Revista de Ciencias Sociales (Ve)
ISSN: 1315-9518
cclemenz@luz.ve
Universidad del Zulia
Venezuela

Fedriani, Eugenio M.; Martín, Ana M.
Un indicador multidimensional de pobreza basado en la geometría euclídea
Revista de Ciencias Sociales (Ve), vol. XVII, núm. 4, octubre-diciembre, 2011, pp. 625-639
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

Revista de Ciencias Sociales (RCS)
Vol. XVII, No. 4, Octubre - Diciembre 2011, pp. 625 - 639
FACES - LUZ • ISSN 1315-9518

Un indicador multidimensional de pobreza basado en la geometría euclídea

Fedriani, Eugenio M.*
Martín, Ana M.**

Resumen

El principal objetivo de este trabajo es definir un nuevo tipo de indicador de pobreza que permita medirla de una forma multidimensional y, al mismo tiempo, proporcionar una representación gráfica exhaustiva, complementando las técnicas actualmente más utilizadas. Con ello, se está en disposición de incluir numerosas dimensiones de la pobreza en un indicador. Posteriormente se demuestran algunas de las propiedades de dicho indicador. Finalmente, se aplica a dos ejemplos distintos: el de una región española con una economía poco productiva y otro con las naciones africanas. Como la tradicional línea de pobreza no tiene sentido aquí, se utiliza un nuevo método para calcular un hiperplano que sustituya el papel que la línea de pobreza desempeña en los estudios clásicos. También se propone el uso de este tipo de indicador en un amplio espectro de campos de investigación en las Ciencias Sociales.

Palabras clave: Medición de la pobreza, indicadores, multidimensionalidad, hiperplano, representación gráfica.

A Multidimensional Poverty Indicator Based on Euclidean Geometry

Abstract

The main goal of this paper is to define a new kind of poverty indicator which can measure the multidimensionality of poverty and, at the same time, provide a comprehensive graphic representation, complementing the normally used techniques. A variety of dimensions of poverty can be included in one single indicator; the major properties of the defined indicator are shown. Finally, the indicator is applied to two different examples: one, a Spanish region with low economic productivity and another in Africa. Since the traditional

* Profesor Titular del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, Magíster en Administración de Empresas por la Cámara Oficial de Comercio, Industria y Navegación de Sevilla. Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (España). E-mail: efedmar@upo.es

** Profesora Colaboradora del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, Magíster en Administración y Dirección de Empresas por la Universidad Pablo Olavide. Doctora en Economía y Empresa por la Universidad Pablo de Olavide. E-mail: ammarcar@upo.es

Recibido: 10-05-25 • Aceptado: 11-01-25

poverty line has no meaning here, a new method is used to compute a poverty hyper plane replacing the role the poverty line performed in classic studies. Use of this indicator is also proposed for a wide range of research fields in the social sciences.

Keywords: Measurement of poverty, indicators, multidimensionality, hyper plane, graphic representation.

Introducción

A pesar de las increíbles mejoras en la técnica y en el conocimiento, aún no se ha logrado acabar con el más grave problema económico a nivel mundial. Hay quien afirma que ésta es la primera generación con la posibilidad real de acabar con la pobreza en el mundo, pero los ricos parecen cada vez más impermeables ante la situación.

El primer paso para resolver un problema es conocer la realidad. Sin embargo, la medición de la pobreza es siempre relativa y este carácter presenta una faceta espacial y otra temporal. Por si fuera poca la dificultad, la pobreza es, hasta cierto punto, subjetiva e implica a múltiples variables, o dimensiones. A pesar de que este hecho es reconocido por numerosos expertos (Nolan y Whelan, 1996; Perry, 2002; Ringen, 1988; Townsend, 1979; entre otros), la mayor parte de los estudios sobre pobreza usan un enfoque unidimensional para determinar si una persona (o un grupo, que llamaremos *unidad de análisis*) es o no pobre. Por supuesto, ha habido muchos intentos de usar diferentes variables para medir la pobreza (Bourguignon y Chakravarty, 2003).

Normalmente, en un modelo multidimensional, cada variable elegida representa un aspecto distinto de la pobreza o de las desigualdades, puesto que ninguna variable puede dar por sí sola una idea completa del fenómeno a analizar. Sin embargo, la agregación de los valores alcanzados por las diferentes variables puede suponer una redefinición del concepto, ya de por sí subjetivo (Foster y Shorrocks, 1988; Atkinson, 1987). Ya Sen (1996) afrontó la clave del problema, dividiéndolo en dos etapas interrelacionadas: (i) la identificación de los pobres (esto es, la construcción de una cierta línea de pobreza), y (ii) la agregación de las características de los pobres en un indicador general. El primer problema ha sido parcialmente resuelto mediante el *método de los ingresos*, que requiere de la determinación de una línea de pobreza basada en los ingresos (y una persona, o unidad de análisis, es pobre si cae por debajo de la línea de pobreza). Con respecto al segundo problema, aún no ha sido resuelto satisfactoriamente, aunque se han presentado algunas soluciones parciales basadas en diferentes índices de pobreza. Muy a menudo, este segundo paso implica la selección de los indicadores a utilizar y de una estructura de pesos para ponderar cada variable y que, finalmente, permita agregar todas ellas en un único indicador.

La mayor parte de los estudios serios sobre pobreza indican que es necesario analizar diferentes dimensiones del problema. En este sentido, Bourguignon y Chakravarty (2003) sostienen que una medida genuina de la pobreza debería depender tanto de variables de ingreso como de variables de bienestar no explicadas directamente por los ingresos. El problema radica en que no es tan fácil elegir las variables más apropiadas y combinarlas con un coste computacional razonable. Debe tenerse en cuenta que un investigador social, por ejemplo, tiene que evitar la pérdida de información y más aún si el estudio implica analizar la evolución de diferentes características de un mismo tema. De ahí que el principal objetivo de este trabajo sea la definición de un indicador de pobreza (el Indicador Geométrico de Pobreza, IGP) que resulte ser simple, visual, intuitivo, multidimensional y, además, que preserve las características propias de cada variable. Incluso, será posible la introducción simultánea de variables de ingreso y de otro tipo (normalmente, no monetarias).

Para el lector interesado, en Zheng (1997) puede encontrarse una lista bastante completa de artículos sobre medición de la pobreza. Por supuesto, algunos de ellos tratan la multidimensionalidad del fenómeno. Esto no menoscaba la utilidad de un nuevo indicador, pues cada aproximación al problema tiene sus propias carencias y, precisamente, en este artículo se sostiene que las ideas presentadas pueden colaborar en la resolución de estos defectos. Por eso, es interesante recordar qué soluciones han propuesto otros autores. Así, Brandolini (2008) da una clasificación muy amplia en la que incluye las diferentes estrategias posibles para definir un indicador de pobreza multidimensional, distinguiendo entre "*supplementation*" (considerar todas las variables de bienestar, una a una) y "*comprehensive strategies*" (resumir toda la información en un único indicador). Entre estas últimas, Brandolini considera que hay métodos "agregativos" y "no agregativos". El principal problema que presenta tanto la *supplementation* como los métodos no agregativos es que mantener las variables separadas puede provocar problemas de comprensión.

Las estrategias agregativas, normalmente, consideran diferentes pesos para cada variable, pero no suele haber ninguna justificación teórica capaz de destacar por completo una ponderación frente al resto. Solo la reputación del autor que la proponga hace que un sistema de pesos sea más recomendable o considerado que otro. Por ejemplo, UNDP (1997) considera la pobreza como un fenómeno multidimensional y define un indicador de pobreza (llamado *Human Poverty Index*, HPI) desde la perspectiva del desarrollo humano, y no solo mediante la evaluación de unas necesidades económicas. El HPI mide la pobreza por niveles de ingresos y también mediante la consideración de algunos fenómenos relacionados con la limitación de oportunidades u opciones y con las situaciones de privación; pero una grave desventaja de este índice, actualizado recientemente, es que usa diferentes indicadores para estimar la pobreza en un país desarrollado o en un país no desarrollado, por lo que no permite una comparación a escala internacional.

1. Preliminares

Cuando se evalúa la pobreza a través de una sola dimensión, el valor de la variable seleccionada y el umbral fijado pueden ser comparados inmediatamente. En general, este proceso es intuitivo, nada subjetivo y no necesita de técnicas matemáticas. Por el contrario, la consideración de varias variables conlleva una inherente complejidad matemática. En esta sección resumimos los conceptos matemáticos y estadísticos que serán utilizados en adelante, con el objetivo de generalizar los indicadores unidimensionales.

1.1. Conceptos geométricos

Sea un sistema de referencia, $\Re$, en el espacio afín R^n. Un hiperplano es determinado por n puntos afínmente independientes y definido por una sola ecuación implícita: $H: a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$, donde no todos los a_i son simultáneamente nulos y que $b=0$ si y solo si este hiperplano, H, pasa por el origen de coordenadas, O. Dos ejemplos: si $n=2$ cada hiperplano es una línea recta; si $n=3$ los hiperplanos son planos.

Sea P un punto de R^n cuyas coordenadas con respecto a $\Re$ son $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$. En estas condiciones, la distancia del punto P al hiperplano H es la mínima distancia entre P y cualquier otro punto de H; esta distancia euclídea puede calcularse como $d(P,H)=\frac{|H(P)|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}$, siendo $|H(P)|$ el valor absoluto de $H(P)=a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n+b$.

1.2. Tipos de variables e indicadores simples

El objetivo final es definir indicadores que incluyan distintas características de la pobreza y que no presenten restricciones sobre el número de dimensiones elegidas. Además, se desea analizar la evolución de diferentes aspectos a través de las variables utilizadas. Más aún, como se verá, una de las ventajas de la medida propuesta es que puede ser aplicada tanto a nivel individual como a escala geográfica o socio-política, e incluso a otras situaciones no directamente relacionadas con la pobreza. En la literatura especializada se consideran dos procedimientos principales para que el investigador seleccione las variables que quiera considerar: la opinión de un experto o el resultado de un método estadístico. En ambos casos, esta selección afecta significativamente al tipo de pobreza que será analizada. Abundantes artículos tratan los problemas de la selección de las variables apropiadas y de la forma de combinarlas del mejor modo posible; un ejemplo es Poza y Fernández (2011), donde se puede comprobar la complejidad de las relaciones entre las mismas.

Para preservar la bondad de otros métodos, se propone aquí el uso del indicador IGP sobre los calculados por ellos; es decir, otros indicadores de pobreza serían las variables de entrada del IGP. Sin embargo, también se puede usar como entrada cualquier otro tipo de variable, tanto las de ingresos como las de otra clase. Las variables no monetarias pueden incluir, por ejemplo, aspectos educativos, sobre vivienda, de salud, culturales y ambientales.

Obviamente, la situación ideal es que las variables utilizadas se muevan en los mismos niveles en cuanto a rangos, escalas, relevancia, etc. No obstante, casi nunca se pueden encontrar variables con esas características. Algo parecido ocurre con la independencia entre ellas, pues las variables suelen estar interrelacionadas (puesto que se usan para medir un mismo fenómeno). De todos modos, este nuevo método permite que las variables estén correladas; incluso, eso permitirá que el indicador final pondere especialmente esa relación. Con respecto a la naturaleza de la información disponible, debería suponerse, al menos, que no hay datos negativos y que hay algún dato no nulo en cada variable. Por el resto de dificultades que puede presentar los datos, se necesita un *proceso de normalización*, que permitirá mejorar el comportamiento del indicador final:

1. Cuando el estudio sobre pobreza se realiza mediante datos agregados y se refiere a una zona geográfica en la que las unidades de análisis (países, estados, ciudades...) no tengan los mismos habitantes, a veces hay que dividir el valor de la variable por la población correspondiente. Lógicamente, si las variables ya son "individuales", no es necesario, ni siquiera conveniente, calcular dichos ratios.

2. La escala de cada variable elegida suele ser distinta, por lo que también lo es su rango de variación. Hay algunas técnicas apropiadas para hacer compatibles las dife-

rentes escalas. En este trabajo se usa una forma muy simple de homogeneizar las escalas, pero es posible (y deseable en la mayoría de los casos) utilizar otras. En concreto, se sugiere el basado en la *distancia de Mahalanobis* (Mahalanobis, 1936).

Para simplificar el proceso de normalización, y por motivos didácticos, solo se calcula aquí el máximo valor de cada variable del estudio y se divide cada valor de la variable por su correspondiente máximo. Así, si Z es el conjunto de todos los valores de una variable, se transforma: $y_i = \frac{z_i}{\underset{z_j \in Z}{máx}\, z_j} \forall i = 1,2,...,t,$ donde $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ es la nueva base de datos obtenida. Según esto, se puede suponer que el rango de variación de todas las variables es el intervalo *[0,1]*. Aunque pueda parecer un método de normalización un tanto tosco, es el utilizado por UNDP en las últimas versiones del HDI.

3. Otra dificultad es la existencia de diferentes relaciones entre cada variable y la característica de la pobreza que valoran. Se consideran dos tipos distintos de relaciones: *relación directa* (que corresponde a las llamadas *variables positivas*: cuanto mayor es el valor de la variable, peor es la situación de pobreza) y *relación inversa* (la opuesta). Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que todas las variables elegidas tienen una relación inversa con la pobreza; si se necesita para alguna variable, se transformaría cada dato en la forma $x_i = \underset{y_j \in Z}{máx}\, y_j - y_i$.

2. Indicador geométrico de pobreza

Se pretende determinar el conjunto de pobres en la población de estudio, pero primero se necesitan algunas definiciones y notaciones, que se comentan seguidamente. Para una población de tamaño m, a la persona i-ésima (o i-ésima unidad de análisis) le corresponde un vector fila de n componentes, $X_i \in R_+^n$, donde R_+^n es el subconjunto de componentes no negativas en el espacio euclídeo n-dimensional, R^n.

2.1. Hiperplano de pobreza

El siguiente objetivo es definir un límite de pobreza multidimensional que permita determinar el conjunto de pobres. Nótese que este límite no es un indicador, pero sí una herramienta indispensable para definir el IGP, así como la línea de pobreza no es un indicador sino algo que facilita el cálculo de diferentes indicadores de pobreza.

Hay que admitir que varios autores defienden una forma alternativa de tener en cuenta la multidimensionalidad de la pobreza: especificar una línea de pobreza para cada dimensión de la misma. Dicho esto, se sostiene en el presente artículo, que no todas las dimensiones de la pobreza tienen la misma importancia en los estudios y que no se puede suponer la misma situación para todos aquellos individuos por debajo de una de las líneas.

Pena-Trapero (1977) y Zarzosa-Espina (1996) sugieren otra forma de considerar la multidimensionalidad: usar la distancia euclídea a un cierto punto que representa una situación *minimal*; con la pega de que se pierde tanto la idea intuitiva de la relación entre las variables como una parte importante de la información contenida en los datos.

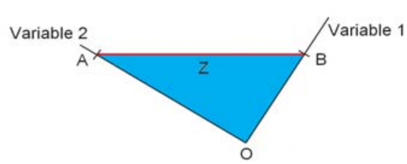
Algunos años después, Linting *et al*. (2007) propusieron el uso del Análisis en Componentes Principales (ACP) para transformar el conjunto de variables, obteniendo otro más pequeño, de variables incorreladas y más fácil de manejar. Sin embargo, algunas de las nuevas variables, que son combinación lineal de diferentes características, pueden no tener un significado muy claro; además, el ACP clásico sólo debería aplicarse si las variables son numéricas y están relacionadas linealmente.

Por otro lado, Duclos, Sahn y Younger (2006) construyeron una "frontera" de modo que la línea de pobreza en una dimensión depende del valor de los atributos en el resto de dimensiones, pero el método que usan tampoco es muy intuitivo.

Finalmente, Poza y Fernández (2011) son representativos de la utilización de modelos de ecuaciones estructurales, una técnica que no evita los problemas anteriormente referidos. Teniendo todo esto en cuenta, se pasa a describir un nuevo método para construir una delimitación multidimensional de la pobreza.

Para hacer la exposición más inteligible, primero se propone el caso bidimensional, por lo que se supone que solo se consideran dos atributos. Si el límite simultáneo para la pobreza se representa mediante la línea Z en la Figura 1, las unidades de análisis "pobres" en este caso bidimensional son las asociadas con vectores (*i.e.* puntos) X_i que están dentro del triángulo OAB.

Figura 1. Representación de una línea de pobreza bidimensional.



Fuente: Elaboración propia (2010).

Si el punto X_i está más cerca de O, eso significa que representa a una unidad más pobre. Más aún, cuando se hace coincidir la línea de pobreza con la horizontal, un punto más alto en el dibujo implica menos pobreza. Creemos que ésta es una forma bastante intuitiva de interpretar la representación gráfica propuesta. Nótese que hay puntos no pobres con todas sus coordenadas por debajo de los límites unidimensionales. De ahí que, en un estudio de este tipo, no sea conveniente elegir límites unidimensionales muy bajos, aunque el investigador debe elegir dichos límites en función del tipo de análisis que desee realizar.

El caso bidimensional es especialmente interesante porque responde a una conocida aspiración: mostrar en cada variable (cada coordenada) la agregación respectiva de los indicadores de ingresos y del resto, como proponían Bourguignon y Chakravarty (2003). Lógicamente, en el caso n-dimensional, más difícil de visualizar, la línea es reemplazada por un hiperplano, que sigue dividiendo el espacio en dos partes disjuntas; el interés aquí es poder incluir en el estudio tantas variables como se decida.

2.2. Cálculo del hiperplano de pobreza

Para obtener el hiperplano de pobreza, se propone un nuevo algoritmo llamado "Elegir el Hiperplano de Pobreza" (EHP). Ya que esta sección es quizá excesivamente técnica para una primera lectura del artículo, se sugiere al lector continuar en la sección 3.3 y volver a este punto más tarde, si lo encuentra conveniente. Por cada unidad de análisis se tiene una n-upla (que puede ser vista como vector o punto de R^n) y estos puntos permiten calcular el hiperplano de pobreza. A continuación se describe el algoritmo:

PROBLEMA: elegir el hiperplano de pobreza (EHP).
DATOS: una *n-upla* (asociada con un punto de R^n) por unidad de análisis.
PREGUNTA: ¿cuál es el hiperplano de pobreza?

En el algoritmo EHP se hace uso de otros dos algoritmos: COMPROBAR (para ver si un hiperplano reúne ciertas características) y REBAJAR (modificar las condiciones iniciales cuando no es posible construir un hiperplano de pobreza). A continuación enunciamos los algoritmos COMPROBAR y REBAJAR:

PROBLEMA: comprobar si *H* es hiperplano de pobreza (COMPROBAR).
DATOS: *n* puntos de R^n.
PREGUNTA: ¿el *H* que pasa por los *n* puntos es un hiperplano de pobreza?

PROBLEMA: "rebajar" las condiciones de cada característica elegida (REBAJAR).
DATOS: una *n-upla* (asociada con un punto del espacio afín R^n) por cada unidad de análisis y *k n-uplas* consideradas "medianas".
PREGUNTA: ¿cuáles son las siguientes unidades de análisis que deberían añadirse a las *k* dadas para obtener un posible hiperplano de pobreza?

A continuación se describe paso a paso el algoritmo COMPROBAR:

Paso 1. Considérense *n* puntos del espacio afín R^n. Fíjese uno de ellos (por ejemplo, el 1º) y réstense de sus coordenadas las coordenadas del resto de puntos. Así, se obtienen las coordenadas de $n–1$ vectores, con las que construir una matriz que los tiene como columnas. Si el rango de la matriz es $n–1$, los puntos son afínmente independientes y se va paso 2; en caso contrario, son dependientes y se va al paso 4.

Paso 2. Se tienen *n* puntos afínmente independientes en el espacio R^n. Calcúlese la ecuación implícita del hiperplano que pasa por los *n* puntos dados y se va al paso 3.

Paso 3. Si $a_1x_1+...+a_2x_2+...+a_nx_n + b = 0$ es el hiperplano obtenido en el paso 2, compruébese si $a_1,a_2,...,a_n$ son todos positivos y $b<0$. En tal caso, se va al paso 5; en caso contrario, se va al paso 4.

Paso 4. No se tiene un hiperplano de pobreza, por lo que hay que aplicar el algoritmo REBAJAR; se va al paso 6.

Paso 5. El *H* determinado en el paso 2 es un hiperplano de pobreza; se va al paso 6.

Paso 6. FIN.

A continuación se describe el algoritmo REBAJAR. En él se toma un porcentaje de la mediana (en cada componente) de los puntos del estudio (se considera el mismo porcentaje para todas las medianas) para obtener más puntos (distintos de los del paso 2 del algoritmo EHP) afínmente independientes y que definan un hiperplano de pobreza. Los pasos del algoritmo REBAJAR son:

Paso 1. Llámese m_i a la mediana de la *i*-ésima variable y $M=(m_1,m_2,...,m_n)$. Réstense de *M* cada una de las *k n-uplas* "medianas" y divídase cada componente de la diferencia por el correspondiente m_i. Llámese *d* al mayor valor obtenido y se va al paso 2.

Paso 2. Incrementando progresivamente *d*, elíjanse aquellos puntos del estudio cuya coordenada *i*-ésima esté entre $m_i·(1-d)$ y m_i para cada $i=1,...,n$. Nótese que no es muy recomendable elegir valores grandes para *d*; un $d=0,5$ significaría elegir un 50% de la mediana en cada variable y esto sería similar a usar el hiperplano determinado por $C=\{(m_1,0,...,0),(0,m_2,0,...,0),...,(0,...,0,m_n)\}$, lejos de la recomendación del paso 7 del algoritmo EHP: $C=\{(2m_1,0,...,0),(0,2m_2,0,...,0),...,(0,...,0,2m_n)\}$.

Paso 3. Si $k<n$ y se ha elegido exactamente $n–k$ nuevos puntos, se va al paso 4. Si $k<n$ y aún no se tiene $n-k$ nuevos puntos (o si se necesita más de *n* puntos), se va al paso 2.

Paso 4. Se ha elegido suficientes puntos (es decir, unidades de análisis) que añadir a las consideradas "medianas".

Paso 5. FIN.

Finalmente, se describe el algoritmo EHP, que elige un hiperplano de pobreza para usar en el estudio:

Paso 1. Compruébese si las n características de la pobreza son las mismas (y han sido medidas de forma similar) para cada unidad de análisis del estudio y si todas ellas han sido relativizadas, normalizadas y tienen una relación inversa con la pobreza. Tal vez sea necesario modificar algunas variables de acuerdo con las transformaciones explicadas al final de la sección 2.2. En cualquier caso, con las n características elegidas, se construye una *n-upla* (por cada unidad de análisis) que se asocia con un punto de R^n. Ordénense, conforme al orden lexicográfico, los puntos obtenidos.

Definición. Dados dos puntos del espacio afín R^n, $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ y $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, se denota por < al orden lexicográfico. Se dice que $A<B$ si y solo si $a_1<b_1$ o existe un $j\in\{1,\dots,n\}$ tal que $a_i=b_i\ \forall\, i<j$ y $a_j<b_j$. Análogamente, si C y D son dos conjuntos de puntos de R^n, se define $C<D$ cuando $A<B\ \forall A\in C,\ \forall B\in D$. Con esta definición concluye el paso de *preparación de datos* y se va al paso 2.

Paso 2. Calcúlese la mediana para cada variable elegida en el estudio. Llámese m_i a la mediana de la variable i-ésima del estudio; se va al paso 3.

Paso 3. Aplíquese REBAJAR, obteniendo un conjunto C con n o más elementos.

Paso 4. Aplíquese el algoritmo COMPROBAR a los n primeros elementos de C. Si no se tiene un hiperplano de pobreza, se va al paso 5; en caso contrario, se va al paso 8.

Paso 5. Compruébese si hay más combinaciones posibles de n unidades de análisis de C que den otro hiperplano. Si hay otras, se va al paso siguente. Si no, compruébese si se han usado ya todas las unidades de análisis; si no se han usado todas, se vuelve al paso 3; de lo contrario, se va al paso 7.

Paso 6. Ordénese C por la permutación siguiente a la última aplicada y se va al paso 4.

Paso 7. Defínase $C=\{(2m_1,0,\dots,0),(0,2m_2,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,2m_n)\}$. Calcúlese la ecuación implícita del hiperplano que pasa por todos los puntos de C; éste es el hiperplano de pobreza. Este paso es necesario para asegurar la existencia del hiperplano de pobreza, sobre todo en el caso en que se tenga un conjunto de n puntos no comparables.

Paso 8. Se ha determinado el hiperplano de pobreza. FIN.

Lema. Existe un único hiperplano de pobreza construido a partir del algoritmo anterior.

Definición. Se denomina *posible hiperplano de pobreza* a cualquiera que verifique que $b<0$ y $a_i>0\ \forall i$.

Por el algoritmo COMPROBAR, también se tiene la siguiente afirmación:

Lema. El hiperplano que se obtiene al aplicar el algoritmo EHP es un posible hiperplano de pobreza.

Proposición. Los n puntos que definen un hiperplano de pobreza son no comparables. Esto significa que ningún punto puede tener todas sus coordenadas mayores que las de otro punto. Consecuentemente, ningún par de puntos de un hiperplano de pobreza es comparable.

La demostración del enunciado anterior es simple, partiendo de las ecuaciones de los hiperplanos. También es fácil comprobar las siguientes propiedades:

Lema. Sea H el hiperplano $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b=0$. Si H corta a los ejes de coordenadas, OX_i, en sus partes positivas, entonces H tiene una ecuación tal que $H(O)<0$ y $a_i>0\ \forall i=1, 2, \dots, n$.

Corolario. En las condiciones del Lema 3.6, *H(O)<0* si y solo si *b<0*. Así, *b<0* para cada hiperplano de pobreza.

Corolario. El hiperplano $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$, con *b<0,* corta a los ejes coordenados en puntos de coordenadas no negativas si y solo si $a_i > 0 \ \forall\ i = 1, 2, ..., n$.

Proposición. Sean el hiperplano de pobreza *H* y un punto $P \in R^n$ cuyas coodenadas son no negativas (esta condición la verifican todos los puntos del estudio). Si *H(P)<0* (con H(P)= $a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n + b$) y $P \neq 0$, entonces *d(O,H)>d(P,H)*.

Esto es, *O* es el punto más alejado del hiperplano de cuantos están “por debajo” del mismo y con coordenadas no negativas. Además, *H(P)<0* para cada *P* “por debajo” de *H*. La ecuación del hiperplano de pobreza toma valores negativos en los puntos “por debajo” de dicho hiperplano y solo en esos puntos.

2.3. Propiedades de un indicador multidimensional de pobreza

Como puede deducirse de la sección anterior, el hiperplano de pobreza determinado por el algoritmo EHP separa las unidades de análisis pobres de las no pobres, aunque todavía no se ha definido un indicador de pobreza. En esta sección se recuerdan los axiomas que debe verificar una “buena” medida multidimensional de la pobreza.

Un indicador multidimensional de la pobreza es una función $I: R^n_+ xZ \rightarrow R_+$; para cada $X \in R^n_+$, *I(X,Z)* da el nivel de pobreza asociado con el vector *X* y el umbral *Z*. Puede suponerse que *I* satisface ciertos axiomas. Algunos de ellos son: el focal (AxF), el de monotonía (AxM), el de transferencia débil (AxTD), el de simetría (AxS), el de continuidad (AxC) y el de normalidad (AxN). Estos axiomas son muy conocidos por los investigadores en temas de pobreza; puede encontrarse una descripción formal de los mismos en Bourguignon y Chakravarty (2003). Estas versiones de los axiomas son generalizaciones directas de los unidimensionales (Sen, 1992). Para un análisis crítico de las propiedades en el caso unidimensional, se pueden consultar, entre otros, Chakravarty (1990), Donalson y Weymark (1986) y Zheng (1997).

2.4. Indicador geométrico de pobreza (IGP)

A continuación se define el IGP. Éste evalúa al mismo tiempo diferentes características de la pobreza y proporciona una fácil interpretación geométrica. Además, puede ser adaptado para medir otros fenómenos multidimensionales estudiados por las Ciencias Sociales, no necesariamente relacionados con la pobreza.

Sean el hiperplano de pobreza *H* obtenido y un punto del estudio, $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ (luego *P* no es el origen y sus coordenadas son no negativas), donde p_j es el valor de la variable x_j para la unidad, ciudad o zona representada por *P*. Denótese por *H(P)* la posición del punto *P* con respecto al hiperplano *H*. El indicador geométrico de pobreza, representado por *IGP(P,H)*, se define como: $IGP(P,H)=\begin{cases} d(P,H) & if \quad H(P)<0 \\ 0 & if \quad H(P)\geq 0 \end{cases}$, donde *d(P,H)* es la distancia euclídea del punto *P* al hiperplano *H*. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se pueden enunciar las siguientes propiedades del IGP (en las que se considera fijo *H*):

Proposición. Si *IGP(P,H)=IGP (P’,H)>0*, entonces existe un posible hiperplano de pobreza pasando por *P* y por *P’* (dicho hiperplano puede tomarse paralelo a *H*).

Proposición. El hiperplano de pobreza es invariante a los cambios en las unidades de análisis que están sobre dicho hiperplano (aquellos *P* en los que *H(P)* > 0).

Proposición. Sea P una unidad de análisis en la que alguna de sus n componentes decrece, entonces el valor del IGP aumenta en P.

Proposición. Sean dos unidades de análisis, P_1 y P_2, tales que $H(P_i)<0 \; \forall \; i=1,2$, y considérese la j-ésima variable. Si parte del valor de la j-ésima componente de P_1 va a la j-ésima componente de P_2, entonces $IGP(P_1)$ se incrementa y $IGP(P_2)$ decrece.

En particular, si se produce alguna transferencia de renta entre dos unidades de análisis, entonces el IGP (calculado para un hiperplano fijo) reduce su valor en la unidad de análisis que recibe la renta e incrementa su valor en la unidad que la aporta.

Proposición. El IGP es independiente del orden en el que se consideran las unidades de análisis.

Nótese que este tipo de cambio de orden sí puede afectar a la definición del hiperplano de pobreza H.

Proposición. Fijado el hiperplano de pobreza, el IGP es continuo en sus n variables y en todo su dominio.

Consiguientemente, pequeños cambios en los datos puede producir solo pequeñas modificaciones en los valores del IGP. Aunque se permitan cambios en el hiperplano H, tampoco los cambios en el IGP son significativos.

Proposición. Sean P una unidad de análisis y H y H' dos hiperplanos de pobreza paralelos tales que $H<H'$. Entonces $IGP(P,H)<IGP(P,H')$.

Nótese que, si se consideran las versiones apropiadas, para variables multidimensionales y datos agregados, se acaba de comprobar que el IGP verifica algunos de los más relevantes axiomas de Sen: AxF, AxM, AxTD, AxC, AxS y AxN.

3. Dos ejemplos empíricos

3.1. Provincia de Sevilla

Primero se ilustrará el uso del IGP con el análisis de la pobreza en una región relativamente rica (Andalucía, en España), aunque sea considerada "zona preferente" por la Unión Europea: la provincia de Sevilla. Para este ejemplo, se han elegido tres variables, o dimensiones de la pobreza, así que se trabaja en el espacio afín $\boldsymbol{R}^3$.

Por supuesto, no se puede elegir cualquier variable para un estudio de pobreza; el investigador debería saber algo *a priori* sobre sus características y la conveniencia o no de utilizarlas. Como se verá, las variables de este ejemplo particular están relacionadas con la pobreza, pero debe admitirse que no son las más idóneas (al menos, en opinión de los autores). En concreto, las variables seleccionadas aquí, para ilustrar el método, son: R (el valor r_i es la renta media en el municipio i-ésimo); U (el valor u_i es el paro registrado en el municipio i-ésimo); V (el valor v_i es el número de vehículos matriculados en el municipio i-ésimo).

Todos los datos utilizados proceden de IEA (2001). Las variables R, U y V están normalizadas, aunque U es una *variable positiva*, así que se ha de realizar la transformación de la variable U mediante la siguiente función: $f(u_i) = \max_{j \in I} u_j - u_i$, donde I es el conjunto de todos los municipios de Sevilla (en este caso, $I=\{1,2,\dots,105\}$). No debe preocupar que las variables no sean independientes o que no tengan una misma importancia en el estudio, pues esto no es un problema para aplicar este método. En cuanto a la variable renta media, conviene recordar que suele ser un resumen muy pobre de la situación; el paro admitiría una explicación mucho más detallada; y la posesión de un vehículo puede ser el resultado de insuficiencia de recursos o de decisiones individuales.

A pesar de las inconveniencias destacadas para las variables, se ha elegido este ejemplo para mostrar que, incluso en zonas desarrolladas, no siempre es fácil tener datos fiables (simultáneamente, para todas las unidades de análisis) para estudiar los aspectos o características deseadas por el investigador; también, se comprueba que este método funciona incluso con variables de naturaleza muy diversa. De hecho, cuanto mayor sea el número de variables incluidas en el análisis, mejores serán los resultados finales.

Aquí, cada municipio de la provincia de Sevilla es representado por un punto, $P_i=(r_i, u_i, v_i)$, de $\boldsymbol{R}^3$. Si se aplica el algoritmo EHP a todos estos puntos, se buscan los municipios cuyas coordenadas son iguales a las medianas de las respectivas variables. En este ejemplo no es posible encontrar tres ciudades en esa situación, luego hay que aplicar el algoritmo REBAJAR hasta encontrar un subconjunto con más de dos municipios y que defina un posible hiperplano de pobreza. Cuando se ejecuta el algoritmo EHP, se obtiene el subconjunto de municipios de la Tabla I; en concreto, el algoritmo EHP elige aquí aquellos municipios cuyos valores para las variables *R*, *U* y *V* están entre el 90% de la mediana de cada variable y el propio valor de cada mediana.

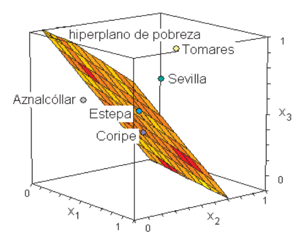
Si x_1, x_2 y x_3 son utilizadas, respectivamente, para representar *renta*, *paro* y *vehículos*, se obtiene el siguiente hiperplano de pobreza *H*: $417420x_1+198244x_2+1645580x_3-1824083{,}19=0$; así que se fija *H* como umbral de pobreza para la provincia de Sevilla. La Figura 2 muestra cuán visual es el IGP en este caso.

Tabla I. Municipios "medianos" para el 90% de las medianas en Sevilla (España, año 2000).

Municipios	Datos normalizados		
	Renta media	Paro	Vehículos
Gerena	0,5415	0,3308	0,5726
Marchena	0,5383	0,3489	0,5675
Arahal	0,5348	0,3562	0,5437
Cantillana	0,5339	0,3577	0,5368
Valverde del Río	0,5018	0,3585	0,5493

Fuente: Elaboración propia (2010).

Figura 2. Representación gráfica de un plano de pobreza (con 5 municipios de Sevilla, año 2000).



Fuente: Elaboración propia (2010).

Para el umbral de pobreza *H*, se obtienen los valores del IGP de la Tabla II. Los municipios de la provincia de Sevilla que no están en la lista son aquellos "sobre" el umbral, es decir, los que tiene un valor nulo del IGP.

En el ejemplo mostrado, el municipio más pobre de Sevilla resultó ser Aznalcóllar, probablemente porque los datos reflejaban el grave desastre ambiental de 1999, que provocó la pérdida de empleos y de renta.

3.2. Países africanos

A continuación se muestra otro ejemplo de la aplicación del IGP, esta vez para países

Tabla II. Valores del IGP para los municipios de Sevilla con el umbral *H* (año 2000).

Municipios	IGP
Alcolea del Río	0,0140
Algaba	0,0311
Algámitas	0,1501
Almadén	0,0081
Aznalcóllar	0,1998
Benacazón	0,0899
Burguillos	0,0616
Cañada del Rosal	0,0165
Castilblanco de los Arroyos	0,0729
Castilleja del Campo	0,0661
El Cuervo	0,0662
El Madroño	0,1163
El Pedroso	0,0338
El Real de la Jara	0,0173
El Ronquillo	0,1160
Garrobo	0,0100
Gerena	0,0410
La Puebla de Cazalla	0,0419
Las Navas de la Concepción	0,0677
Los Molares	0,0684
Paradas	0,0270
Pedrera	0,0574
Pruna	0,0535
San Juan de Aznalfarache	0,0413
San Nicolás del Puerto	0,0184
Santiponce	0,0731
Valverde del Río	0,0789
Villanueva de San Juan	0,0386
Villanueva del Río	0,0270
Total de "municipios pobres"	**29**

Fuente: Elaboración propia (2010).

africanos (de los países más pobres del mundo). Para este caso, se han elegido cuatro variables o dimensiones de la pobreza, por lo que se trabaja en $\boldsymbol{R}^4$. Para simplificar la exposición, no se discutirá el paso de selección de las variables elegidas: tasa de mortalidad infantil (hasta 5 años) por cada 1.000 habitantes; esperanza de vida al nacer; Producto Interior Bruto *per capita* (en dólares USA constantes de 1995); líneas telefónicas en el país por cada 1.000 habitantes. Los datos proceden de WDI (2007).

Nótese que tanto las variables como el tipo de unidades de análisis son radicalmente distintos de los del ejemplo anterior, lo que da una idea de la flexibilidad de la técnica propuesta. Si se aplica el algoritmo EHP a este caso, deberían elegirse países cuyas 4 coordenadas estuvieran entre un porcentaje de la mediana de cada variable y la propia mediana. De este modo, se obtiene el hiperplano definido por los países de la Tabla III.

Concretamente, el hiperplano de pobreza que determinan es *H'*: $31{,}08\ x_1+6{,}71\ x_2+1{,}64\ x_3+2{,}43\ x_4-61{,}11=0$, donde x_1, x_2, x_3, y x_4 representan, respectivamente, la *mortalidad infantil*, la *esperanza de vida*, el *PIB* y los *teléfonos*. *H'* es, entonces, el umbral de pobreza para los países africanos, y es determinado por Tanzania, Guinea-Bissau, Nigeria y Zambia (Tabla III). Finalmente, a partir del *H'* se determina el valor del IGP en cada país; los valores no nulos del IGP pueden consultarse en la Tabla IV.

Es conveniente recordar que los países de la Tabla IV son los más pobres de entre los pobres. De hecho, estos resultados coinciden con la opinión general del G8 (grupo de los siete países más industrializados y Rusia). En su encuentro en Gleneagles (Escocia) en junio de 2005, en el que se analizó el mismo fenó-

Tabla III. Países africanos para construir el hiperplano de pobreza (año 2005).

	Datos normalizados			
Países	**Tasa de mortalidad**	**Esperanza de vida**	**PIB**	**Teléfonos**
Guinea-Bissau	211	45,4146	161,6156	8,9361
Nigeria	201	45,3365	248,1672	5,8461
Tanzania	165	43,0878	207,1359	4,6914
Zambia	182	36,9414	422,2886	8,1969

Fuente: Elaboración propia (2010).

Tabla IV. Valores del IGP para los países africanos con el umbral *H'* calculado en el ejemplo de la sección 4.2 (año 2005).

Países	IGP
Burkina Faso	0,00883
Burundi	0,02866
Chad	0,00443
Congo, Rep. Dem.	0,02888
Etiopía	0,00901
Liberia	0,02786
Malawi	0,01953
Mali	0,01865
Mayotte	0,01961
Mozambique	0,01982
Níger	0,03457
República Centroafricana	0,00731
Ruanda	0,02329
Sierra Leona	0,06289
Somalia	0,00731
Total de países "pobres"	**15**

Fuente: Elaboración propia (2010).

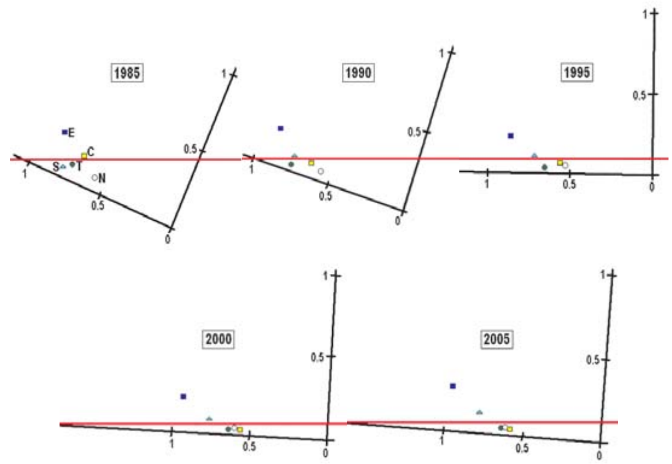
meno que en este ejemplo, el G8 decidió que el FMI, el Banco Mundial y el *African Development Bank* cancelaran la deuda de algunos países pobres sin conflictos armados; muchos de estos países están en la Tabla IV.

Para terminar el ejemplo, se propone una aplicación del IGP para medir la evolución de la pobreza. Otra vez se utilizan datos africanos procedentes de WDI (2007), pero eligiendo solo dos variables: el PIB *per capita* (en dólares americanos corrientes) y la esperanza de vida (en años). Nótese que la primera es una variable monetaria y la segunda es no monetaria. El análisis sería más completo si se utilizaran (como variables de entrada) dos indicadores: uno monetario y otro no monetario; sin embargo, la explicación sería algo más larga y pesada. En la Figura 3 se muestran los resultados para 5 países seleccionados; la altura de cada punto en el gráfico da la evolución de la pobreza en esa unidad de análisis. El caso de Sudán es bastante representativo de un país que experimenta una mejora en sus indicadores de pobreza, aunque haya que ser cauteloso al interpretar los datos, marcados por la influencia del petróleo y el oro en el PIB y por la escasez de fiabilidad en los períodos bélicos; además, la economía sudanesa es una de las de mayor crecimiento del mundo por sus grandes relaciones comerciales con China (China obtiene aproximadamente un 10% de su petróleo de Sudán y es, a su vez, el mayor proveedor de armas del país africano).

4. Conclusiones

Este artículo trata sobre la construcción de una medida multidimensional de la pobre-

Figura 3. Evolución (1985-2005) de 5 países africanos (C=Rep. Dem. Congo; E=Egipto; N=Níger; S=Sudán; T=Tanzania), usando una línea de pobreza bidimensional.



Fuente: Elaboración propia (2010).
La variación de la distancia con respecto a la línea horizontal refleja la pobreza de cada país con el paso de los años; puntos sobre la línea son considerados no pobres, mientras que los de debajo son pobres. Cuanto más alto esté un punto en el gráfico significa menos pobreza.

za. En concreto, se define un indicador que permite dividir las unidades de análisis en dos grupos (pobres y no pobres) y dar una puntuación a cada unidad de análisis (ciudades, familias, individuos, etc.) que se considere pobre. Se comprueba que el IGP posee algunas características interesantes para su aplicación a estudios de pobreza en diferentes regiones, ya que no es muy restrictivo acerca del número o naturaleza de las variables utilizadas. De acuerdo con las pruebas realizadas por los autores, es posible proponer el uso de este indicador para medir otros fenómenos multidimensionales.

A modo de ejemplos sencillos, se han detectado los municipios más pobres de la provincia de Sevilla (en España) y se han valorado, de un modo bastante intuitivo, la incidencia y la evolución de la pobreza en algunos países africanos. Los resultados obtenidos no solo parecen fácilmente interpretables sino que son similares a los dados por algunos prestigiosos estudios. Además, la inclusión de variables no monetarias permite numerosas intervenciones, distintas de los habituales programas de apoyo económico; esto es particularmente importante para la provincia de Sevilla, donde el problema de la pobreza se suele afrontar exclusivamente con transferencias de renta.

En resumen, el comportamiento del IGP es bastante bueno y responde a las expectativas de medir la pobreza de un modo multidimensional. Para bajas dimensiones, además, se proporciona un modo gráfico, intuitivo y fácil de interpretar para valorar la evolución de la pobreza, considerando características complementarias.

Bibliografía citada

Atkinson, Anthony B. (1987). "On the Measurement of Poverty". **Econometrita**. Vol. 55, No. 4. Pp. 749-764.

Bourguignon, François J. y Chakravarty, Satya R. (2003). "The measurement of multidimensional poverty". **Journal of Economic Inequality**. Vol. 1. Pp. 25-49.

Brandolini, Andrea (2008). "On Applying Synthetic Indices of Multidimensional Well-Being: Health and Income Inequalities in Selected EU Countries", **Bank of Italy Temi di Discussione** (Working Paper). No. 668.

Chakravarty, Satya (1990). **Ethical Social Index Numbers**. Londres. Springer-Verlag.

Donalson, David y Weymark, John A. (1986). Properties of fixed population poverty indices. **International Economic Review**. Vol. 27. Pp. 667-688.

Duclos, Jean Y., Sahn, David y Younger, Stephen D. (2006). "Robust multidimensional poverty comparisons". **Economic Journal**. Vol. 116, No. 514. Pp. 943-968.

Foster, James E. y Shorrocks, Anthony F. (1988). "Inequality and poverty orderings". **European Econometric Review**. Vol. 32. Pp. 654-662.

IEA (2001). **Municipios andaluces. Datos básicos 2001**. Sevilla. Instituto de Estadística de Andalucía. Disponible en: http://www.juntadeandalucia.es/ institutodeestadisticaycartografia/ dtbas/index2.htm

Linting, Mariëlle, Meulman, Jacqueline J., Groenen, Patrick J. y Van Der Koojj, Anita J. (2007). "Nonlinear principal components analysis: introduction and application". **Psychological Methods**. Vol. 12, No. 3. Pp. 336-358.

Mahalanobis, Prasanta C. (1936). "On the generalized distance in statistics". **Proceedings of National Academy of Science of India**. Vol. 12. Pp. 49-55.

Nolan, Brian y Whelan, Cristopher T. (1996). **Resources, deprivation and poverty**. Oxford. Clarendon Press.

Pena-Trapero, Bernardo (1977). **Problemas de la medición del bienestar y conceptos afines: una aplicación al caso español**. Madrid. INE.

Perry, Bryan (2002). "The mismatch between income measures and direct outcome measures of poverty". **Social Policy J. of New Zeland**. Vol. 19. Pp. 101-127.

Poza, Carlos y Fernández, José A. (2011). "¿Qué factores explican la pobreza multidimensional en España? Una aproximación a través de los modelos de ecuaciones estructurales". **Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa**. Vol. 12. Pp. 81-110.

Ringen, Stein (1988). "Direct and indirect measures of poverty". **Journal of Social Policy**. Vol. 17. Pp. 351-365.

Sen, Amartya K. (1992). **Inequality Reexamined**. Cambridge. Harvard University Press.

Sen, Amartya K. (1996). "Poverty: An ordinal approach to measurement". **Econometrica**. Vol. 44, No. 2. Pp. 219-231.

Townsend, Peter (1979). **Poverty in the United Kingdom**. Harmondsworth. Penguin.

UNDP (1997). **Human Development Report 1997**. Nueva York. Oxford Univ. Press.

WDI (2007). **World Development Indicators**. Washington. The World Bank.

Zarzosa-Espina, Pilar (1996). "Aproximación a la medición del bienestar social: idoneidad del indicador sintético Distancia-P(2)". **Cuadernos de Economía**. Vol. 24, No. 68. Pp. 139-163.

Zheng, Binhai (1997). "Aggregate poverty measures". **Journal of Economic Surveys**. Vol. 11, No. 2. Pp. 123-162.