considerado para el diseño de la propuesta y se espera resignificar desde la matemática el comportamiento funcional de este tipo de fenómeno.

La implementación se realiza en el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y los materiales utilizados son:

- Computadores, uno para cada estudiante, y provisto del *software* "Crecimiento de Semillas", que se explica a continuación .
- Hojas y lápices, para escribir observaciones y realizar cálculos.
- Calculadoras (básicas), una para cada estudiante.

3.2 El Diseño

La propuesta considera un fenómeno de crecimiento, simulado a partir del "Crecimiento de semillas", que relaciona la cinética del crecimiento con la fracción de área ocupada por el total de los entes en una región geográfica. Para su diseño se han establecido tres momentos y contextos asociados para los que hemos planteado objetivos e intencionado tipos de argumentaciones y procedimientos.

3.2.1. Descripción de los Momentos

Momento 1: Acercamiento al fenómeno de crecimiento.
Contexto: Simulación experimental
Objetivo: Identificar el comportamiento del fenómeno y las variables involucradas.

Este momento debe permitir a los estudiantes apropiarse de la situación y a partir de la observación establecer que el crecimiento de las semillas depende de la superficie libre que disponen relacionando el tiempo con la superficie cubierta por las semillas.

Se espera que en las observaciones los estudiantes relacionen los tipos de crecimientos que han estudiado en la asignatura de Biología durante la enseñanza media.

Momento 2: "Búsqueda de herramientas"
Contexto: Datos
Objetivo: Establecer relación entre las variables

Una vez que los estudiantes han establecido las variables involucradas se les cuestiona sobre cómo se relacionan las variables. Se espera que busquen regularidades entre los datos entregados, conjeturando la relación entre el tiempo y la superficie cubierta.

Momento 3: "Conjeturando un modelo"
Contexto: Gráfico-Datos
Objetivo: Analizar dependencia y relación entre las variables.

Se debe intencionar que los estudiantes utilicen datos y relacionen con el gráfico de la simulación del fenómeno de crecimiento entregado por el programa, para establecer intervalos de crecimiento y conjeturar el tipo de crecimiento, argumentando la validez de estos para resignificar lo lineal, lo cuadrático y lo exponencial en sus construcciones.

3.3 Puesta en escena del diseño y resultados

Para la presentación de los resultados denotaremos **E1, E2** a los estudiantes del grupo 1(**G1**) y **E3, E4** a los del grupo 2 (**G2**).

Al inicio de la implementación se pide a los estudiantes asumir el rol de un investigador que siembra un predio y monitorea el crecimiento de la siembra por medio de un programa computacional.

La docente entregan las siguientes indicaciones sobre el programa:

"El programa "Crecimiento de Semilla" simula el crecimiento de un tipo de semillas en un predio agrícola, cuyo terreno presenta excelentes condiciones. Esta siembra la hace en forma aleatoria. Además tiene un contador que muestra el paso de tiempo y el porcentaje (%) de superficie cubierta".

[3] Particular subvencionado en Chile se refiere cuando una institución escolar recibe aporte del estado y de las familias para su funcionamiento.

[4] Este aspecto fue explicado a los estudiantes y accedieron de manera voluntaria.

Los estudiantes se reúnen en grupos y discuten la cantidad de semillas más adecuada para iniciar la simulación, compartiendo con los otros estudiantes.

El siguiente es un extracto de la discusión:

E1: Entre más semillas plantemos se cubre más luego…
E2: Pero, no deben ser muchas por que pueden caer muy juntas y necesitan espacio suficiente en el terreno.
E4: ¿pero es aleatorio? o sea pueden caer todas juntas ¡ah!...pero igual dividámonos y después vemos…

G1 decide sembrar 10 semillas y **G2** siembra 50 semillas. (Ver imagen 3)

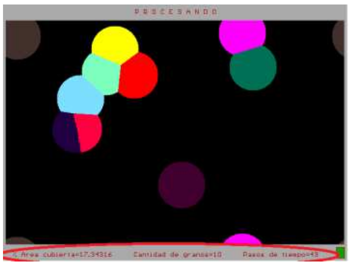


Imagen 3: simulación para 10 semillas (imagen del programa)

Se organizan para la observación, uno de ellos toma nota mientras el otro estudiante entrega información de lo observado.

Diálogo **G1**: …Mira, cuando están más juntas no pueden crecer tanto, pues sus raíces chocan, incluso algunas ni siquiera lograrán brotar.

En ambos grupos las estudiantes consideran los datos numéricos que entrega el programa, los organizan en registro tabular y establecen una relación entre el tiempo y la superficie cubierta. Las imágenes 4 y 5 evidencian las observaciones de los estudiantes de ambos grupos. (Ver imagen 4 y 5)

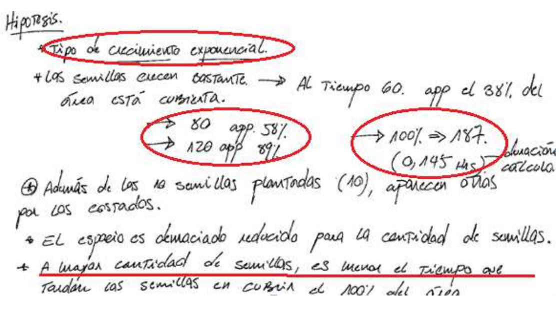


Imagen 4: escritos **G1**

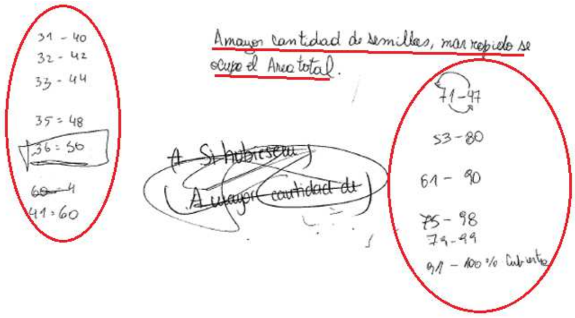


Imagen 5: escritos **G2**

G1 asocia los datos con un crecimiento exponencial, lo que llama la atención al investigador quien les pregunta:

Investigador: **¿Por qué dicen que el crecimiento es exponencial?**

E1: Yo me acuerdo que en biología siempre dicen que los crecimientos son exponenciales.

E2: En matemáticas siempre ponían ejemplos de bacterias que se duplican y se tenía que llenar una tabla, al final era 2^n.

Considerando que uno de los grupos hace referencia a herramientas matemáticas, se les desafía a justificar matemáticamente el tipo de crecimiento. Para ello se les presenta el ***Contexto datos*** y ***Contexto gráfico*** del programa indicándoles:
"El programa presenta el gráfico experimental que tiene un cursor que al desplazar permite conocer el porcentaje de área cubierta en un tiempo determinado".

Momento 2
Identifican constante de crecimiento en diferentes intervalos.
Utilizan la gráfica que arroja el programa (Ver imagen 6)

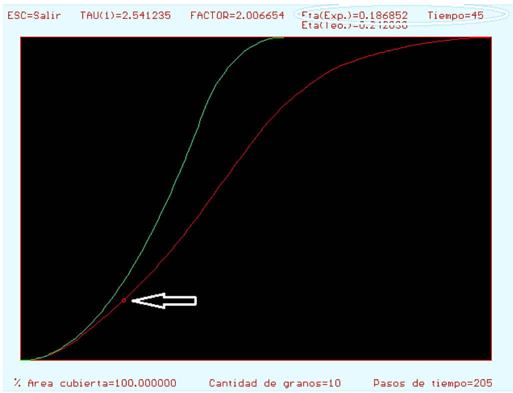


Imagen 6: contexto datos-gráfico para 10 semillas

Ambos grupos analizan la información y establecen intervalos de acuerdo al comportamiento de la gráfica y conjeturan sus expresiones algebraicas a modo general.

G1 analiza la validez de su hipótesis inicial de crecimiento exponencial, argumentando a partir de sus conocimientos conceptuales relacionados con la función exponencial. (Ver imagen 7)

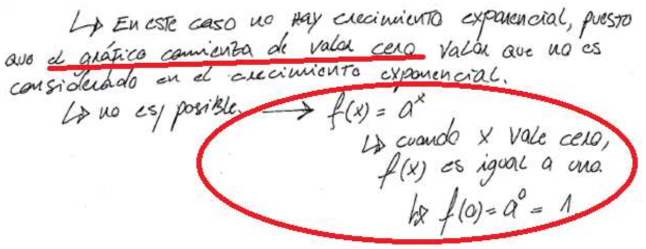


Imagen 7: **G1** declara que no es exponencial el crecimiento

G2 analiza la información y establece intervalos de acuerdo al comportamiento de la gráfica y conjetura sus expresiones algebraicas a modo general como se observa en la imagen 8.

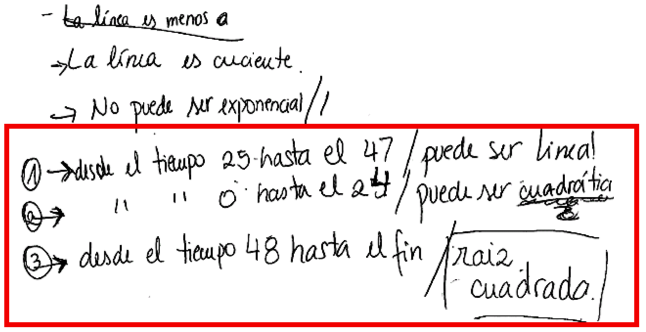


Imagen 8: conjeturas **G2**

El siguiente diálogo corresponde al trabajo realizado por **G2**:

E3: Se parecen a las cuadráticas que tienen el vértice en el (0,0).
E4: ¡Ah! y si es cuadrática cuando crece entonces al final tiene que ser lo contrario o sea raíz cuadrada y… se parece".

Investigador**: A ver, ¿cómo es eso?**

E3: Mire, cuando uno quiere eliminar los cuadrados en una ecuación aplica la raíz cuadrada o sea al revés.
E4: Sí, y cuando es logarítmica se aplica la exponencial.

En la discusión se integra un estudiante de **G1** señalando:

E2: Oye, pero acá son funciones no ecuaciones acuérdate en la clase cuando graficábamos.

Esta observación del estudiante permite a los grupos comenzar a relacionar el comportamiento de la gráfica con los datos obtenidos. (Ver imagen 9)

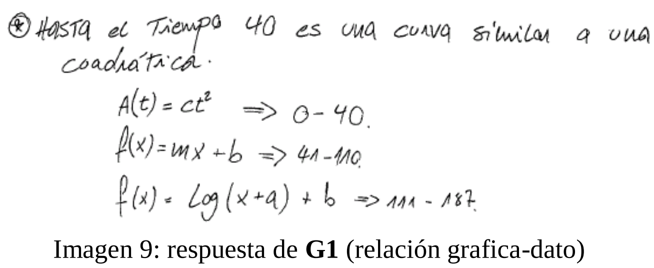


Imagen 9: respuesta de **G1** (relación grafica-dato)

Momento 3

Conjeturando lo lineal

En general para la validez de sus conjeturas sobre lo lineal se observa una memorización de la fórmula:

E3: "acuérdate de la ecuación de la recta y = mx + b"

Los estudiantes argumentan que si la gráfica es lineal debe tener la misma pendiente en todos los puntos. Ambos grupos asumen que las diferencias deben ser constantes.
En las producciones de **G1** se observa que junto con calcular el valor de la pendiente realizan procedimientos algebraicos para el cálculo del coeficiente de posición que llaman "b", mientras que **G2** verifica que el valor de la pendiente sea igual en diferentes tramos. (Ver imágnes 10 y 11)

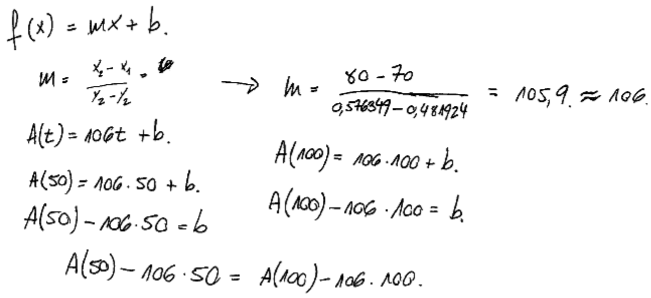


Imagen 10: **G1** calculando pendientes

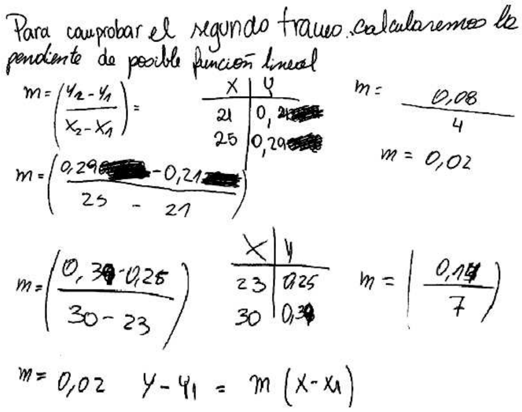


Imagen 11: **G2** calculando diferenciales

Conjeturando lo cuadrático

Los grupos de estudiantes trabajan en forma similar, para la validez de lo cuadrático, es decir, asocian la forma de la gráfica con los datos del intervalo. El siguiente diálogo

E2: La gráfica es muy parecida a la cuadrática
E3: … además si aproximamos algunos valores resulta la misma constante, o sea sólo hay que ver hasta que valor resulta cuadrática

Se mencionan algunos cálculos realizados por los grupos (ver imágenes 12 y 13)

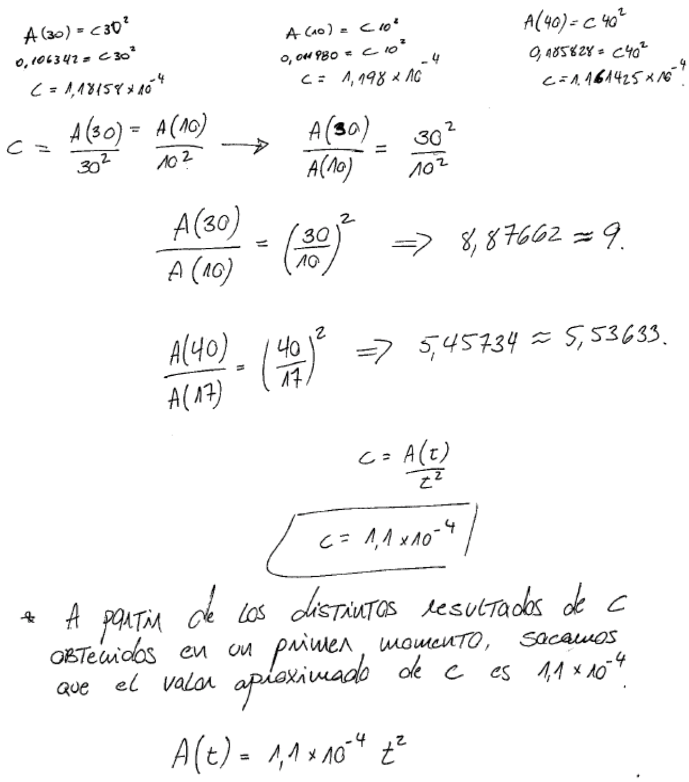


Imagen 12: cálculos realizados por **G1**

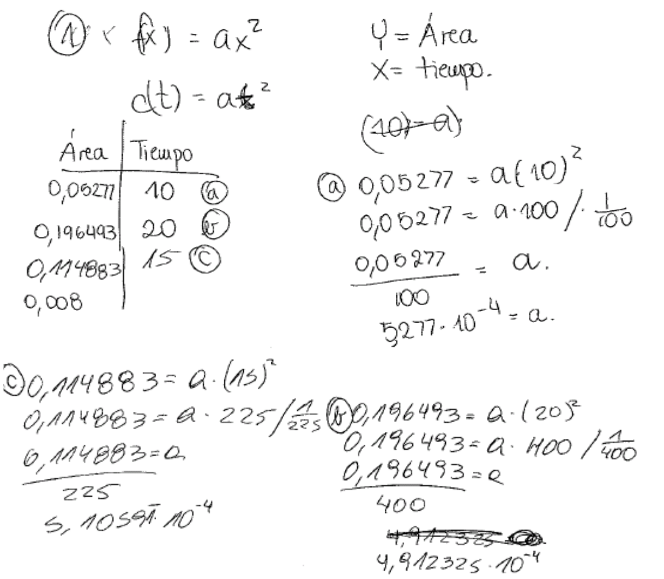


Imagen 13: cálculos realizados por el **G2**

También identifican la expresión analítica en relación a la gráfica, interpretando la constante de crecimiento como parámetro de esta. (Ver imagen 14)

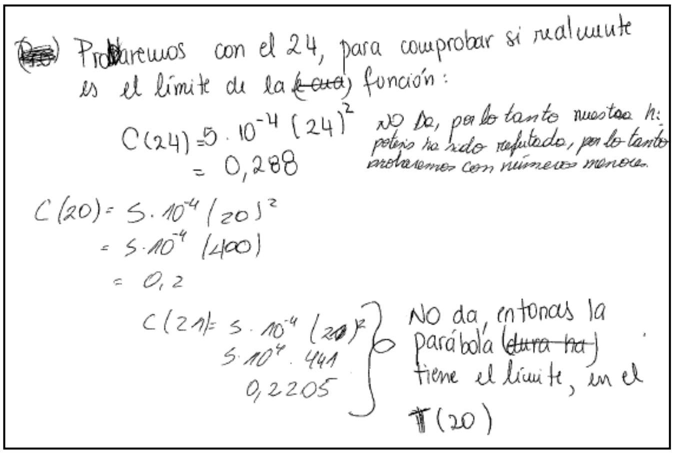


Imagen 14: búsqueda de constante **G2**

Las estudiantes de **G2** tratan de verificar su conjetura para el último intervalo de la grafica, finalmente no encuentran argumentos para su conjetura. En esta etapa las estudiantes de **G1** revisan el trabajo de **G2** y en forma conjunta concluyen que no es posible determinar este último intervalo, dado que las funciones que se parecen a la gráfica no se verifican algebraicamente.

5. CONCLUSIONES

En esta investigación se reconoce la importancia que tienen las interacciones promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación, proceso en el que se resignifica la función del conocimiento matemático escolar.

En la situación presentada a los estudiantes, sus conocimientos matemáticos asociados al concepto función, fueron las herramientas para explicar un fenómeno de otra área del conocimiento. Las interacciones, promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre sus ideas y conjeturas iniciales, de tal forma que mediante argumentaciones y explicaciones pudieran cuestionar su concepción inicial y darle así nuevos y más consistentes significados a su conocimiento.

Las interacciones y análisis de las producciones de los estudiantes nos permiten constatar que la construcción de saberes matemáticos articulados con otros sectores de aprendizaje y vivencias del estudiante le otorgan un sentido funcional al aprendizaje. Ello se evidencia en las discusiones al interior del grupo: por ejemplo, recuerdan lo visto en las clases de biología y matemática relacionando con la situación planteada. En el gráfico interpretaban su comportamiento de acuerdo a las vivencias que han tenido en la observación de crecimiento de plantas, esto es, un comportamineto exponencial.

Recordemos que el objetivo general que nos planteamos para esta investigación fue analizar la construcción del conocimiento matemático que los estudiantes realizan cuando el concepto de función es puesto en juego en una situación que articula contenidos tratados en otros sectores de aprendizaje, mostrando que la modelación, considerada como una práctica social, genera conocimientos en términos de construcción y enriquecimiento de significado.

En los párrafos anteriores hemos dado cuenta del rol de la práctica de modelación y lo que genera en poner en esa situación a los estudiantes; ahora nos referiremos a las construcciones que realizaron en torno al concepto función:

Los estudiantes logran establecer la dependencia entre las variables involucradas y relacionar el comportamiento de las variables en relación al fenómeno presentado. La gráfica les permite organizar su estudio estableciendo intervalos del dominio de acuerdo a la “forma” que se presenta, identificando la expresión analítica en relación a la gráfica, interpretando la constante de crecimiento como parámetro de ésta lo que los conduce a conjeturar que es una función lineal, esto les obliga a buscar parámetros constantes para cada intervalo utilizando la tabla de valores. Podemos observar que la gráfica cumple un rol de argumento para sus conjeturas.

- Los estudiantes logran resignificar lo cuadrático y lo lineal, pero lo exponencial no está presente en sus argumentos. Al parecer, el crecimiento exponencial lo asocian solo a exponente positivo.
- Si bien nuestro objetivo no estaba en el objeto matemático función, logramos evidenciar que los procedimientos realizados por los estudiantes para el análisis del fenómeno de crecimiento tiene relación con una expansión de la serie de potencia de la expresión $f = 1 - e^{-kt^2}$, que corresponde al modelo del fenómeno estudiado, donde *f* corresponde al porcentaje de área cubierta y *k* es la constante que tiene relación con el factor de crecimiento.

$$f \approx kt^2 - \frac{1}{2}k^2t^4 + \frac{1}{6}k^3t^6 - \frac{1}{24}k^4t^8 + \cdots$$

A partir de los procedimientos visualizados, y la matemática involucrada consideramos importante fomentar este tipo de actividades a los estudiantes debido a que se articulan los conocimientos ya adquiridos dando nuevos significados y se construyen otros. En esta experiencia que reportamos decimos que encontraron una constante para lo cuadrático y otra para lo lineal. Argumentan por qué no puede ser exponencial el crecimiento y debaten por qué es cuadrática o no; conectan con la gráfica para sacar conclusiones y conjeturas. Recurren a la matemática para poder explicar el fenómeno.

Es importante notar que la situación planteada a los estudiantes, puede ser utilizada como estrategia de enseñanza, donde sea el estudiante quien ponga en juego sus conocimientos y el docente puede inferir los tópicos matemáticos que crea necesarios profundizar.

REFERENCIAS

Arrieta y Díaz (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México..

Artigue, M.; Doaudy, R.; Moreno, L. ; Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Editor Bogotá. Una empresa docente. Primera Edición (julio 1995).

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspecto as generators of knowledge in a social practice Framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 299-333.

Cantoral, R. y Farfán, R.(2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006) Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, (83-102).

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell’insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica* , *20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame. *16*(1), 73-78.

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.) (ISBN primera edición: 978-84-7978-803-2) México: Ediciones Díaz de Santos, S.A. 285-309

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Córdoba, F. (2011). *La Modelación en la Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Chaucón, M., Vargas, R. (2013). Biología 2° Educación Media. Texto del estudiante. Ed. Santillana del Pacífico S.A.

Del Valle, T. (2010). *La Modelación de la función afin: una mirada Socioepistemológica*. (Tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Espinoza, O. (2014). Cambios recientes al curriculum escolar: problemáticas e interrogantes. Recuperado de http://www.ceppe.cl/images/stories/recursos/notas/notas_educacion_julio_final.pdf

Recepción: 22/10/2015 *Aceptación: 05/11/2016*

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia a distancia*. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación . México: McGraw-Hill.

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modealción utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y experiencias didácticas*, *30*(3), 237-256.

Morales, A., Cordero, F. (2014). La Graficación-modelación y la Seire de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345.

MINEDUC.(2000). Programa de Estudio Formación General 3° Medio Matemática. Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC.(2001). Programa de Estudio 4° Medio Matemática. Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC. (2009). Fundamentos del Ajuste Curricular. Recuperado el 23 de Julio de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC.(2010). Programa de Estudio 8° Básico Matemática. Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC. (2011a). Programa de Estudios Matemática 1° medio . Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC. (2011b). Programa de Estudios Matemática 2° medio . Recuperado el 18 de Agosto de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC. (2012). Base Curricular 2012 Educación Básica Matemática. Recuperado el 20 de Noviembre de 2013, de http://www.curriculum-mineduc.cl

MINEDUC. (2013). Fundamento Bases Curriculares 2013, ccc
Tomo 1.Introducción General. Recuperado el 20 de Noviembre de 2014, de http://www.curriculum-mineduc.cl

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. (*Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén, Jaén.

Suárez, L., Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelacíon del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *13* (1), 51-58.

Suárez, L., Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoria para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319-333.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Youschkevitech, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century (Trad. R. M. Farfán). Serie: Antologías 1 (pp. 99-145). México: Cinvestav-IPN (Programa Editorial, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

María Inés Pezoa Reyes

Licenciada en Matemáticas, Universidad de Valparaíso. Master en Didáctica de las Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Docencia, nivel universitario. Docencia en Enseñanza básica y media.