



Investigaciones Europeas de Dirección y  
Economía de la Empresa

ISSN: 1135-2523

iedee@aedem-virtual.com

Academia Europea de Dirección y Economía  
de la Empresa  
España

Durán Santomil, Pablo; Otero González, Luis A.; Redondo López, José A.; Vivel Búa, M. Milagros  
MEDICIÓN DEL RIESGO DE RENTA VARIABLE MEDIANTE MODELOS INTERNOS EN  
SOLVENCIA II

Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa, vol. 18, núm. 1, enero-abril, 2012,  
pp. 53-68

Academia Europea de Dirección y Economía de la Empresa  
Vigo, España

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274122831003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## MEDICIÓN DEL RIESGO DE RENTA VARIABLE MEDIANTE MODELOS INTERNOS EN SOLVENCIA II

**Durán Santomil, Pablo \***

**Otero González, Luis A. \*\***

**Redondo López, José A. \*\*\***

**Vivel Búa, M. Milagros \*\*\*\***

Universidad de Santiago de Compostela

**Recibido:** 10 de diciembre de 2010

**Aceptado:** 6 de octubre de 2011

**RESUMEN:** Este trabajo se centra en la elaboración de un modelo interno para el riesgo de renta variable en Solvencia II. Para ello, se han utilizado datos mensuales de la serie de Ibex 35, Cac-40, Ftse-100 y Dax del periodo Enero de 1992 a Diciembre de 2008. Se han ajustado por máximo verosimilitud el modelo de rendimientos normales sobre el que se sustenta el modelo estándar de QIS4, frente a la mixtura de normales y un modelo de cambio de régimen de Markov. Los modelos analizados son comparados en función de criterios de parsimonia y en base a la normalidad de los residuos generados. Posteriormente se analiza la determinación de capital resultante de los distintos modelos frente al resultante de aplicar la fórmula estándar del QIS4. Los resultados obtenidos muestran que los capitales necesarios para soportar el riesgo de renta variable son dependientes de la especificación empleada.

**PALABRAS CLAVE:** Modelos Internos, Riesgo de Renta Variable, Solvencia II.

**CLASIFICACIÓN JEL:** G22, G28.

### RISK MEASUREMENT OF EQUITY RISK USING INTERNAL MODELS UNDER SOLVENCY II

**ABSTRACT:** This work focuses on developing an internal model for equity risk under Solvency II. We have used monthly data for the series of Ibex 35, Cac 40, FTSE 100 and Dax in the period between January 1992 and December 2008. This work fits by maximum likelihood method the model of normal returns, based on the standard model of QIS4, compared to the mixture of normal and a Markov regime switching model. The analyzed models are compared based on criteria of parsimony and normality of the residuals. Subsequently, we compared capital requirements resulting from applying these models against the standard formula of QIS4. The results showed that the funds needed to take the equity risk are dependent on the specification used.

**KEY WORDS:** Internal Models, Equity Risk, Solvency II.

**JEL CLASSIFICATION:** G22, G28.

## 1. INTRODUCCIÓN

El actual sistema de solvencia de las entidades aseguradoras de la Unión Europea (Solvencia I) no tiene en consideración el perfil de riesgo específico de cada compañía para calcular el capital necesario. El nuevo proyecto, Solvencia II, lleva a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera con el objetivo de mejorar el control y la medición de los riesgos a los que se exponen las aseguradoras europeas. El desarrollo de esta nueva normativa se está llevando a cabo a través del análisis del impacto que supondrá su entrada en vigor. En este sentido la Comisión Europea solicitó al Comité Europeo de Supervisores de Seguros (CEIOPS) el seguimiento de las propuestas normativas a través de diversos estudios de impacto cuantitativo (QIS).

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Campus Norte, Av. do Burgo s/n, E-15782, SANTIAGO DE COMPOSTELA, España.

\* e-mail: pablo.duran@usc.es

\*\* e-mail: luis.otero@usc.es

\*\*\* e-mail: josea.redondo@usc.es

\*\*\*\* e-mail: mila.vivel@usc.es



En Solvencia II se realizará el cálculo del capital de solvencia (SCR) a través del modelo estándar o bien mediante modelos internos aprobados por el regulador. El SCR calculado por medio de la fórmula general o de un modelo interno, debe corresponderse con el capital económico que han de poseer las compañías aseguradoras para limitar la probabilidad de ruina al 0,5 % en un horizonte de un año, lo que se corresponde al valor en riesgo (VaR) con un nivel de confianza del 99,5 %. El riesgo de renta variable forma parte de los riesgos de mercado, su estimación sirve para determinar las necesidades de capital del asegurador.

De acuerdo con la nueva directiva sobre Solvencia II el riesgo de renta variable mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los precios de mercado de la renta variable.

Este trabajo analiza a lo largo de los siguientes epígrafes distintos modelos propuestos en la literatura para evaluar el riesgo de renta variable de una aseguradora europea que invierta en el mercado español y comparar los resultados con los que se derivan de la aplicación del modelo estándar de Solvencia II. Posteriormente se verifica si los resultados obtenidos son consistentes con los que se obtendría para el mercado francés, británico y alemán. Los distintos modelos analizados han sido calibrados a la serie mensual del Ibex 35, Cac-40, Ftse-100 y Dax entre Enero de 1992 y Diciembre de 2008.

El trabajo se estructura en los siguientes apartados. En el apartado 2 se expone el modelo estándar que se aplica en Solvencia II. En el apartado 3 se lleva a cabo una revisión teórica de las distintas alternativas propuestas para modelizar la renta variable en el ámbito de la actividad aseguradora y se exponen aquellos modelos que serán objeto de análisis. El apartado 4 muestra el análisis descriptivo de la serie temporal empleada. En el apartado 5 se procede al ajuste y evaluación de los modelos, y en el apartado 6 se hace un análisis comparativo de los resultados de aplicar los modelos propuestos frente al modelo estándar para la determinación de las necesidades de capital. El apartado 7 extiende el análisis efectuado a los principales índices bursátiles europeos. Finalmente, se presentan las conclusiones.

## **2. MODELO ESTÁNDAR PARA LA RENTA VARIABLE**

El riesgo de renta variable o *equity* está ligado al nivel y volatilidad de los precios de mercado de la renta variable, estando expuestos a dicho riesgo aquellos activos y pasivos cuyo valor sea sensible a los cambios en el precio de las acciones. El CEIOPS, a petición de la Comisión Europea y con la colaboración del sector asegurador, ha realizado diversos estudios sobre el posible impacto cuantitativo del nuevo sistema de solvencia a través de los denominados QIS. Las especificaciones técnicas del cuarto estudio de impacto (QIS 4) fueron publicadas en marzo de 2008 (CEIOPS, 2008).

La carga de capital por riesgo de renta variable en el cuarto estudio de impacto cuantitativo se calcula en dos fases. En la primera se determina el efecto en el valor neto de los activos y pasivos en el escenario de estrés por el shock producido en la caída del índice en el que se agrupa, existiendo dos tipos de índices: los índices globales (países EEE y OCDE) y el resto (países emergentes, acciones no cotizadas, SPVs, CDOs, hedge fund). El escenario de caída o shock correspondiente al primer tipo de índice es del 32% mientras que para el segundo índice se estableció en el 45%. En la segunda fase, una vez obtenidas las cantidades individuales asociadas a estas dos agrupaciones, se agregan mediante la aplicación de un coeficiente de correlación de 0,75.

Los factores de estrés de QIS4 permanecen inalterados desde la calibración del QIS3 (CEIOPS, 2007) y se alcanzó por el ajuste de los rendimientos aritméticos cuatrimestrales del índice global MSCI de mercados desarrollados para el período 1970-2005. La media aritmética anual calculada era de 11,5% y la desviación estándar era de 16,9% por lo que bajo la hipótesis de normalidad y para un VaR al 99,5% el factor a aplicar es de -32%,  $(=2,57 \times 0,169 - 0,115)$ , cuantía que finalmente se aplicó en la propuesta. En el nuevo estudio de impacto cuantitativo publicado en Julio de 2010 (QIS5) se redujo el porcentaje básico al 30% para los índices globales y del 40% para el resto, pero dicha cuantía debe revisarse periódicamente en función de las circunstancias del mercado de acuerdo con el artículo 106 de la nueva Directiva (Parlamento Europeo y Consejo, 2009), pudiendo aumentar o reducirse en un 10% adicional. En este sentido en QIS5 se propone un incremento del 9%, por este motivo, los niveles de estrés aplicables son del 39% y del 49% respectivamente.

### 3. REVISIÓN TEÓRICA DE MODELOS DE RENTA VARIABLE

El modelo de precios lognormal, establece que los rendimientos siguen un modelo normal independiente de forma que:

$$r_t = \mu + \sigma Z_t$$

Donde  $Z_t \sim N(0; 1)$  para  $t = 1, 2, \dots$  donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son la media y la varianza de dicha distribución. La hipótesis de normalidad de los rendimientos logarítmicos ha sido la base de modelos muy importantes desarrollados en el campo de la teoría financiera como son los modelos de optimización de carteras de media-varianza de Markowitz (Markowitz; 1952, 1959), el modelo de Valoración de Activos Financieros CAPM desarrollado a mediados de los sesenta por Sharpe, Lintner y Mossin (Sharpe, 1964 Lintner, 1965 y Mossin, 1966) o el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes (Black y Scholes, 1973). Sin embargo, son numerosos los estudios que advierten que la distribución empírica de los rendimientos suele tener una mayor curtosis que la proporcionada por la distribución normal<sup>1</sup>.

Una propuesta recurrida en la literatura para recoger la curtosis es la mixtura de distribuciones, donde el modelo más empleado es la mixtura discreta de dos distribuciones normales. El empleo de la mixtura de dos normales supone que los rendimientos se comportan con una probabilidad  $p$  mediante una distribución normal de determinados parámetros  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$  y con una probabilidad  $1 - p$  mediante otra distribución normal de parámetros  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$ , es decir:

$$r_t = p(\mu_1 + \sigma_1 Z_t) + (1 - p)(\mu_2 + \sigma_2 Z_t)$$

Donde  $Z_t \sim N(0; 1)$  para  $t = 1, 2, \dots$  En los casos límites en que  $p = 0$  ó  $p = 1$  (valores extremos) o cuando coinciden esperanzas y varianzas ( $\mu_1 = \mu_2$  y  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) se obtiene la distribución normal. Además el modelo de mixturas de dos es bastante flexible siendo capaz de proporcionar distribuciones simétricas (cuando las esperanzas son iguales  $\mu_1 = \mu_2$  o si  $p = 0,5$  y además  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ), asimétricas, uni modales o bi modales.

Recientemente se han aplicado modelos más complejos que recogen mejor las particularidades del mercado de renta variable como son los modelos ARMA (Box y Jenkins, 1970), los modelos ARCH y GARCH (Engle, 1982 y Bollerslev, 1986), los modelos de volatilidad estocástica (Taylor, 1986) y los modelos de cambio de régimen de Markov (Hamilton, 1989). Estos modelos son capaces de recoger la tradicional asimetría y curtosis de la distribución de rendimientos, la posible correlación a lo largo del tiempo (autocorrelación serial) y la volatilidad no constante en el tiempo (heterocedasticidad).

Hardy (2001, 2003) propuso un modelo de cambio de régimen de Markov con dos regímenes log normales independientes para modelar el comportamiento de los precios del mercado de renta variable para las compañías aseguradoras, el denominado modelo RSLN (*Regime-Switching Lognormal*). El modelo se caracteriza por una cadena de Markov  $p = \{p_t, t = 1, 2, \dots\}$  que representa la evolución del estado de la economía, que puede estar en dos posibles estados denominados regímenes<sup>2</sup>. En cada uno de los regímenes los rendimientos siguen un modelo normal independiente donde los parámetros son distintos para cada régimen  $p_t$ , es decir:

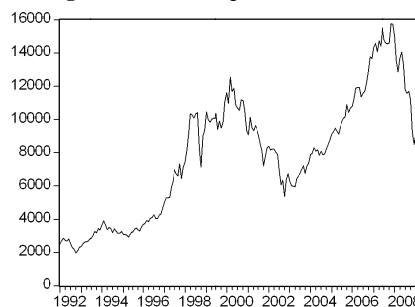
$$r_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} Z_t \quad (p_t = 1, 2)$$

Donde  $Z_t \sim N(0, 1)$  para  $t = 1, 2, \dots$  y  $p_t$  representa cada uno de los estados. Hardy (2001) compara el modelo RSLN frente a otras alternativa (modelo normal, modelos AR, modelos ARCH y GARCH) mostrando su superioridad para recoger el comportamiento de las series analizadas considerando adecuado emplear un modelo de dos regímenes<sup>3</sup>. Los regímenes se denominan, de acuerdo a la varianza, régimen 1 o de baja volatilidad y régimen 2 o de alta volatilidad. El valor de  $\mu_{p_t}$  en el régimen 1 suele ser positivo mientras que en el régimen de alta volatilidad suele ser negativo.

#### 4. SERIE ANALIZADA

En este apartado se muestra el tradicional análisis econométrico de series temporales previo al ajuste de los modelos para la rentabilidad. La serie analizada es el índice Ibex 35 con frecuencia mensual desde el 2 de Enero de 1992 al 31 de Diciembre de 2008, lo que proporciona 205 observaciones. Como se aprecia en la figura 1 la serie es claramente no estacionaria<sup>4</sup>.

**Figura 1. Serie temporal del Ibex 35**

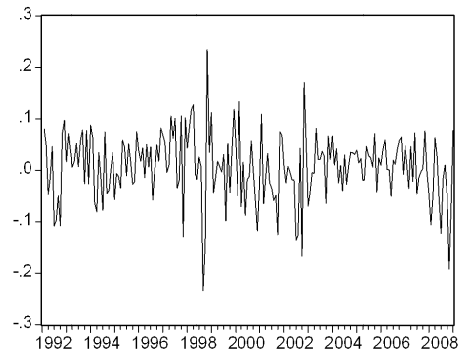


Como la serie no es estacionaria se procede a calcular los rendimientos logarítmicos. Si las observaciones de la serie IBEX 35 en los momentos  $t$  y  $t - 1$  son respectivamente  $P_t$  y  $P_{t-1}$ , el rendimiento compuesto continuo o logarítmico  $r_t$  vendrá dado por:

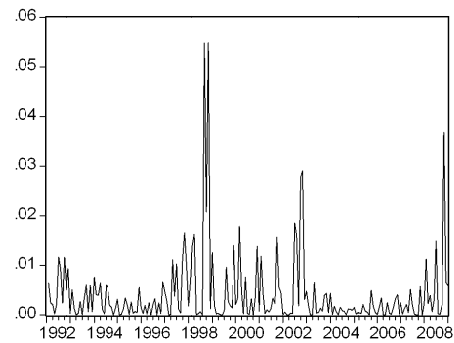
$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

La figura 2 muestra los rendimientos la serie de rendimientos del Ibex 35 y la figura 3 de sus cuadrados. Los rendimientos continuos son estacionarios en media, pero se observa que han existido periodos en los que la dispersión de los rendimientos o volatilidad es mayor y otros en los que la dispersión es menor. Esta característica se aprecia con mayor claridad en el gráfico del cuadrado de los rendimientos logarítmicos.

**Figura 2. Serie de rendimientos del Ibex 35**

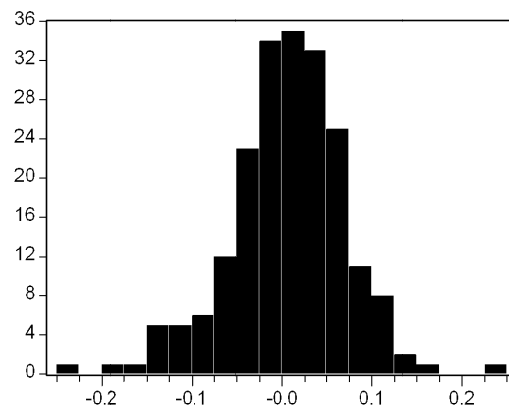


**Figura 3. Serie de rendimientos al cuadrado del Ibex 35**



Además se aprecia que la distribución de los rendimientos mensuales es asimétrica y presenta un exceso de curtosis llevan a rechazar la hipótesis de normalidad del Test de Jarque-Bera. Estos resultados se aprecian en la figura 4 que muestra el histograma de los rendimientos mensuales y en la tabla 1 de estadísticas resumen.

**Figura 4. Histograma de los rendimientos del Ibex 35**



**Tabla 1. Estadísticas resumen de los rendimientos del Ibex 35**

Media	0,6369%
Máximo	23,4171%
Mínimo	-23,3960%
Desviación típica	6,4184%
Sesgo <sup>5</sup>	-0,3809
Curtosis <sup>6</sup>	4,3295
Jarque-Bera <sup>7</sup>	19,9574
Probabilidad	0,000046

## 5. AJUSTE Y COMPARACIÓN DE LOS MODELOS

En la tabla 2 se proporcionan los valores de los parámetros de los distintos modelos estimados por máximo verosimilitud (MLE). Como se observa, los parámetros del modelo RSLN proporcionan un régimen volátil ( $p_t = 1$ ) con una volatilidad  $\sigma_1=7,94\%$  y un régimen ( $p_t = 2$ ) más estable  $\sigma_2=3,69\%$ .

**Tabla 2. Parámetros estimados por MLE de los modelos**

Modelo rendimientos normal			
$r_t = \mu + \sigma Z_t$		$\mu=0,6369\%$	$\sigma =6,4184\%$
Modelo mixtura de dos normales			
$r_t = \sum_{i=1}^K p_i(\mu_i + \sigma_i Z_t)$ $K = 2$	$p=31,0492\%$	$\mu_1=-1,7625\%$ $\mu_2=1,7174\%$	$\sigma_1=8,8030\%$ $\sigma_2=4,5925\%$
Modelo RSLN			
$r_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} Z_t$ $(p_t = 1,2)$	$p_{1,2}=3,6846\%$ $p_{2,1}=4,6836\%$	$\mu_1=-0,5180\%$ $\mu_2=1,9224\%$	$\sigma_1=7,9450\%$ $\sigma_2=3,6951\%$

Para seleccionar entre modelos alternativos se puede emplear el concepto de parsimonia que implica elegir un modelo más sencillo a otro más complejo (con más parámetros) si este último no proporciona un ajuste materialmente mejor al conjunto de los datos históricos. En esta línea, Akaike (1974) y Schwarz (1978) han propuesto criterios empleando la función de log-verosimilitud ( $l_j$ ). El criterio de Akaike (AIC) selecciona el modelo que toma mayor valor de la diferencia entre la función de log-verosimilitud bajo el modelo j-ésimo y su número de parámetros, es decir  $l_j - k_j$  <sup>8</sup>. El Criterio Bayesiano de Schwarz (SBC) se decanta por el modelo con mayor valor de  $l_j - \frac{1}{2}k_j - \ln n$  donde  $n$  es el tamaño muestral<sup>9</sup>. Los resultados se muestran en la tabla 3. Se aprecia que el modelo RSLN de Hardy supera en base a los dos criterios empleados al modelo de rendimientos normal y a la mixtura.

Tabla 2. AIC y SBC para los modelos analizados

Modelo ( $j$ )	Número de parámetros ( $k_j$ )	Función de log-verosimilitud ( $l_j$ )	AIC	SBC
Modelo rendimientos normal	2	270,72	268,72	264,38
Modelo mixtura de dos normales	5	276,94	271,94	269,10
Modelo RSLN	6	287,94	281,94	279,60

El test de la ratio o razón de verosimilitud (véase por ejemplo Klugman *et al.*, 2008) también se puede emplear para comparar distintos modelos en el caso de que estos se consideren versiones reducidas o casos especiales de modelos más complejos<sup>10</sup>. Si un modelo con  $k_1$  parámetros es un caso especial del modelo con  $k_2$  parámetros siendo  $k_2 > k_1$  entonces, si  $l_1$  es la función de máximo verosimilitud del modelo 1 y  $l_2$  es la función de máximo verosimilitud del modelo 2, este test tiene como estadístico  $T = 2(l_2 - l_1) = 2(l_2/l_1)$  que se distribuye como una  $\chi^2$  con un número de grados de libertad igual al de restricciones que supone la hipótesis nula frente a la alternativa, es decir,  $k_2 - k_1$  grados de libertad. La hipótesis nula del test es que no se produce una mejora significativa del empleo del modelo más complejo. La hipótesis nula se rechaza si  $T > c$ , donde  $c$  es calculado a partir de  $\alpha = \Pr(T > c)$ .

Dado que la distribución normal es un caso particular de la distribución mixtura de distribuciones normales, podemos realizar un contraste de razón de verosimilitudes en el que la hipótesis nula será que los rendimientos siguen una distribución normal y la hipótesis alternativa será que los rendimientos siguen la distribución más general que se considere. Además el modelo normal y la mixtura de dos normales también son casos especiales del modelo RSLN de Hardy. Los procesos de mixturas se diferencian de los procesos de cambio de régimen en que en estos últimos la probabilidad de emplear un sub-modelo u otro está en función del sub-modelo empleado en el periodo anterior. De esta forma un modelo de mixtura de dos normales puede verse como un caso especial de un modelo de cambio de régimen con dos regímenes donde  $p_{1,1} = p_{2,1} = p$  y por tanto  $p_{2,2} = p_{1,2} = 1 - p$ . En la tabla 4 se compara en base al test de la ratio de verosimilitud la distribución normal (modelo sencillo) con las mixturas de normales y el modelo RSLN (modelos más complejos). En los dos casos se rechaza la hipótesis de que los rendimientos están normalmente distribuidos frente a la hipótesis alternativa dada por el modelo más complejo.

Tabla 4. Test de la razón de verosimilitud frente al modelo normal

Ho: Modelo de rendimientos normal				
H1: Modelo alternativo	Estadístico $T$	Grados de libertad	p-valor	Conclusión 99%
Mixtura de 2 normales	12,44	3	0,60%	Rechazo Ho
RSLN	34,44	4	0,00%	Rechazo Ho



En la tabla 5 se compara en base al test de la ratio de verosimilitud la mixtura de normales frente al modelo RSLN. Se rechaza la hipótesis de que los rendimientos están distribuidos por el modelo más sencillo frente a la hipótesis alternativa dada por el modelo de Hardy.

**Tabla 5. Test de la razón de verosimilitud frente al modelo de mixtura**

Ho: Modelo mixtura de dos normales				
H1: Modelo alternativo	Estadístico T	Grados de libertad	p-valor	Conclusión 99%
RSLN	22,00	1	0,00%	Rechazo Ho

Los criterios de selección de modelos basados en valores de la función de máximo verosimilitud no evalúan la bondad de ajuste del modelo a los datos relevantes para la determinación del capital. De esta forma pudiera ser que los modelos con mayores valores de la función de log-verosimilitud proporcionen un buen ajuste a la mayoría de rendimientos pero no a los datos extremos que pueden ser muy relevantes para el cálculo del capital necesario. Bajo estos modelos estos datos atípicos suelen ser considerados como *outliers*, pero desde el punto de vista de la gestión del riesgo son muy relevantes porque determinan en gran medida las máximas pérdidas a las que está expuesta la compañía. Por tanto se deben aplicar criterios econométricos basados en el análisis de la normalidad de los residuos del modelo con un énfasis principal en la cola izquierda de la distribución. Para cada modelo se puede calcular la serie de residuos que se deben comportar como normales estándares independientes e idénticamente distribuidas. En caso de que los residuos se alejen de esta hipótesis el ajuste proporcionado por el modelo no es adecuado. Sin embargo, para los modelos de cambio de régimen (RSLN) y de mixtura los residuos sólo son aproximadamente  $N(0; 1)$ , debido a la incertidumbre asociada al proceso de cambio de régimen o de mixtura. De esta forma, en cada periodo temporal se establece una probabilidad de pertenecer a cada submodelo de forma que los residuos deben ser determinados en función del submodelo que se presupone los generó<sup>11</sup>. Para verificar la normalidad de los residuos se ha empleado el test de Jarque-Bera que emplea la asimetría y curtosis de los mismos. Como se muestra en la tabla 6, los modelos de mixtura de dos normales y modelo RSLN superan el test Jarque Bera de normalidad de los residuos.

**Tabla 6. Test JB de normalidad de los residuos**

Ho: Modelo residuos del modelo son normales				
Modelo empleado	Estadístico Q	Grados de libertad	p-valor	Conclusión 99%
Modelo normal	20,29	2	0,00%	Rechazo Ho
Modelo de mixturas	4,57	2	10,16%	No rechazo Ho
Modelo RSLN	0,97	2	61,51%	No rechazo Ho

## 6. CAPITAL RESULTANTE DE LOS MODELOS

En el apartado anterior se ha mostrado la superioridad de los modelos de rendimientos mixtura de dos distribuciones normales y el modelo RSLN frente al modelo de rendimientos normal que es actualmente la hipótesis empleada en el modelo estándar de Solvencia II. Además el modelo RSLN supera en base a los criterios de parsimonia al modelo de mixtura. Sin embargo, es extremadamente importante comparar los requerimientos de capital resultantes de aplicar distintos modelos, debido a que si no existen diferencias apreciables se podría emplear el modelo más sencillo. En Solvencia II el cálculo de la carga de capital debe basarse en el valor en riesgo o VaR que se define como la máxima pérdida que se puede esperar para un plazo e intervalo de confianza determinados en condiciones normales de mercado. Los cálculos, bien mediante solución analítica bien mediante métodos de simulación, deben corresponderse con el shock más adverso que se puede producir a un año con un nivel de confianza del 99,5% ( $\text{VaR}_{99,5\%}$ ).

En el cálculo de la carga de capital resultante de cada modelo surge el problema de la agregación temporal o cambios de escala de los rendimientos continuos (Klein, 2002; Chan *et al.*, 2008). Los tres modelos se han estimado a la serie de rendimientos logarítmicos a una frecuencia inferior (mensual) a la que se debe calcular el capital necesario para soportar el riesgo de renta variable bajo Solvencia II (anual). Para analizar el problema de la agregación temporal es útil definir el concepto de factor de acumulación  $A_T$ .

Sea  $P_t$  el valor mensual del Ibex 35 en el momento  $t$ , para  $t = 0, 1, \dots, n$  y definamos el rendimiento logarítmico para el mes  $t$ -ésimo como  $y_t = \ln P_t / P_{t-1}$ . La serie de rendimientos logarítmicos para el mes  $m$  se puede construir como  $Y_T = \ln P_{mT} / P_{m(T-1)} = \sum_{t=m(T-1)+1}^{mT} y_t$  para  $T = 1, 2, \dots, N$  siendo  $N = [n/m]$  un número entero. Se puede definir el factor de acumulación  $A_T$  o ratio de crecimiento del valor de mercado del índice como  $A_T = P_{mT} / P_{m(T-1)} = \exp(Y_T)$ . Por lo tanto, el factor de acumulación a un año ( $m = 12$ ) a partir de rendimientos logarítmicos mensuales se puede obtener fácilmente mediante  $A_{12} = \exp(y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \dots + y_{t+11})$  y de esta forma el valor del índice en el mes 12, es decir al cabo de un año, es igual a  $P_{12} = P_0 A_{12}$ .

El cálculo de los factores de acumulación y/o del valor del índice al cabo de un año puede realizarse analíticamente o bien mediante métodos de simulación de Monte Carlo<sup>12</sup>, sin embargo una ventaja de estos tres modelos es que son analíticamente manejables. El modelo normal de rendimientos supone que los rendimientos son independientes a lo largo de diferentes periodos siendo por tanto invariante ante cambios de escala. Si el rendimiento logarítmico mensual  $y_t$  sigue una distribución normal, es decir  $y_t \sim N(\mu; \sigma)$  el rendimiento logarítmico a lo largo de 12 meses sigue una distribución  $Y_T \sim N(12\mu; \sqrt{12}\sigma)$ <sup>13</sup>. Por tanto, el factor de acumulación  $A_T$  y los valores del índice están log normalmente distribuidos. Para el modelo RSLN la derivación analítica es más complicada por lo que el autor interesado es referido al Anexo o a Hardy (2001, 2003), además dicha derivación puede ser empleada también para el modelo de mixtura de dos normales con las ya comentadas restricciones.

En la tabla 7 se muestran los resultados de la carga de capital necesaria para cada modelo expresado como el shock porcentual correspondiente. Como se observa en dicho cuadro, los tres modelos analizados para el Ibex 35 superan la carga de capital resultante de

aplicar la metodología del QIS4 para el índice MSCI<sup>14</sup>. Sin embargo, dicha diferencia puede venir derivada del distinto índice empleado y/o del horizonte temporal analizado. Por lo que centrándonos en la serie Ibex 35 podemos afirmar que el modelo de rentabilidad normal infravalora seriamente la carga de capital necesaria frente a los otros dos modelos que como hemos visto a lo largo del artículo proporcionan un mejor ajuste a los datos históricos analizados. Por otra parte, el aumento de los requerimientos de capital de QIS5, ha situado el nivel de capital en niveles próximos al modelo lognormal, pero lejos de las necesidades que se derivarían de emplear un modelo interno basado en la mixtura de normales o en el modelo de cambio de régimen.

**Tabla 7. Cargas de capital resultantes de los distintos modelos**

Modelo empleado	VaR al 99,5% (shock porcentual)
Fórmula QIS4	-32,00%
Fórmula QIS5	-39,00%
Modelo de rendimientos normal	-39,12%
Modelo RSLN	-49,53%
Modelo mixtura de dos normales	-55,45%

## **7. ANÁLISIS PARA LOS PRINCIPALES ÍNDICES EUROPEOS**

En este apartado estimaremos los anteriores modelos a la serie de rendimientos para los principales índices bursátiles europeos: el índice francés Cac 40, el británico Ftse- 100 y el alemán Dax para el mismo horizonte temporal considerado para el Ibex-35. El objetivo es buscar evidencia de si los resultados obtenidos en el caso del Ibex resultan de una particularidad de dicha serie o pudieran ser extrapolados en general al mercado bursátil europeo. Los resultados para los criterios de selección de modelos, normalidad de los residuos y cargas de capital del modelo se muestran en la tabla 8 en base al cual podemos concluir que:

- El modelo RSLN de Hardy supera en base a los criterios AIC y SBC al modelo de rendimientos normal y a la mixtura para las tres series analizadas.
- El modelo RSLN es el único modelo que supera la normalidad de los residuos en las tres series. Destaca la incapacidad del modelo de rendimientos normales para superar la normalidad dado el pobre ajuste a los rendimientos más extremos en el mercado. Sin embargo, la capacidad de la mixtura de normales para superar la hipótesis de normalidad depende de la serie analizada.
- Para todas las series analizadas el modelo RSLN proporciona cargas de capital superiores a las del modelo normal dada la infraestimación del riesgo de cola izquierda de la distribución de rendimientos que proporciona este último modelo.
- Las necesidades de capital difieren considerablemente en función del índice utilizado, lo que aconseja el desarrollo de modelos internos que capturen mejor el riesgo asumido en una cartera particular.

Tabla 8. Resumen de los distintos modelos para los índices analizados.

Índice	Modelo (j)	AIC	SBC	p- valor Q	VaR 99,5%
Cac 40	Modelo rendimientos normal	295,73	291,39	0,07%	-37,78%
	Modelo mixtura de dos normales	298,50	295,66	0,09%	-36,80%
	Modelo RSLN	305,10	302,77	12,93%	-42,58%
Ftse 100	Modelo rendimientos normal	358,29	353,95	0,00%	-28,90%
	Modelo mixtura de dos normales	366,77	363,93	0,77%	-31,88%
	Modelo RSLN	377,59	375,25	12,09%	-35,45%
Dax	Modelo rendimientos normal	268,42	264,09	0,00%	-40,43%
	Modelo mixtura de dos normales	279,65	276,81	31,84%	-44,38%
	Modelo RSLN	285,74	283,40	33,54%	-52,99%

## 8. CONCLUSIONES

La entrada en vigor del proyecto de Solvencia II transformará el sistema de determinación de las necesidades de capital del asegurador. En el nuevo marco regulatorio se propone un modelo estándar basado en el valor en riesgo (VaR), pero al mismo tiempo, se fomenta la aplicación de modelos internos de autoevaluación y gestión del riesgo. Este trabajo se centra en la modelización del riesgo de renta variable para una compañía aseguradora. Para ello, se han utilizado datos mensuales de la serie de Ibex 35, Cac 40, Ftse 100 y Dax del periodo Enero de 1992 a Diciembre de 2008.

Se han ajustado por máximo verosimilitud el modelo de rendimientos normales frente a la mixtura de dos normales y el modelo de cambio de régimen propuesto en Hardy (2001, 2003). Los modelos analizados son comparados en función de criterios de parsimonia (criterio AIC, criterio SBC y test de la ratio de verosimilitud) y en base a la normalidad de los residuos generados (test de Jarque Bera). Fruto de este análisis destaca la superioridad del modelo RSLN de Hardy frente a las otras dos alternativas empleadas. Además el modelo normal es el único modelo de los tres analizados que no supera los test de normalidad de los residuos.

Posteriormente se analiza la determinación de capital resultante de los distintos modelos frente a la resultante de aplicar la fórmula estándar de QIS4 y QIS5. Los resultados obtenidos muestran que los capitales necesarios dependen en gran medida de la especificación empleada y del índice representativo de la cartera de inversión. Esto se traduce en importantes diferencias respecto al capital de solvencia estándar y aconseja la aplicación de modelos estándar adaptados a las especificidades de la cartera de inversión del asegurador. Por otra parte, el aumento de las cargas de capital hasta el 39% en QIS5 ha aproximado los niveles de capital a los que resultan de ajustar el modelo lognormal. No obstante, estos distan considerablemente de los que se derivan de aplicar los modelos que presentan un mejor ajuste, en particular los de cambio de régimen, lo que puede significar la infravaloración del riesgo realmente asumido. En futuras investigaciones sería interesante evaluar y comparar los distintos modelos en términos de VaR (*backtesting*), analizando la precisión de las estimaciones generadas frente a los resultados reales obtenidos.

Sin embargo, la conclusión más significativa es que el shock propuesto en QIS4 podría infravalorar el riesgo asumido por la compañía poniendo en peligro la solvencia de la aseguradora europea que invierta en los índices europeos analizados. Además el modelo de

rendimientos normales infravalora seriamente el riesgo respecto a los otros dos modelos considerados al no ajustar los rendimientos extremos de la cola izquierda de la distribución.

## NOTAS

<sup>1</sup> Ello ha llevado al análisis de otras distribuciones para los rendimientos como la familia de distribuciones Pareto estables (*Pareto stable distributions* o PS), la distribución t de Student, la distribución logística o la distribución de error generalizada. De forma más reciente se viene aplicando la teoría de Valor Extremo (Distribución Generalizada de Pareto y Distribución Generalizada de Valor Extremo) para la modelización de las observaciones más extremas.

<sup>2</sup> De esta forma, si  $p_t = 2$  entonces la economía permanece en el régimen 2 durante el intervalo  $[t, t + 1)$ . La cadena de Markov se define en términos de la matriz de transición  $P$ , la cual viene dada por:

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento de la matriz de transición  $P$ , denominados probabilidades de transición o  $p_{a,b}$ , viene dado formalmente por  $p_{a,b} = \Pr[p_t = b | p_{t-1} = a]$  para  $t = 1, 2, \dots$

<sup>3</sup> La autora analiza la serie de datos mensuales de la rentabilidad total del índice Toronto Stock Exchange 300 y del Standard and Poor's 500 lo que forma una serie compuesta de 527 observaciones para el período comprendido entre Enero de 1956 y Diciembre de 1999.

<sup>4</sup> Se dice que un proceso es débilmente estacionario o simplemente estacionario si todas las varianzas del proceso son finitas y la media y las covarianzas son independientes de  $t$ . Esto implica la estabilidad de la media, la varianza y la estructura de covarianzas a lo largo del tiempo.

<sup>5</sup> El sesgo o coeficiente de asimetría  $S$  es una medida de la simetría de una serie sobre su media. Se calcula mediante la siguiente fórmula:  $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^3$  donde  $N$  es el número de observaciones de la serie  $y_i$ ,  $\bar{y}$  es su media y  $\hat{\sigma}$  es el estimador insesgado de la desviación típica  $\sigma$  calculado como  $\hat{\sigma} = \sigma \sqrt{(N-1)/N}$ .

<sup>6</sup> El coeficiente de curtosis  $C$  es una medida de la elevación o achatamiento de una distribución. Se calcula como:  $C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^4$ . El valor del coeficiente de curtosis de la distribución normal es 3. Si excede del valor de 3 se dice que la distribución es leptocúrtica o relativamente elevada respecto a la normal.

<sup>7</sup> El estadístico del test de Jarque-Bera (Jarque y Bera, 1980, 1987) emplea el coeficiente de simetría  $S$  y curtosis  $C$  de una serie para verificar su normalidad:

$$Q = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(C-3)^2}{4} \right)$$

Bajo la hipótesis de que los rendimientos son normales el estadístico  $Q$  tiene una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad. Se muestra la probabilidad de que el estadístico  $Q$  supere el valor de la hipótesis nula de que la serie tiene una distribución normal.

<sup>8</sup> Bajo el criterio de Akaike cada modelo con un parámetro adicional debe aumentar la función de log-verosimilitud en al menos uno.

<sup>9</sup> De esta forma y al igual que AIC cada parámetro adicional debe aumentar el valor de la función de log-verosimilitud, pero en este caso el aumento necesario depende de la cantidad de datos disponible, de forma que cuanto mayor es el tamaño muestral el aumento de parámetros está más penalizado.

<sup>10</sup> Incluso en el caso de que los modelos no sean versiones reducidas el test de la ratio de verosimilitud (LRT) puede emplearse como una aproximación para la selección de modelos.

<sup>11</sup> Los residuos estandarizados del modelo de rendimientos normal se calculan fácilmente a partir de  $r_t = \frac{y_t - \mu}{\sigma}$ , los del modelo de rendimientos mixtura de dos normales mediante  $r_{t,i} = \frac{y_t - \mu_i}{\sigma_i}$  para  $i = 1, 2$ , y finalmente, los residuos estandarizados del modelo RSLN se calculan como  $r_{t,i} = r_t | (p_t = i) = \frac{y_t - \mu_i}{\sigma_i}$  para  $i = 1, 2$ . En el modelo de mixtura y RSLN se ha asignado los residuos a cada  $i$  de acuerdo a su probabilidad condicional estimada.

<sup>12</sup> El  $\text{VaR}_{99,5\%}$  puede ser calculado como el percentil al 0,5% de probabilidad de la distribución de precios simulado del índice Ibex 35 para los próximos 12 meses.

<sup>13</sup> La varianza anual aumenta respecto la mensual de forma lineal al tiempo  $12\sigma$ , la volatilidad lo hace con la raíz cuadrada del tiempo  $\sqrt{12}\sigma$ . Por lo tanto, la media de  $t$  periodos es  $t$  veces la media del periodo 1, mientras que la volatilidad del rendimiento de  $t$  periodos es  $\sqrt{t}$  veces la volatilidad del periodo 1 lo que se conoce como la fórmula temporal de la raíz cuadrada.

<sup>14</sup> La metodología empleada por el CEIOPS para el cálculo del VaR consiste en asumir implícitamente que los precios están normalmente distribuidos lo que supone una mayor cola izquierda (riesgo) que la distribución lognormal. Dicha metodología aplicada a los datos evaluados en este trabajo proporciona una carga de capital de -47,45%, más en línea con los resultados obtenidos por los modelos más avanzados.

## BIBLIOGRAFÍA

- AKAIKE, H. (1973): "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle", en N. Petrov y F. Csake (editores) *The Second International Symposium on Information Theory*, pp. 267–281. Hungary: Akademiai Kiado.
- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.
- BOX, G. E. P y JENKINS, G. M (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden Day, New York.
- CEIOPS (2007): *Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR*. CEIOPS- FS-14/07.
- CEIOPS (2008): *QIS4 Technical Specifications*. MARKT/2505/08.
- CEIOPS (2010): *QIS5 Technical Specifications*.
- CHAN W.S.; CHEUNG, S.H.; ZHANG, L.X. y WU, K.H.(2008): "Temporal Aggregation of Equity Return Time-Series Models", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 78, No. 2-3, pp. 172-180.
- COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS (2007): *Propuesta de Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio Solvencia II*.
- ENGLE, R. F. (1982): "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No.4, pp. 987-1008.
- HAMILTON, J. D. (1989): "A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series." *Econometrica*, Vol. 57, No 2, pp. 357–84.
- HAMILTON, J. D (1994): *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- HARDY, M. R. (1999): "Stock return models for segregated fund guarantees", Segregated Funds Symposium Proceedings, Canadian Institute of Actuaries.
- HARDY, M. R. (2001): "A Regime Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 41–53.
- HARDY, M. R. (2003): *Investment Guarantees; Modeling and Risk Management for Equity Linked Life Insurance*. Wiley, New York.
- JARQUE, C. M. y BERA, A.K (1980): "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals", *Economics Letters*, 6, pp. 255–259.
- JARQUE, C. M. y BERA, A. K (1987): "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals", *International Statistical Review*, Vol. 55, No. 2, pp. 163–72.
- KLEIN, G. E. (2002): Discussions of Paper "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 171-173.
- KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H y WILLMOT, G. E. (2008): *Loss Models: From Data to Decisions*. Tercera Edición, John Wiley & Sons, New York.
- LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, pp. 13-37.
- MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.
- MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, John Wiley & Sons, New York.
- MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783.
- PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO (2009): *Directiva 2009/138/CE sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*
- SCHWARZ, G. (1978): *Estimating the dimension of a Model*. *The Annals of Statistics*, Vol. 6, pp. 461-464.
- SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.
- TAYLOR, S. J. (1986): *Modeling Financial Time Series*, Wiley, New York.

## ANEXO

### Cálculo del VaR del modelo RSLN de forma analítica.

El modelo RSLN dispone de una fórmula analítica para el cálculo del VaR de la inversión en un índice, ya que nos permite conocer la función de distribución y de probabilidad de la serie de precios rendimientos del mismo. Para alcanzar dicha fórmula empezaremos por describir la función de probabilidad para el tiempo total que el modelo permanecerá en el régimen 1 en el momento  $n = 12$ , dado que Solvencia II establece un requisito de capital a un año y nuestro modelo ha sido establecido en base mensual.

*Función de probabilidad para el tiempo total en el régimen 1 en el momento  $n$ .*

Siguiendo a Hardy (2001) denotamos por  $R$  el tiempo total que el proceso permanecerá en el régimen 1. Si el cálculo del VaR lo realizamos a  $n$  meses, entonces  $R$  tomará valores enteros entre 0 y  $n$ , es decir  $R \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Sea  $p(r)$  la función de probabilidad de  $\Pr(R = r)$ .  $R_t$  representa el tiempo total en el régimen 1 en el intervalo  $[t, n]$  y considérese  $\Pr(R = r | \rho_{t-1})$  para  $r = 0, 1, \dots, n - t$  y  $t = 1, 2, \dots, n - 1$ . Obsérvese como  $\Pr(R = r | \rho_{t-1}) = 0$  para  $r > n - t$  o  $r < 0$ . Es fácil intuir que:

- $\Pr(R_{n-1} = 0 | \rho_{t-1} = 1)$  es la probabilidad de no estar en el régimen 1 dado que en el periodo anterior estábamos en el régimen 1  $t \in [t - 2, t - 1]$ , por lo que su valor es de  $p_{1,2}$ .
- $\Pr(R_{n-1} = 1 | \rho_{t-1} = 1)$  es la probabilidad de estar en el régimen 1 dado que en el periodo anterior estábamos en el régimen 1, por lo que su valor es de  $p_{1,1}$ .
- $\Pr(R_{n-1} = 0 | \rho_{t-1} = 2)$  es la probabilidad de no estar en el régimen 1 dado que en el periodo anterior estábamos en el régimen 2, por lo que su valor es de  $p_{2,2}$ .
- $\Pr(R_{n-1} = 1 | \rho_{t-1} = 2)$  es la probabilidad de estar en el régimen 1 dado que en el periodo anterior estábamos en el régimen 2, por lo que su valor es de  $p_{2,1}$ .

Podemos ir recurrentemente calculando las probabilidades para  $R = R_0$  empleando la siguiente relación:

$$\Pr(R_t = r | \rho_{t-1} = 1) = p_{\rho_{t-1},1} \Pr(R_{t+1} = r - 1 | \rho_t = 1) + p_{\rho_{t-1},2} \Pr(R_{t+1} = r | \rho_t = 2)$$

La justificación de la anterior fórmula es que inmediatamente después de la transición al momento  $t$ , o el proceso está en el régimen 1 (es decir,  $\rho_t = 1$  con probabilidad  $p_{\rho_{t-1},1}$ ) lo que deja  $r - 1$  periodos en los que permanecerá en el régimen 1 o el proceso está en el régimen 2 (es decir,  $\rho_t = 2$  con probabilidad  $p_{\rho_{t-1},2}$ ), en cuyo caso permanecerá  $r$  periodos de tiempo en el régimen 1 en el intervalo  $[t + 1, n]$ . Dicho proceso se resume para los parámetros estimados por máxima verosimilitud para la serie de rendimientos del Ibex 35 en tabla 9 y 10. A modo de ejemplo, como se observa en la tabla 10 en el mes 2 con un 90,9% ( $p_{2,2}p_{2,2}$ ) de probabilidad no se habrá estado en el régimen 1, con un 4,6% de probabilidad se habrá estado una vez ( $p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,1}$ ) y con un 4,5% de probabilidad se estará en dos ocasiones ( $p_{2,1}p_{1,1}$ ) dado que el proceso ha empezado en el régimen 2. Centrándonos ahora en la tabla 9, podemos afirmar que en el mes 2 con un 3,5% ( $p_{1,2}p_{2,2}$ ) de probabilidad no se habrá estado en el régimen 1, con un 3,7% de probabilidad se habrá estado una vez ( $p_{1,1}p_{1,2} + p_{1,2}p_{2,1}$ ) y con un 92,8% de probabilidad se estará en dos ocasiones ( $p_{1,1}p_{1,1}$ ) dado que el proceso ha comenzado en el régimen 1.

Tabla 9.- Número de veces que permaneceré en el Régimen 1 empezando el proceso en el Régimen 1.

Mes/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,7%	96,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
2	3,5%	3,7%	92,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
3	3,3%	3,6%	3,8%	89,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
4	3,2%	3,4%	3,6%	3,8%	86,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
5	3,0%	3,2%	3,4%	3,6%	3,8%	82,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
6	2,9%	3,1%	3,3%	3,5%	3,6%	3,8%	79,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
7	2,8%	3,0%	3,1%	3,3%	3,5%	3,6%	3,8%	76,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
8	2,6%	2,8%	3,0%	3,2%	3,3%	3,5%	3,7%	3,8%	74,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
9	2,5%	2,7%	2,9%	3,0%	3,2%	3,4%	3,5%	3,7%	3,8%	71,3%	0,0%	0,0%	0,0%
10	2,4%	2,6%	2,7%	2,9%	3,1%	3,2%	3,4%	3,5%	3,7%	3,8%	68,7%	0,0%	0,0%
11	2,3%	2,5%	2,6%	2,8%	3,0%	3,1%	3,3%	3,4%	3,5%	3,7%	3,8%	66,2%	0,0%
12	2,2%	2,3%	2,5%	2,7%	2,8%	3,0%	3,1%	3,3%	3,4%	3,5%	3,6%	3,7%	63,7%

Tabla 10.- Número de veces que permaneceré en el Régimen 1 empezando el proceso en el Régimen 2.

Mes/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	95,3%	4,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
2	90,9%	4,6%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
3	86,6%	4,6%	4,5%	4,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
4	82,5%	4,5%	4,4%	4,3%	4,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
5	78,7%	4,5%	4,4%	4,3%	4,2%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
6	75,0%	4,4%	4,3%	4,2%	4,1%	4,0%	3,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
7	71,5%	4,3%	4,3%	4,2%	4,1%	4,0%	3,9%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
8	68,1%	4,3%	4,2%	4,1%	4,1%	4,0%	3,9%	3,7%	3,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
9	64,9%	4,2%	4,1%	4,1%	4,0%	3,9%	3,9%	3,7%	3,6%	3,5%	0,0%	0,0%	0,0%
10	61,9%	4,1%	4,1%	4,0%	4,0%	3,9%	3,8%	3,7%	3,6%	3,5%	3,3%	0,0%	0,0%
11	59,0%	4,0%	4,0%	4,0%	3,9%	3,9%	3,8%	3,7%	3,6%	3,5%	3,4%	3,2%	0,0%
12	56,2%	3,9%	3,9%	3,9%	3,9%	3,8%	3,8%	3,7%	3,6%	3,5%	3,4%	3,2%	3,1%

Finalmente, podemos calcular la función de probabilidad para  $R_0$  condicionado a que el proceso se inicie en el régimen 1,  $\Pr(R_0 = r | \rho_{t-1} = 1)$  y condicionado a que el proceso se inicie en el régimen 2,  $\Pr(R_0 = r | \rho_{t-1} = 2)$ . Por medio de las probabilidades estacionarias de los regímenes podemos afirmar que la distribución de  $R_0$  es:

$$\Pr(R_0 = r) = p(r) = \Pi_1 \Pr(R_0 = r | \rho_{-1} = 1) + \Pi_2 \Pr(R_0 = r | \rho_{-1} = 2)$$

El cálculo para el mes 12 para el Ibex 35 se muestra en la tabla 11:

Tabla 11.- Cálculo de  $\Pr(R_{12} = r)$ .

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Pr(R_{12} = r   \rho_{-1} = 1)$	2,2%	2,3%	2,5%	2,7%	2,8%	3,0%	3,1%	3,3%	3,4%	3,5%	3,6%	3,7%	63,7%
$\Pr(R_{12} = r   \rho_{-1} = 2)$	56,2%	3,9%	3,9%	3,9%	3,9%	3,8%	3,8%	3,7%	3,6%	3,5%	3,4%	3,2%	3,1%
$\Pr(R_{12} = r)$	26,0%	3,0%	3,1%	3,2%	3,3%	3,4%	3,4%	3,5%	3,5%	3,5%	3,5%	3,5%	37,0%



*Función de probabilidad para el rendimiento total del índice en el momento n*

Una vez tengamos la función de probabilidad para el tiempo total que el proceso permanece en el régimen 1, podemos calcular la función de probabilidad del proceso de rendimiento total del índice en el momento  $n$  al que denotaremos por  $S_n$ . Supongamos que en el momento 0 el precio del índice es  $S_0 = 1$ , entonces  $S_n|R$  está lognormalmente distribuido con media  $\mu^*(R)$  y desviación  $\sigma^*(R)$ , siendo dichos valores una media ponderada de los parámetros de las distribuciones de cada régimen:

$$\mu^*(R) = R\mu_1 + (n-R)\mu_2$$

$$\sigma^*(R) = \sqrt{R\sigma_1^2 + (n-R)\sigma_2^2}$$

En la tabla 12 se muestran los valores de  $\mu^*(R)$  y  $\sigma^*(R)$  para el Ibex 35 para los doce meses considerados:

**Tabla 12.- Cálculo de  $\mu^*(R)$  y  $\sigma^*(R)$ .**

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu^*(R)$	0,23	0,21	0,18	0,16	0,13	0,11	0,08	0,06	0,04	0,01	-0,01	-0,04	-0,06
$\sigma^*(R)$	0,13	0,15	0,16	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28

De esta forma la función de probabilidad de  $S_n$  se calcula a partir de la función de probabilidad de  $p(r) = Pr(R = r)$ :

$$Pr(S_n \leq x) = \sum_{r=0}^n Pr(S_n \leq x|R=r) p(r) = \sum_{r=0}^n \Phi\left(\frac{\ln x - \mu^*(r)}{\sigma^*(r)}\right) p(r)$$

Y por lo tanto la función de densidad de  $S_n$  es:

$$Pr(S_n < x) = \sum_{r=0}^n \Phi\left(\frac{\ln x - \mu^*(r)}{\sigma^*(r)}\right) p(r)$$

Siendo  $\Phi$  la función de probabilidad y  $\phi$  la función de densidad de la distribución normal estándar. Dado que para un VaR al 99,5% debe existir una probabilidad incondicional de que  $Pr(S_n \leq x) = 0,5\%$ , que se calcularía como  $\sum_{r=0}^{12} Pr(R_{12} = r) Pr(S_n \leq x|R=r)$ . En el caso concreto del Ibex-35  $x$  toma el valor de 0,5047, y dado que  $S_0 = 1$  esto equivale a decir que el shock que se debe producir en el valor de mercado de la cartera es de un -49,53%. Las probabilidades condicionales de  $Pr(S_n \leq x|R=r) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu^*(r)}{\sigma^*(r)}\right)$  se muestran en la tabla 13.

El VaR para el modelo de mixtura o normal puede ser calculado a partir de las anteriores ecuaciones aplicando que pueden ser considerados simplificaciones del modelo RSLN. Sin embargo cabe destacar que como en el modelo lognormal independiente  $\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \ln(S_n)$  se distribuye como una normal con media  $n\mu$  y desviación típica  $\sqrt{n}\sigma$ , podemos afirmar que el VaR(99,5%) para la distribución normal se calcula mediante el inverso de la distribución lognormal con una probabilidad del 0,5% y la media y desviación especificadas. Por lo que el VaR analítico toma el siguiente valor  $e^{\Phi^{-1}(0,5\%)(n\mu + \sqrt{n}\sigma)} - 1$  lo que en el caso concreto de los parámetros estimados para el Ibex-35 realiza una estimación del VaR a un año de  $e^{\Phi^{-1}(0,5\%)(12 \cdot 0,6369\% + \sqrt{12} \cdot 6,4148\%)} - 1 = -39,12\%$ .

**Tabla 13.- Cálculo de  $Pr(S_n \leq x|R=r)$ .**

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Pr(S_n \leq x R=r)$	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,05%	0,12%	0,24%	0,45%	0,76%	1,19%
$Pr(R_{12} = r)$	26,0%	3,0%	3,1%	3,2%	3,3%	3,4%	3,4%	3,5%	3,5%	3,5%	3,5%	3,5%	37,0%