Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación
ISSN: 2027-1174
revistascientificasjaveriana@gmail.com
Pontificia Universidad Javeriana
Colombia

Samper, Carmen; Cepeda-Buitrago, Leidy Marcela; Vargas-Guerrero, Claudia Marcela
Descubrir un hecho geométrico: ¿mayor conocimiento implica mejor desempeño?
Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, vol. 7, núm. 15, enero-junio, 2015, pp. 33-48
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Descubrir un hecho geométrico: *¿mayor conocimiento implica mejor desempeño?*

magis 2
VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Discovering a Geometric Fact: Greater Knowledge Implies Better Performance?

Découvrir un fait géométrique : une plus grande connaissance implique-t-elle un meilleur exercice?

Descobrir um fato geométrico: ¿Maior conhecimento implica melhor desempenho?

Fecha de recepción: 29 DE SEPTIEMBRE DE 2012 / Fecha de aceptación: 21 DE ABRIL DE 2014 / Fecha de disponibilidad en línea: 15 DE MARZO DE 2015

Encuentre este artículo en http://magisinvestigacioneducacion.javeriana.edu.co/

doi:10.11144/Javeriana.m7-14.dhgm

Escrito por Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
carmensamper@gmail.com

Leidy Marcela Cepeda-Buitrago
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
marcela0104@gmail.com

Claudia Marcela Vargas-Guerrero
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia
claudiavargas90@gmail.com

Resumen

Este artículo se deriva de la investigación *Aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana con el apoyo de un programa de geometría dinámica*. Se analizan cambios en el comportamiento racional de un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas cuando resuelven el mismo problema, en dos momentos diferentes de su formación. Se realizó un estudio de caso de tipo descriptivo-interpretativo de las interacciones de los estudiantes durante cada proceso de resolución. El enfoque está en el uso que les dan a las representaciones gráficas durante ese proceso. Se concluye que el comportamiento racional de los estudiantes en los dos momentos es similar, pero en el segundo momento, tal vez debido a una mayor exigencia en los aspectos formales de la matemática, la exploración se modificó.

Palabras clave descriptor

Geometría, visualización, razonamiento.

Transferencia a la práctica

Este estudio busca contribuir al avance de las investigaciones en torno al aprendizaje de la demostración y aportar a la reflexión sobre los procesos involucrados cuando los estudiantes resuelven una tarea. Adicionalmente, busca proveer evidencias de que no se debe subvalorar el papel de la exploración empírica y la visualización en el aprendizaje de la geometría, pues estas acciones permiten al estudiante descubrir propiedades de los objetos geométricos y contribuyen a una mejor conceptualización de ellos.

Para citar este artículo / To cite this article / Pour citer cet article / Para citar este artigo

Samper, C.; Cepeda-Buitrago, L. M. & Vargas-Guerrero, C. M. (2015). Descubrir un hecho geométrico: ¿mayor conocimiento implica mejor desempeño? *magis*, *Revista Internacional de Investigación en Educación*, *7* (15), 33-48.

magis
PÁGINA 34
VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Key words plus
Geometry, Visualization, Reasoning.

Abstract
This article is a result of the research entitled *Learning to prove in Euclidean geometry with the support of a dynamic geometry program*. The paper analyzes the changes in the rational behavior of a group of pre-service mathematics teachers when solving the same problem in two different moments of their formation. A descriptive-interpretative case study of the interactions of students was conducted for each resolution process. The focus lies on the use that they give to graphic representations during the process. We conclude that the rational behavior of students at both moments is similar, but in the second moment, perhaps due to a greater demand on the formal aspects of mathematics, exploration was modified.

Transfer into practice
This study seeks to contribute to the advancement of research on proof learning and to provide a reflection on the processes involved when students solve a task. In addition, it seeks to provide evidence that the role of empirical exploration and visualization in the process of learning geometry should not be undervalued, as these actions enable students to discover properties of geometric objects and contribute to a better conceptualization of them.

Mots clés descripteur
Géométrie, visualisation, raisonnement.

Résumé
Cet article découle de la recherche *Apprentissage de la démonstration en géométrie euclidienne avec l'appui d'un programme de géométrie dynamique*. On analyse les changements dans le comportement rationnel d'un groupe d'étudiants de maîtrise en mathématiques lorsqu'ils ressoudent le même problème, dans deux moments différents de leur formation. On a fait une étude de cas de type descriptif-interprétatif des interactions des étudiants pendant chaque processus de résolution. Le focus est dans l'usage qu'ils attribuent aux représentations graphiques pendant ce processus. On conclut que le comportement rationnel des étudiants dans les deux moments est pareil; mais dans le deuxième moment, peut-être grâce à une plus grande exigence dans les aspects formels de la mathématique, l'exploration change.

Transfert à la pratique
Cette étude vise contribuer à l'avance de recherches sur l'apprentissage de la démonstration et apporter à la réflexion sur les processus impliqués lorsque les étudiants ressoudent une tâche. Par ailleurs, on cherche donner des évidences pour ne pas sous-estimer le rôle de l'exploration empirique et la visualisation dans l'apprentissage de la géométrie, car ces actions permettent à l'étudiant de découvrir les propriétés des objets géométriques et contribuent à une meilleure conceptualisation de ces objets.

Palavras-chave descritor
Geometria, visualização, razoamento.

Resumo
Este artigo é derivado da pesquisa *Aprendizagem da demonstração em geometria euclidiana com apoio de um programa de geometria dinâmica*. Analisam-se mudanças no comportamento racional de um grupo de discentes de licenciatura em matemáticas quando resolver o mesmo problema, em dois momentos diferentes da sua formação. Realizou-se estudo de caso de tipo descritivo-interpretativo das interações dos alunos durante cada processo de resolução. O foco está no uso que eles dão às representações gráficas durante o processo. Conclui-se que o comportamento racional dos alunos nos dois momentos é similar, mas no segundo momento, talvez devido à maior exigência nos aspectos formais da matemática, a exploração foi alterada.

Transferência para a prática
Este estudo procura contribuir ao avanço de pesquisa em torno da aprendizagem da demonstração e contribuir à reflexão sobre os processos envolvidos quando os alunos resolver uma tarefa. Além do mais, visa fornecer evidencia de que não se deve subvalorizar o papel da exploração empírica e a visualização na aprendizagem da geometria, pois estas ações permitem o aluno descobrir propriedades dos objetos geométricos e contribuem para uma melhor conceptualização daqueles.

Introducción

Este artículo, producto del trabajo de grado realizado para optar al título de Licenciatura en Matemáticas, tiene como finalidad reportar los cambios que se evidencian en la actividad demostrativa de un grupo de estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, Colombia, en dos momentos de su formación, específicamente cuando cursaban el primer y el tercer espacio académico de la línea de geometría del programa de formación. Concretamente, los cambios que se detectaron están relacionados con las acciones conscientes que realizan los estudiantes al momento de solucionar un problema y justificar esa solución, las cuales dan cuenta de su comportamiento racional, y con el papel que les dan a las representaciones gráficas, en lápiz o en geometría dinámica, al realizar la tarea.

Inicialmente, se presenta una delimitación del problema desde un punto de vista teórico y empírico. Posteriormente, se exponen los referentes teóricos relacionados con el comportamiento racional y la descripción de los aspectos metodológicos del desarrollo de este estudio. A continuación, se hace una síntesis de las acciones llevadas a cabo por el grupo de estudiantes y se muestran algunos ejemplos del análisis realizado, en busca de evidencias de evolución en el comportamiento racional. Finalmente, se consignan las conclusiones obtenidas del estudio.

Delimitación del problema

De acuerdo con Maria Alessandra Mariotti (2006), en los últimos años se han acrecentado las investigaciones orientadas a analizar los procesos de argumentación y demostración en geometría, estudiándolos desde diferentes perspectivas, como la demostración en el currículo (Healy & Hoyles, 1998; Hoyles, 1997; Knipping, 2001; Küchemann & Hoyles, 2001), las dificultades de los estudiantes en estos procesos (Duval, 1991; Fischbein & Kedem,1982; Harel & Sowder, 1996) y las intervenciones de enseñanza que contribuyen a superar estas dificultades (Camargo, Samper & Perry, 2006; Yackel & Cobb, 1996). En este último grupo, varios investigadores han estudiado el papel de los ambientes de geometría dinámica para favorecer procesos de argumentación y demostración, puesto que estos permiten dar mayor relevancia a la exploración, promover la relación entre exploración y demostración, comprobar la veracidad de un enunciado y vincular los argumentos informales con argumentos formales (Mariotti, 2006).

En 2009, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ·G), de la Universidad Pedagógica Nacional, hizo una investigación para determinar el tipo de argumentación que hacen los estudiantes entre ellos cuando realizan actividad demostrativa sin la orientación del profesor, las posibles relaciones entre las acciones de la actividad demostrativa y la elaboración de argumentos, y la formulación de implicaciones que son evidencia de que los estudiantes reconocen que un enunciado es consecuencia lógica de una teoría. Para ello, se llevó a cabo un experimento con estudiantes del curso Geometría del Espacio, del tercer semestre de la licenciatura. El análisis del proceso de resolución del problema propuesto a los estudiantes arrojó que la exploración de las representaciones realizadas en geometría dinámica no había sido completa y, por tanto, no proporcionó los elementos que les permitirían descubrir el hecho geométrico necesario para justificar su conjetura. Teniendo como hipótesis que ello pudo ser consecuencia del formalismo exigido en el

Descripción del artículo | Article description | Description de l'article | Artigo descrição
El artículo se deriva de la investigación *Aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana con el apoyo de un programa de geometría dinámica*, realizada en la Universidad Pedagógica Nacional. Presenta los resultados del análisis de algunos cambios en la actividad demostrativa de un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en dos momentos de su formación. Específicamente, los relacionados con el comportamiento racional de los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema.

curso, el grupo de investigación decidió realizar el mismo experimento, con algunas variantes, con estudiantes de primer semestre. Al notar diferencias en el uso de la representación figural, se preguntaron si su hipótesis era válida. Por ello, un año más tarde, se realizó el experimento original con algunos de los estudiantes de tercer semestre que participaron en el experimento cuando aún estaban en primer semestre. El estudio de los nuevos datos fue propuesto como trabajo de grado de la licenciatura, bajo la asesoría de un miembro del grupo de investigación, reto que aceptaron las autoras de este artículo.

Referentes teóricos

VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Para estudiar el comportamiento racional de los estudiantes al resolver un problema y determinar el apoyo que ofrecen las representaciones gráficas en ese proceso, se usaron como referentes teóricos el modelo propuesto por Paolo Boero, Nadia Douek, Francesca Morselli y Bettina Pedemonte (2010), que hace referencia al comportamiento racional según Jürgen Habermas; la definición de visualización propuesta por Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry (2006); y el constructo actividad demostrativa desarrollado por Óscar Molina, Carmen Samper, Patricia Perry y Leonor Camargo (2011). A continuación, se presenta una síntesis de estos.

Modelo de comportamiento racional de Habermas

En el modelo de Jürgen Habermas, adaptado por Paolo Boero, Nadia Douek, Francesca Morselli y Bettina Pedemonte (2010) para describir la práctica discursiva inmersa en el proceso de demostrar (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010; Perry, Molina, Camargo & Samper, 2011), se distinguen tres aspectos del comportamiento racional interrelacionados: el *epistémico*, que consiste en el control que se ejerce para que las proposiciones que se enuncian y la manera de relacionarlas obedezcan a una teoría; el *teleológico*, que hace referencia a la elección consciente de herramientas, la formulación de un plan y la determinación de las estrategias que pueden contribuir a obtener una meta; y el *comunicativo*, que consiste en la preocupación por comunicar adecuadamente argumentos, conclusiones o ideas, de acuerdo con unas normas establecidas.

Se parte de la premisa de que el uso que les dan los estudiantes a las representaciones gráficas puede ser evidencia tanto del aspecto epistémico como del teleológico. Esto porque usar la representación con el fin de obtener ideas para la justificación es un proceso enmarcado en el aspecto epistémico, pero enriquecer la figura como parte de una estrategia corresponde al aspecto teleológico.

Visualización

La visualización en geometría es un proceso de desconfiguración o reconfiguración "cuyo propósito es detectar, percibir o evocar propiedades geométricas presentes en una representación gráfica" (Camargo, Samper & Perry, 2006, p. 373). La visualización se puede realizar sobre una figura representada en papel y lápiz o con geometría dinámica. En el último caso, la manipulación de la figura favorece la visualización geométrica de esta. La visualización tiene un papel fundamental en el proceso de construcción de conocimientos geométricos, pues, como lo asegura Rina Hershkowitz (1989), "no es posible formar una imagen de un concepto y sus ejemplos, sin la visualización de sus elementos".

Actividad demostrativa

El término *actividad demostrativa* hace referencia a la conjugación de dos procesos que se llevan a cabo con el propósito de descubrir un hecho geométrico y justificarlo. El primer proceso, de *conjeturación*, consta de acciones como la visualización, la exploración y la verificación, que llevan al descubrimiento de una propiedad geométrica y su correspondiente rectificación, y la formulación de esta como una conjetura. El segundo proceso, de *justificación*, se centra principalmente en la búsqueda y articulación de elementos teóricos que validen la conjetura en el marco de una teoría (Molina, Samper, Perry & Camargo, 2011).

Metodología

Este artículo documenta un estudio de caso interpretativo, ya que se observaron las características de un grupo reducido de estudiantes con el propósito de analizar un fenómeno específico y de proporcionar evidencia respecto a los cambios que pueden surgir, de un semestre a otro, en la actividad demostrativa de estudiantes cuando resuelven un problema (Cohen & Manion, 1990). Para ello, se buscaron los referentes teóricos que permitieran caracterizar estos cambios y se realizaron transcripciones de la interacción de un grupo de estudiantes al resolver un problema geométrico, durante dos momentos de su formación.

El estudio es no participante, puesto que la actividad de los estudiantes había sucedido algunos semestres atrás y, en el momento del estudio, no se tuvo la oportunidad de comunicarse con ellos. Las transcripciones partieron de registros de audio y video suministrados por el grupo de investigación Æ·G. Una integrante del grupo de investigación acompañó a los estudiantes en calidad de observador, durante el experimento, e intervino únicamente para orientarlos, si ello era necesario, y para solicitar la aclaración de algunas de las afirmaciones que realizaban.

La primera transcripción corresponde al proceso de resolución de un problema desarrollado por tres estudiantes de primer semestre cuando cursaban Elementos de Geometría (experimento 1). La segunda corresponde a la interacción de dos de estos estudiantes al momento de solucionar el mismo problema cuando cursaban Geometría del Espacio (experimento 2).

El experimento 1 se llevó a cabo con todos los estudiantes inscritos en el curso Elementos de Geometría. Para el experimento 2, se escogieron los grupos de estudiantes que en el primer experimento habían logrado justificar su conjetura, habían demostrado un buen nivel de argumentación y estaban cursando Geometría del Espacio. El grupo que se seleccionó para este estudio se destacó porque, en el experimento 1, descubrió el hecho geométrico que se necesitaba para justificar la conjetura, mientras que los otros grupos de estudiantes lo conocían previamente y lo recordaron.

En el curso Elementos de Geometría, el acercamiento a los conceptos, relaciones y propiedades geométricas se realiza de manera informal, con el propósito de involucrar a los estudiantes en experiencias que los ayuden a construir y ampliar sus conocimientos geométricos y desarrollar competencias necesarias para estudiar un curso formal de geometría euclidiana. Por otra parte, el propósito del curso Geometría del Espacio, al igual que el de Geometría Plana (segundo curso de la línea), es conformar un sistema teórico de geometría euclidiana, incluyendo conceptos y propiedades referentes a objetos geométricos. Adicionalmente, durante estos cursos se busca fortalecer el desempeño de los estudiantes en la producción de demostraciones formales (Perry, Samper, Camargo, Molina & Echeverry, 2009).

Para analizar las acciones realizadas por los estudiantes en la solución del problema propuesto, se establecieron como categorías previas los componentes del comportamiento racional. Inicialmente, se realizó el análisis de la transcripción del segundo experimento tomando como referencia la teoría revisada respecto a este. A partir de este análisis y de lo que imaginamos podría suceder en el primer experimento, se establecieron, de manera inductiva, lo que serían los indicadores de cada categoría. Finalmente, con estos indicadores se analizó la transcripción de la actividad de los estudiantes durante el primer experimento.

Tabla 1

Categorías de análisis e indicadores

Categorías	Indicadores
Aspecto teleológico (AT)	i) Menciona propiedades geométricas que quiere explorar para determinar su utilidad en la solución del problema. ii) Propone un plan. iii) Ejecuta acciones de exploración encaminadas a resolver el problema. iv) Comprueba una conjetura, a partir de una representación gráfica. v) Extrae información sobre relaciones entre partes de una figura a partir de una representación gráfica para proponer un plan.
Aspecto epistémico (AE)	i) Menciona y relaciona hechos geométricos, teoremas o definiciones del sistema teórico con el que cuenta. ii) Hace uso de evidencia empírica. iii) Desecha una idea, a partir de una representación gráfica. iv) Extrae información sobre relaciones entre partes de una figura, a partir de una representación gráfica para justificar ideas.
Aspecto comunicativo (AC)	i) Discute acerca de la forma de expresar la conjetura. ii) Menciona el uso correcto de notaciones, convenios y términos matemáticos. iii) Cuestiona el uso de términos dinámicos en la formulación final de la conjetura, es decir, expresiones que hacen alusión al movimiento realizado durante la exploración con geometría dinámica, como "siempre" o "bajo el arrastre se mantiene". iv) Hace mención del uso de algún cuantificador.

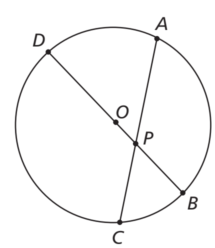
Fuente: elaboración propia

Contexto de la situación analizada

En el primer experimento, al grupo de estudiantes conformado por Camila, Daniel y Pilar[1] se les pidió resolver el siguiente problema:

Se tiene una circunferencia con centro en el punto O, y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son dos cuerdas cualesquiera de la misma circunferencia que contienen este punto P. ¿En qué casos se tiene que $\frac{AP}{BP} > \frac{DP}{CP}$*?*[2]

Figura 1



Fuente: elaboración propia

1 Nombres ficticios.

2 *AP* denota la distancia del punto *A* al punto *P*.

magis PÁGINA 38 VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Ellos contaban con dos calculadoras graficadoras que tienen incorporado el programa Cabri, como recurso para la exploración, y papel y lápiz para consignar ideas. En el segundo experimento, solo conformaban el grupo Camila y Daniel, y tenían los mismos recursos. El problema que ellos tenían que resolver es en esencia igual al anterior, pero redactado de forma diferente:

Construya una circunferencia con centro en C y un punto fijo en P en el interior de esta circunferencia. ¿Para qué cuerda AB, de la misma circunferencia, que contenga este punto P se tiene que el producto AP por BP es máximo?

Las diferencias en el enunciado se deben a que para su formulación se tuvo en cuenta el conocimiento teórico que tenían, en cada experimento, los estudiantes. En ambos casos, se esperaba que los estudiantes establecieran como conjetura que el cociente o el producto, según el caso, es constante; también se pretendía que reconocieran la existencia de triángulos semejantes y que descubrieran el teorema según el cual, en una circunferencia, los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes. Es decir, en ambos casos debían justificar su conjetura pero en el primero solo se esperaba un argumento informal, mientras que en el segundo se pretendía que construyeran una demostración, no solo de la conjetura sino del teorema que debían descubrir. Además, una exigencia adicional en el segundo experimento era que los estudiantes descubrieran la necesidad de tener dos cuerdas para poder expresar la conjetura y tratar de demostrarla.

Breve descripción del proceso de solución realizado en cada experimento

En el primer experimento, Camila anticipa, sin haber hecho una representación gráfica, que si *P* fuera centro de la circunferencia, las razones serían iguales. Pero Pilar le hace caer en cuenta de que *P* es cualquier punto. Posteriormente, proceden a realizar la construcción usando Cabri. Durante buena parte del tiempo, Daniel y Pilar manejan las calculadoras. Para realizar la primera representación, ambos estudiantes construyen dos cuerdas *AC* y *DB* y denotan con *P* el punto de intersección. A continuación, Daniel arrastra el punto *D* sobre la circunferencia, sin advertir que de esa manera el punto P deja de ser fijo. Posteriormente, ambos estudiantes miden la distancia desde cada extremo de cada cuerda hasta el punto *P*, y arrastran este punto para que perceptualmente coincida con el centro de la circunferencia. Con esta acción, comprueban la anticipación de Camila. Inmediatamente, reconocen la necesidad de explorar qué pasa cuando *P* no es el centro de la circunferencia, y para ello empiezan a arrastrar el punto *P*. La observadora interviene para pedirles que relean el problema, y ellos se dan cuenta de que en su construcción *P* no es un punto fijo. Luego de proponer varias formas fallidas de realizar una construcción que cumpla las condiciones, la observadora les indica que deben construir rectas que contengan el punto P y luego la cuerda que estas determinan. Realizan la construcción correcta, exploran la situación tomando las medidas correspondientes y arrastrando un extremo de una de las cuerdas sobre la circunferencia, concluyen que las razones siempre son iguales. Posteriormente, reportan los pasos de la construcción y la conjetura.

Luego de formular su conjetura y cuestionarse sobre posibles elementos teóricos que expliquen la invariancia, mencionan la semejanza de triángulos y estudian dos triángulos que, perceptualmente, parecen isósceles y semejantes. Descartan la primera propiedad debido a que no siempre se ve esta configuración en la figura, evidencia que provee la representación con geometría dinámica.

No obstante, su exploración se dirige a encontrar triángulos semejantes para garantizar la proporcionalidad. Mencionan que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes y, en consonancia con ello y el criterio de semejanza ángulo-ángulo, que es el que quieren usar, centran su actividad en tratar de comprobar la congruencia de otro par de ángulos. Después de varios intentos en los que se refieren a propiedades entre elementos, que, perceptualmente, parecen pertinentes y válidas, como la existencia de segmentos paralelos, de un cuadrilátero especial o de un ángulo inscrito en una semicircunferencia, Pilar y Camila identifican dos ángulos congruentes resultado de haber tomado sus medidas. Con ello, identifican la correspondencia entre los triángulos semejantes. Con el propósito de justificar la congruencia de ese par de ángulos, Daniel intenta utilizar el hecho geométrico según el cual todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Este lo lleva a descubrir que, en una circunferencia, los ángulos que subtienden la misma cuerda son congruentes. Posteriormente, presentan la justificación de su conjetura en la que incluyen, para justificar la congruencia de ese par de ángulos, que es evidencia suministrada por la calculadora.

En el segundo experimento, cada estudiante da una anticipación antes de hacer la construcción. Daniel considera que el producto siempre va a ser constante, mientras que Camila cree que la cuerda para la cual el producto va a ser máximo es el diámetro. Posteriormente, realizan la construcción correcta, con geometría dinámica, de la circunferencia y una de las cuerdas. Camila propone construir otra cuerda para realizar la exploración, sugerencia que Daniel descarta indicando que ello no es necesario debido a la posibilidad de arrastre. Descubren que la anticipación de Daniel era cierta. En el momento de tratar de expresar su conjetura, se dan cuenta de la necesidad de contar con otra cuerda, la cual proceden a construir. Al igual que en el primer experimento, reconocen la necesidad de enmarcar su justificación en la teoría de semejanza de triángulos y de poder justificar la congruencia de un par de ángulos diferentes a los opuestos por el vértice. Advierten la necesidad de realizar una construcción auxiliar para encontrar elementos que les permitan realizar esa justificación desde la teoría. Inicialmente, estudian dos parejas de triángulos que consideran semejantes pero no lo son; estudian la existencia del paralelismo entre los lados de los triángulos representados o de cuadriláteros especiales. Finalmente, Camila identifica visualmente los triángulos semejantes y comprueba empíricamente que hay un par de ángulos congruentes diferentes a los opuestos por el vértice. A continuación, centran sus esfuerzos en justificar esta congruencia usando teoremas ya demostrados en clase, tarea que no logran. Camila evoca un hecho geométrico conocido, que no era parte del sistema teórico que se manejaba en clase, pero que les permitió realizar la justificación. En la justificación, la razón que proveen para la congruencia de esos ángulos es que se trata de un teorema que un compañero les había mencionado.

Análisis

Con el propósito de poder determinar las diferencias entre los procesos llevados a cabo por los estudiantes para solucionar los problemas propuestos, se presenta a continuación el análisis de cinco fragmentos de la actividad de los estudiantes, en cada situación. El análisis se realizó teniendo en cuenta los indicadores del comportamiento racional y de visualización, anteriormente mencionados.

Reportan los pasos de la construcción y escriben su conjetura

Durante el primer experimento, mientras consignan en una hoja los pasos de la construcción, los estudiantes discuten sobre la forma correcta de escribir lo que reportan, específicamente cómo escribir la condición de que las dos cuerdas que construyeron contenían el punto *P*. Pilar propone: "Pasamos las rectas, dos rectas que contienen el punto P… ¡Ah! No. Que la intersección de las dos rectas sea el punto P". Camila responde: "No, pero daría lo mismo decir que si las contuviera o no. ¿No?" Seguidamente, los estudiantes empiezan a escribir la conjetura y discuten sobre si es necesario especificar el centro de la circunferencia, la manera adecuada de reportar un punto en el interior de la circunferencia y cómo hacer referencia a los segmentos con extremos en la circunferencia. En esta discusión, se evidencia el aspecto comunicativo (AC_i)[3] en la preocupación de Pilar por no escribir información redundante o irrelevante en lo que están reportando.

Posteriormente, Camila lee lo que quedó formulado como conjetura: "Dada una circunferencia y un punto P en el interior de tal circunferencia y dos segmentos que contengan P con extremos en la circunferencia, entonces…". Daniel protesta: "Tenemos que nombrar los segmentos [toma el cuaderno y complementa lo que Camila escribió]. Dada una circunferencia y un punto P en el interior de tal circunferencia y dos segmentos AB y CD que contengan al punto P". Finalmente, Daniel reescribe la conjetura utilizando notación matemática para referirse a los segmentos *AB* y *CD*, y estableciendo como conclusión $\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}$ para reemplazar la frase "las razones son iguales". Estas intervenciones son otro indicativo del aspecto comunicativo (AC_{ii}), puesto que Daniel reconoce la necesidad de nombrar los elementos para poder expresar claramente su conjetura.

Por el contrario, en el segundo experimento, Daniel reporta, con la ayuda de Camila, los pasos de la construcción, sin que se genere una discusión amplia sobre la forma correcta de escribirlos. Hacen uso correcto de la notación matemática para segmentos, circunferencias y medida de segmentos, para escribir lo que expresan verbalmente, lo que evidencia el aspecto comunicativo del comportamiento racional (AC_{ii}). Posteriormente, Camila describe la forma como procedieron a realizar la exploración. Luego, al formular por escrito la conjetura, Daniel propone hacer uso de otra cuerda de la circunferencia que contenga el punto *P*, con el fin de poder expresar que el producto de las medidas de los segmentos determinados por *P* es el mismo para dos cuerdas cualesquiera de la circunferencia que contengan este punto. Durante la explicación de su propuesta al observador, Daniel expresa que esa idea surgió al detectar que, con el arrastre, el producto se mantenía constante para toda cuerda. Menciona que utiliza dos cuerdas para poder expresar la generalización. Tanto el introducir la segunda cuerda para reportar la conjetura (AC_i) como la idea de que las dos cuerdas pueden ser cualesquiera (AC_{ii}) son evidencia del aspecto comunicativo del comportamiento racional de estos estudiantes, pues son conscientes de que ello contribuye a expresar las ideas claramente y de manera general. Finalmente, reportan la siguiente conjetura: "Dada la circunferencia ⊙C y P que pertenece al interior de la circunferencia. Sea AB cuerda de la circunferencia tal que P pertenece al segmento AB, entonces para todo segmento ED que es cuerda y que P pertenece a ese segmento, AP

3 ACi indica la categoría de análisis y el indicador correspondiente.

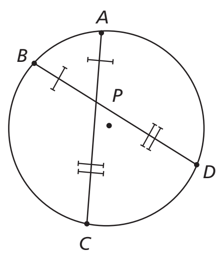
VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

por PB es igual a EP por PD. Es decir, para cualquier cuerda siempre el producto va a ser igual". Un análisis de la conjetura escrita muestra que esta recoge tanto la propuesta de Daniel, de mencionar dos cuerdas, como la de Camila, de incluir que la propiedad es válida para cualquier cuerda (aspecto comunicativo). En la afirmación se hace referencia al dinamismo, al incluir la palabra "siempre", cosa que no se esperaba de los estudiantes en este segundo experimento, dado que se había discutido en clase que el uso de estos términos en las conjeturas no es adecuado.

Primera justificación del problema

En el primer experimento, Daniel intenta dar una primera justificación de la conjetura: "Es que resultó siendo que la distancia del segmento AC siempre va a ser congruente al segmento BD, porque los dos son diámetros del… ¡Ah! No, miento… […] No, no son diámetros". Esta idea es complementada por Camila: "Pues es que sería igual. Tienes la circunferencia, ¿cierto? Y tienes el punto P acá. La distancia que tienes de acá a acá es igual a la que tiene de acá a acá [ver marcas de congruencia en la figura 2]. Y por eso se mantiene siempre la misma razón".

Figura 2



Fuente: elaboración propia

Pilar empieza a arrastrar las cuerdas de la circunferencia. Camila le pregunta: "¿Cuánto mide BP?…" y Daniel le solicita: "¿Puedes medir los segmentos AC y BD?", debido a que él ya había medido estos segmentos en su calculadora y quería comprobar si en la otra calculadora el resultado era el mismo. Descartan la propuesta de justificación de Camila, debido a los resultados obtenidos con geometría dinámica. En este momento, Pilar, en busca de elementos para una justificación, utiliza la representación con geometría dinámica para extraer información. Respecto al comportamiento racional, se evidencian los aspectos epistémico y teleológico en la actuación de los tres estudiantes. El primero, en la preocupación por justificar la veracidad de la conjetura haciendo uso de los elementos teóricos con los que cuentan (AE_{i}) y en el uso de la información extraída visualmente de la representación gráfica (AE_{ii}), y el segundo, en la ejecución del plan de tomar medidas con la intención de determinar si la propuesta es viable (AT_{iii}).

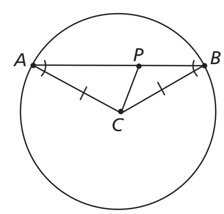
Por el contrario, en el segundo experimento, la primera justificación de la conjetura se realiza sobre una construcción auxiliar que involucra elementos que no se encontraban explícitos en el enunciado del problema, pues Camila propone construir los triángulos *APC* y *BPC*, en los cuales los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son radios de la circunferencia (AT_{ii}). Este plan es evidencia del aspecto teleológico. Ella ilustra lo que está diciendo con una representación en lápiz y papel. Parece que Camila busca elementos teóricos relacionados con circunferencias para determinar cuáles son útiles para justificar su conjetura, acción que evidencia el aspecto epistémico (AE_{i}). Daniel realiza la construcción sugerida por Camila con geometría dinámica, y observa que los triángulos no parecen semejantes. Por medio del análisis

VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

visual de las figuras, Daniel llega a la conclusión de que los triángulos no parecen semejantes, poniendo en duda la afirmación de su compañera. Sin embargo, empieza a tomar la medida de algunos de los ángulos para comprobarlo. Le explica a la observadora: "Es más fácil en la calculadora… la idea de la compañera Camila era, los triángulos construirlos al centro, ya que tenemos la ventaja del radio. […] [Toma la medida del ángulo BPC]. Si encontramos algún ángulo congruente entre los dos triángulos, que a la vista parece que no, podríamos encontrar semejanza. Pero no [pausa]. [Toma la medida del ángulo CPA]" (figura 3). En esta explicación, se observa el aspecto epistémico por la alusión implícita al Criterio de semejanza ángulo-ángulo, para justificar su proceder (AE_i) y por el reconocimiento de la utilidad de la geometría dinámica para encontrar elementos que podrían justificar o refutar un hecho que relaciona las partes constitutivas de los triángulos (AE_{iv}).

Posteriormente, Camila convence a Daniel de la semejanza de los triángulos con el siguiente argumento: "Creo que ya lo tengo. […] Congruencia [coloca una marca de congruencia en los segmentos AC y BC en la representación en papel]… Trazamos el segmento PC [dibuja el segmento PC]. Como por el recíproco, si tenemos los lados del triángulo isósceles [triángulo ACB], tendríamos ángulos… tendríamos [coloca una marca de congruencia para indicar que los ángulos PAC y PBC son congruentes] y como este lado lo comparten [lado PC]… lado-lado-ángulo. […] Pero llegaríamos a congruencias, ¿no? […] No. Sí, a semejanza […] APC con el triángulo CPB".

Figura 3



Fuente: elaboración propia

A pesar de que la visualización y la comprobación empírica fueron elementos importantes para Daniel, en el momento de tomar una decisión, esa evidencia perdió autoridad frente al argumento teórico incorrecto que le da Camila. En la justificación que da Camila de la semejanza, se evidencia el aspecto epistémico (AE_i), pues hace referencia al Teorema recíproco del triángulo isósceles y al Criterio de semejanza lado-lado-ángulo, este último incorrecto, aunque que ella considera hace parte del sistema teórico. Esta actuación es problemática: los estudiantes se dejan llevar por un supuesto control teórico e infortunadamente desatienden lo que ven.

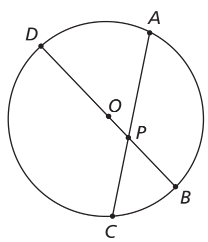
Reconocen la importancia de encontrar triángulos semejantes

Una vez establecida la conjetura, los estudiantes dirigen sus acciones a buscar elementos teóricos que les permitan realizar la justificación. En los dos experimentos, los estudiantes establecen que mediante triángulos semejantes pueden establecer lados proporcionales y llegar así a que el cociente o el producto son constantes, según el caso. Esta forma de proceder evidencia el aspecto teleológico y el epistémico. El primero, al establecer como plan para justificar su conjetura la búsqueda de triángulos semejantes (AT_{ii}), y el segundo, al sustentar esta opción haciendo referencia a propiedades de triángulos semejantes (AE_i).

Buscan varias soluciones al problema de encontrar un par de ángulos congruentes

En el primer experimento, Pilar propone utilizar rectas paralelas, idea que Camila complementa: "se puede sacar una paralela a AB que cruce por C y que se intersecara con D y entonces ya aseguraríamos que este ángulo, el ángulo ABD es congruente con el ángulo BDC. Y por el hecho geométrico de las paralelas, de los ángulos correspondientes de las paralelas [refiriéndose a los ángulos alternos internos entre paralelas], aseguraríamos que hay dos ángulos congruentes y ya tendríamos triángulos congruentes [quiere decir semejantes] y utilizaríamos la definición de proporcionalidad". Su argumento es una clara muestra del aspecto epistémico, puesto que hace referencia a elementos teóricos (AE_i).

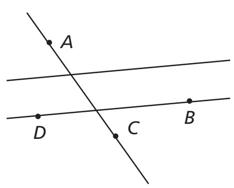
Figura 4



Fuente: elaboración propia

Seguidamente, Pilar explica mediante una representación en lápiz y papel: "Lo que yo decía era hacer por ejemplo acá la paralela".

Figura 5



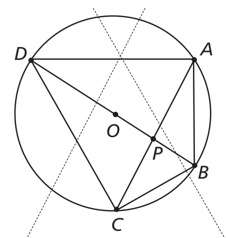
Fuente: elaboración propia

A esto, Camila responde: "No. Lo que yo decía era… La paralela sería esta [dibuja la recta AB sobre el dibujo realizado por Pilar] a esta [dibuja la recta CD]". Pilar objeta: "Pero no creo que sean paralelas. […] Espérate lo hacemos en la calculadora…". La información que ve en la calculadora la lleva a concluir que estas rectas no son paralelas. Enseguida, Camila propone examinar si los segmentos *AD* y *BC* son paralelos, a lo que Pilar inmediatamente responde: "No, porque mira… [muestra, con el lápiz sobre figura de calculadora, que las otras dos rectas no son paralelas]". Finalmente, Camila concluye: "No, lo de las paralelas ya no nos sirve".

En las intervenciones anteriores se evidencia el aspecto teleológico del comportamiento racional de las estudiantes porque proponen planes para buscar elementos que les permitan justificar la congruencia de ángulos o para mostrar la inviabilidad de una estrategia (AT_{ii}). Por otra parte, la visualización tiene un papel relevante, puesto que a partir de representaciones gráficas deciden intentar usar rectas paralelas, explican sus ideas y las descartan (aspecto epistémico) (AE_{iii}).

Una vez abandonada la idea de usar rectas paralelas, Camila expone una nueva idea: "Y ¿en cometa no tenemos nada? ¡Ah!, pues sí. Es una cometa". Pilar explora esta nueva situación al observar en una representación en lápiz y papel lo que parece ser una cometa y marca los lados que parecen congruentes. Camila añade: "Este lado [señala el segmento DC] y este lado [segmento DA] son adyacentes y son congruentes. Este lado y este lado son adyacentes y son congruentes [señala los segmentos AB y BC]".

Figura 6

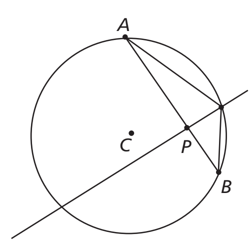


Fuente: elaboración propia

Pilar realiza la construcción en geometría dinámica y concluye que "no hay cometa" al observar la figura, por lo cual desisten de esta idea. En este momento, se pueden observar tanto el aspecto teleológico como el epistémico del comportamiento racional. El teleológico al proponer estudiar un cuadrilátero especial, en este caso una cometa (AT_i), y el epistémico, ya que Camila identifica los segmentos que parecen ser congruentes, a partir de la definición de cometa (AE_i). Adicionalmente, se puede observar que hubo un proceso de visualización al identificar el cuadrilátero como uno especial (aspecto teleológico, AT_i) y al desechar esta idea a partir de la representación gráfica realizada con geometría dinámica (aspecto epistémico, AE_{iii}).

En el segundo experimento, Daniel también propone examinar si en la figura hay una cometa, al percibirla en una representación realizada en el papel; por esta razón, procede a realizar la construcción con geometría dinámica. No obstante, desecha esta idea rápidamente al observar el resultado, pues comenta: "No… estaba observando… es el problema del lápiz. […] Que había observado aquí una cometa, pero, obvio, *nunca se va a dar siempre*. […] Simplemente por observación". Esto es evidencia del aspecto teleológico, ya que Daniel explora empíricamente la situación con geometría dinámica (AT_{iii}). Él está consciente de que esta le permite analizar todas las posibles representaciones de la situación, y la visualización matemática de ellas le permitió encontrar un contraejemplo (aspecto epistémico, AE_{ii}). Siguiendo con la idea de encontrar triángulos semejantes para obtener la proporcionalidad entre sus lados, Daniel estudia el caso particular en que la otra cuerda que contiene a *P* sea perpendicular al $\overline{AB}$ (figura 7) (aspecto teleológico, AT_{ii}).

Figura 7



Fuente: elaboración propia

VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Luego, toma la medida de los dos ángulos determinados por *P*, el punto de intersección de la perpendicular con la circunferencia y los puntos *A* y *B*, respectivamente. En la representación, los triángulos no parecen semejantes; no obstante, la visualización geométrica que Daniel realiza de la figura no le permite percatarse de ello.

Intentan usar el hecho geométrico de la semicircunferencia para encontrar ángulos congruentes

En el primer experimento, Daniel manifiesta su plan: "Voy a intentar utilizar el hecho geométrico de la semicircunferencia para demostrar que uno de los ángulos del triángulo es recto [observa que la medida del ∠ADC es 86.49]. No es recto. Entonces no me sirve" (aspecto teleológico, AT_i). El hecho geométrico de la semicircunferencia usado por Daniel establece que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Más adelante, mientras Pilar y Camila comienzan a escribir la justificación de la conjetura sin haber logrado la congruencia del otro par de ángulos diferentes a los opuestos por el vértice, Daniel retoma la idea anterior: "…No me dio recto pero el ángulo se mantiene. […] Construí el triángulo ACD, AC lo tomé como si fuera el…, tomé la semicircunferencia ADC…". La observadora le aclara que el arco ADC no es una semicircunferencia, y Daniel expresa: "Pero no es una semicircunferencia. Pero medí el ángulo ADC y se mantiene. […] Siempre se mantiene. […] Arrastro hacia donde sea y siempre se mantiene". Después de expresar lo encontrado, Daniel dice: "…¿Si construimos el otro triángulo igual que construimos el primero? […] Tiene que haber una forma de demostrarse [pausa] [mide el ∠ADC y da 86.49 y el ∠ABC y obtiene 93.51]. Son ángulos suplementarios. Mira, hice el otro triángulo [refiriéndose al triángulo BCD]. Tomé la medida. Se mantienen los dos, y los dos no sé de qué forma pero son suplementarios. Los dos se mantienen y son suplementarios".

Todos los planes anteriores son muestra del aspecto teleológico del proceder de Daniel (AT_{ii}). Igualmente, se observa el aspecto epistémico en la búsqueda de hechos teóricos que le permitan justificar la congruencia de los ángulos (AE_i). Además, se observa el uso de la visualización cuando, a partir de la representación gráfica realizada con geometría dinámica, Daniel decide que el arco no es una semicircunferencia (aspecto epistémico, AE_{ii}). Daniel ha "descubierto" dos teoremas: ángulos que subtienden la misma cuerda son congruentes y ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios.

En el segundo experimento, Daniel también intenta utilizar el hecho geométrico de la semicircunferencia para justificar la congruencia de un par de ángulos; no obstante, menciona: "…tampoco tenemos semicircunferencias, para utilizar ángulos inscritos". En esta intervención es posible identificar el aspecto epistémico del comportamiento de Daniel, ya que intenta buscar elementos teóricos para poder justificar su conclusión (AE_i).

Conclusiones

Las acciones de los estudiantes que se analizaron son evidencia de los cambios en la actividad demostrativa de los estudiantes de un semestre al otro. El modelo de comportamiento racional de Jürgen Habermas y los referentes teóricos acerca de la visualización fueron una herramienta metodológica eficaz para analizar estos cambios. Esto porque, como se pudo evidenciar, la formulación de una conjetura y su justificación implican la elaboración de estrategias para resolver el problema (aspecto teleológico), la búsqueda de referentes teóricos para justificarla (aspecto epistémico), la interpretación de la información obtenida a partir de una representación gráfica (visualización) y la discusión acerca de la forma correcta de comunicar los resultados (aspecto comunicativo).

Respecto al comportamiento racional de los estudiantes, en lo que se refiere al aspecto teleológico, cuando están en el primer curso de la línea proponen más planes para encontrar la justificación de la congruencia de dos ángulos. Muchos de estos planes surgen con la intención de explorar propiedades visualizadas, aunque en ocasiones no se tiene totalmente claro cómo estos podían contribuir a la solución de la tarea. Cuando los estudiantes están en el tercer curso, parece que la exploración está guiada por su conocimiento de la teoría, acorde a la metodología de enseñanza de este curso y del curso Geometría Plana, que exige que toda afirmación debe ser justificada a partir del sistema teórico; tal vez, por ello hay menos sugerencias de estrategias para encontrar la justificación. En lo que se refiere al aspecto epistémico, en el segundo experimento se evidenciaron más momentos en que los estudiantes se preocuparon por la justificación de sus ideas. De este aspecto, llama la atención el papel que ellos les atribuyeron a las propiedades encontradas con la geometría dinámica. En ambos experimentos, los estudiantes se preocuparon por poder relacionar estos hechos con el sistema teórico con el que contaban, pues reconocen que una propiedad encontrada con geometría dinámica solo puede utilizarse si se logra demostrar o, en el primer curso, si se instaura como un hecho geométrico por la profesora, a partir de resultados que observan cuando usan geometría dinámica. Tal vez por ello los estudiantes, en el primer experimento, usan esa evidencia como justificación.

En cuanto al aspecto comunicativo, los resultados muestran que en el primer curso hay una preocupación real por usar el lenguaje matemático para comunicar sus ideas, mientras que cuando los estudiantes se encuentran en el tercer curso, esta preocupación no se evidencia debido a que ellos ya se han apropiado de este lenguaje y lo usan naturalmente; por tanto, no discuten sobre el uso adecuado de este. Se puede observar que en el segundo experimento, al formular la conjetura, los estudiantes están conscientes de que esta no solo debe exponer los resultados encontrados, sino que además debe favorecer su demostración.

Respecto a la visualización, esta les permitió obtener información a partir de la representación de elementos geométricos, de las relaciones observadas en las construcciones y de la manipulación de estas. Este proceso fue importante en los dos experimentos en el momento de establecer planes, desarrollarlos, desecharlos (teleológico) y comprobar relaciones establecidas (epistémico), pues los estudiantes exploraron características de la representación gráfica que perceptualmente parecían verdaderas y comprobaron conjeturas establecidas a partir de la teoría. Sin embargo, en el segundo experimento, los estudiantes no siempre usaron la visualización matemática, pues en ocasiones exploraron situaciones en las que claramente no se veía lo que ellos afirmaban, guiados por una supuesta teoría.

En ambos experimentos, los estudiantes procedieron de manera similar para resolver el problema, y las propuestas y los argumentos suministrados se correspondieron con su nivel académico. No obstante, una diferencia grandísima entre los dos procesos fue que, durante el primer experimento, las propuestas de los estudiantes fueron más allá del conocimiento teórico con el que contaban, pues, mediante el uso de la geometría dinámica, Daniel descubre nuevas propiedades, lo que muestra mayor creatividad que en el segundo experimento. En este último, las acciones de los estudiantes estuvieron siempre guiadas por lo teórico y la geometría dinámica jugó un papel de comprobación.

Una característica de los estudiantes en el tercer semestre que hay que destacar es que notaron la necesidad de introducir otra cuerda en tres momentos: para expresar en su conjetura que el producto es constante (aspecto comunicativo), en la búsqueda de elementos que permitieran establecer relaciones geométricas para justificar la conjetura (aspecto teleológico), y para construir triángulos y poder usar la teoría de semejanza de triángulos en su justificación (aspecto epistémico). Estas acciones se corresponden con la opinión del grupo de investigación Æ·G al diseñar el problema para cada experimento, puesto que son evidencia de una mayor comprensión acerca de la comunicación y justificación matemática que no habían adquirido los estudiantes mientras estaban en primer semestre. Otra acción notable de los estudiantes en el segundo experimento fue poder realizar la transición desde la constancia del producto de las medidas de los segmentos hasta el establecimiento de una proporción.

En general, los estudiantes mostraron mayor madurez matemática cuando estaban en el tercer semestre en cuanto al uso de lenguaje, el manejo de la teoría y el trabajo ajustado a las normas matemáticas para la justificación y al sistema teórico disponible. Sin embargo, perdieron en cuanto a la visualización, pues dejó de ser relevante para guiar acciones, identificar propiedades o descartar propuestas a partir de una representación que se construyó con un medio que obedece intrínsecamente a los postulados de la geometría euclidiana y que, por tanto, retrata figuras que geométricamente son correctas. También se evidenció una pérdida en la creatividad, pues no supieron cómo interpretar en la figura los elementos (ángulos, arcos) que proveían la información para descubrir el teorema que garantizaba la congruencia de los ángulos. El formalismo predominó sobre la heurística y lo ideal es que se complementen.

Una característica que debe tener el licenciado en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional es la capacidad de generar ambientes de aprendizaje que favorezcan la realización en el aula escolar de actividades propias de las matemáticas (conjeturar, argumentar, explorar, generalizar, justificar, inducir, comunicar, entre otras). Por ello, en los cursos de geometría se utiliza la geometría dinámica para favorecer la exploración y la generalización. Por otro lado, al ir avanzando en los cursos propios de la matemática, la justificación va cobrando mayor importancia, dada la naturaleza de esta ciencia. Por tanto, es natural que los estudiantes, en el tercer semestre, tengan un comportamiento más "matemático" y ciñan sus justificaciones a un sistema teórico, y no a observaciones empíricas que, a la vez, pueden restringir sus acciones. Sin embargo, fruto del estudio, los profesores encargados de estos cursos reconocen que es necesario hacer caer en cuenta a los estudiantes de que hay momentos en que los procesos exploratorios para descubrir propiedades son necesarios, porque permiten identificar los elementos teóricos que aún faltan para poder justificar desde la teoría alguna propiedad. Así, los estudiantes evidencian lo que significa construir un sistema teórico en matemáticas. Queda entonces el interrogante: ¿qué modificar de la metodología usada en los cursos de geometría de la Universidad Pedagógica Nacional para que los estudiantes incluyan exploraciones empíricas, además de las teóricas, en sus procesos de resolución de problemas, sin importar el grado de formalismo que se exige para la justificación de las conjeturas?

VOLUMEN 7 / NÚMERO 15 / ENERO-JUNIO DE 2015 / ISSN 2027-1174 / BOGOTÁ-COLOMBIA / Páginas 33-48

Sobre las autoras

Carmen Samper de Caicedo es matemática, Universidad de Ottawa, Canadá. Magíster en Matemáticas, Universidad de Maryland, Estados Unidos. Coautora de los textos escolares *Alfa*, *Espiral* y *Delta* (Editorial Norma), 3 libros y 15 artículos (revistas nacionales e internacionales) que reportan resultados de investigación relacionados con el aprendizaje de la demostración en geometría.

Leidy Marcela Cepeda-Buitrago es licenciada en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Claudia Marcela Vargas-Guerrero es licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y Magister en docencia de la matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Referencias

Boero, P.; Douek, N.; Morselli, F. & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and Proof: A Contribution to Theoretical Perspectives and their Classroom Implementation. En Márcia Maria Fusaro Pinto & Teresinha Fumi Kawasaki (eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 179-205. Belo Horizonte, Brazil: International Group for the Psychology of Mathematics Education, IGPME. Copia gris disponible en: http://www.seminariodidama.unito.it/2011/app/boero34.pdf

Camargo, L.; Samper, C. & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, *volumen especial*, 371-383. Disponible en: http://www.scm.org.co/aplicaciones/revista/Articulos/853.pdf

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Fischbein, E. & Kedem, I. (1982). Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking. En *Proceedings of the 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 128-131. Antwerpen, Belgium: International Group for the Psychology of Mathematics Education, IGPME.

Duval, R. (1991). Structure du Raisonnement Déductif et Apprentissage de la Démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (3), 233-263.

Habermas, J. (2003). *Truth and Justification*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Disponible en: http://www.lightforcenetwork.com/sites/default/files/Jurgen%20Habermas%20-%20Truth%20and%20Justification.pdf

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying Processes of Proving. En Luis Puig & Ángel Gutiérrez (eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*, vol. 3, 59-65. Valencia, Spain: University of Valencia.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics. Summary of the Results from a Survey of the Proof Conceptions of Students in the UK.* Research Report, 601-613. Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin. *Focus on the Learning Problems in Mathematics*, *11* (1), 61-76.

Hoyles, C. (1997). The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics*, *17* (1), 7-16

Knipping, C. (2001). Towards a Comparative Analysis of Proof Teaching. En Marja van den Heuvel-Panhuizen (ed.). *Proceedings of the 25th PME Conference*, vol. 3, 249-256. Utrecht, The Netherlands: International Group for the Psychology of Mathematics Education, IGPME.

Küchemann, D. & Hoyles C. (2001). Investigating Factors that Influence Students' Mathematical Reasoning. *Proceedings of the 25th PME Conference*, vol. 3, 257-264. Utrecht, The Netherlands: International Group for the Psychology of Mathematics Education, IGPME.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Ángel Gutiérrez & Paolo Boero (eds.). *Handbook of Research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204. Rotterdam: Sense.

Molina, Ó.; Samper, C.; Perry, P. & Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, *29* (1), 73-96. Disponible en: http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol29N1/v29n1-6Samperetal.pdf

Perry, P.; Molina, Ó.; Camargo, L. & Samper, C. (2011). Analyzing the Proving Activity of a Group of Three Students. Ponencia presentada en Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7). Disponible en: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/Cerme7_WG1_Perry.pdf

Perry, P.; Samper, C.; Camargo, L.; Molina, Ó. & Echeverry, A. (2009). *Learning to Prove: Enculturation or …?* En Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, Gila Hanna & Michael de Villiers (eds.). *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, vol. 2, 124-129. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University. Disponible en: http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_2.pdf

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27* (4), 458-477.