CPU-e, Revista de Investigación Educativa
E-ISSN: 1870-5308
cpu@uv.mx
Instituto de Investigaciones en Educación
México

CPU-e

Revista de Investigación Educativa 4

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308 | Xalapa, Veracruz

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos

Alida M. Masachs

Departamento de Ciencias de la Educación

Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

Facultad de Agroindustrias
Universidad Nacional del Nordeste

El propósito de este artículo es mostrar dos años de experiencia con la resolución de problemas matemáticos en el aula. El foco de la experiencia estuvo puesto en la creación de entornos de validación con intercambio de informaciones y argumentos.
Los problemas seleccionados se agruparon en tres niveles para promover la interacción y el debate colectivo en el aula.

Palabras claves: Matemática, resolución de problemas, validación.

The purpose of this article is to show a two year experience dealing with problem solving in Math. The focus is in the process by which the teacher and students constitute social norms and mathematical practices in the course of their classroom interaction.
Different problems were solved so as to promote mathematical signs and symbols (ciphers, letters, variables, graphics, diagrams, visualisations, etc.), and social signs and symbols (in the frame of the classroom culture: hidden hints, remarks, reinforcements, confirmations, reflections, etc.) made by the teacher, and comments and remarks of similar types made by other students.

Key words: Math, problem solving, classroom interaction.

Para citar este artículo:
Masachs, A. M., Camprubi, G. E. & Naudi, M. M. (2007, enero-junio). Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos. *CPU-e, Revista de Investigación Educativa, 4*. Recuperado el [fecha de consulta], de http://www.uv.mx/cpue/num4/practica/masachs_entornos_validacion.htm

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos

1 Introducción La Teoría de Situaciones Didácticas

Este trabajo se ubica en la perspectiva de la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1988,1997), quien propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción, es decir, la transformación y la validación de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Brousseau considera dos puntos de partida fundamentales: a) el alumno elabora conocimiento a partir de la interacción con una situación problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego; y, b) la intencionalidad didáctica del docente expresa un aspecto inherente tanto al proceso de producción de conocimientos en el marco de una clase, como a la articulación de dichos conocimientos con los saberes culturales. A partir de ellos postula la necesidad de un *milieu* o entorno de validación pensado y sostenido con una *intencionalidad didáctica*. Las interacciones entre alumno y *milieu* se describen a partir del concepto teórico de *situación adidáctica*, que modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente. El sujeto entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones (retroacciones del *milieu*). El concepto de *milieu* o entorno de validación incluye entonces tanto una problemática matemática que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones, esencialmente también matemáticas, que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando, en consecuencia, la realidad con la que interactúa (Sadovsky, 2005).

Desde el punto de vista metodológico, el análisis a priori de la situación adidáctica que el investigador pretende estudiar, permite construir un conjunto de observables que constituirán un marco para interpretar los datos del trabajo experimental.

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

El marco cultural de la clase impone restricciones que condicionan el conocimiento que se elabora. La referencia que el docente tiene –inevitablemente– de la comunidad matemática erudita, juega un papel regulador en la constitución de ese marco cultural.

Para representar la naturaleza social de los saberes matemáticos, Brousseau (1986, 1988) propone situaciones adidácticas que se organizan de manera tal que las interacciones de los alumnos con el entorno requieren intercambios entre ellos. Se trata de las situaciones de formulación y de validación, en las que los alumnos intercambian, respectivamente, informaciones y argumentos respecto del valor de verdad de proposiciones que emergen de la interacción. En estos modelos, la interacción entre pares es una condición necesaria para abordar el problema matemático, y esta necesidad está dada por la manera en la que se organiza la situación: de manera intencional se provoca una asimetría entre los recursos que tienen unos y otros alumnos, que obliga al intercambio (Sadovsky, 2005).

2 Metodología

Para realizar la transferencia se eligió una institución que integra el sistema educativo en su Nivel de Educación Superior. En la Argentina, la educación superior involucra a las Universidades que dependen en cuanto a gestión y financiamiento del gobierno nacional, y a las Instituciones de Nivel Terciario No Universitariodependientes de los gobiernos provinciales. Durante dos años se trabajó en transferencia con el Nivel Terciario No Universitario "Juan Mantovani". Las actividades se desarrollaron en la asignatura Matemática I del primer año de la Carrera de Profesorado en Tecnología de dicha institución.

Para la resolución de problemas elaboramos una estrategia que contempla cuatro etapas, que en su evolución favorecen la socialización de los conocimientos. Denominamos estrategia a la manera particular que despliega el docente para favorecer los procesos de construcción del conocimiento, y que se compone de procesos parciales (etapas) que conducen al logro de las expectativas previstas.

El trabajo de resolución de los problemas se organizó a través de una estrategia desplegada en cuatro etapas, a saber (Sadovsky, 2005):

1) los alumnos trabajaron individualmente con la consigna de obtener soluciones, decidir cuántas posibles hay, y describir un procedimiento para obtener todas las soluciones;

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

2) trabajo en pequeños grupos para optar por un procedimiento de entre los postulados por los integrantes del equipo o, eventualmente, formular uno nuevo;
3) transcripción en el pizarrón, por parte del docente, de los procedimientos propuestos por cada grupo, y análisis en pequeños grupos de los procedimientos expuestos;
4) debate colectivo sobre los procedimientos.

En la primera etapa, se propone un *trabajo autónomo* con el problema, en el que el alumno produce relaciones que le servirán de marco para las etapas posteriores.

En la segunda, cada alumno, en tanto productor de un procedimiento, se enfrenta con la necesidad de *explicar su trabajo* y tratar de convencer a los demás de la eficacia de lo producido por él. La necesidad de optar obliga a considerar distintos procedimientos como objeto de trabajo. Al verse obligado a elegir o descartar, cada alumno recurre –en parte de manera implícita– a diversos argumentos referidos a la pertinencia del procedimiento. Las negociaciones que transcurren entre los alumnos sin intervención del docente, están sujetas también a las condiciones que impone el funcionamiento social del grupo (liderazgos, alumnos desvalorizados, etc.).

En la tercera etapa, cada grupo de alumnos entabla una *interacción adidáctica* con la producción escrita de los otros grupos, en una posición que combina la evaluación con la validación. Se ofrece entonces la oportunidad de poner a prueba la propia producción como marco de análisis y procedimientos de control del trabajo de los otros. Las relaciones construidas en su primer trabajo individual y los diferentes argumentos desplegados por los integrantes de su grupo en el momento de elegir un procedimiento, operarán de manera diferente en cada alumno en el momento de analizar lo presentado por los otros grupos. Al mismo tiempo, como resultado del análisis cada alumno producirá un conjunto de sentencias relativas a los procedimientos analizados. Sin embargo, muchas de estas sentencias no podrán ser validadas por sus autores y tendrán entonces para ellos un listado de preguntas, que requerirá de los otros para ser desplegadas y tratadas.

La cuarta etapa, consiste en el *debate colectivo* sobre los procedimientos, y da lugar a la negociación pública de cuestiones como las siguientes: cómo establecer la cantidad de soluciones, qué criterios se utilizan para validar este asunto, con qué criterios se acepta o se rechaza una cierta escritura, etc. El debate colectivo se configura sobre la base de las sentencias acerca de las cuales no hay acuerdo. La interacción adidáctica de la etapa anterior otorga robustez a las posiciones

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

de cada alumno, construyendo el aprendizaje en una interacción colectiva. Se incorporan al entorno las nuevas afirmaciones que se construyen en esta interacción colectiva.

Analizando las cuatro etapas en su conjunto, *el entorno* se constituye a partir del recorte que cada uno hace del trabajo en las etapas anteriores. La tercera etapa es clave para que el alumno "encuentre" otros límites para sus arraigadas prácticas aritméticas, y la cuarta es imprescindible para comenzar a producir respuestas para las preguntas generadas en la etapa anterior y las que se elaboran en el curso de la discusión. En este sentido, las etapas tres y cuatro constituyen un entorno generador de preguntas sobre la propia producción, más que de sanciones a la misma.

3 Características de los problemas matemáticos

Los problemas matemáticos que constituyen el fundamento de este trabajo se agrupan en tres niveles. La descripción de los mismos se detalla a continuación:

1.1 *Nivel 1*

Los Problemas matemáticos del Nivel 1 tienen opciones de respuestas múltiples. Este tipo de problemas tiene una doble finalidad:

1) Sirven de estímulo a quien los resuelve porque la solución se encuentra entre una de las alternativas ofrecidas.
2) Las respuestas ofrecidas captan los errores más comunes que pueden cometerse en el proceso de resolución.

A modo de ejemplo se presentan tres problemas con Alternativas de Respuestas múltiples que formaron parte de la práctica:

Problema 1-N1

En el 2004 y 2005 el precio de una motocicleta aumentó cada año un 15% sobre el precio del año anterior. ¿Qué porcentaje aumentó el precio del 2005 respecto del 2003?

a) 21% b) 45% c) 32% d) 25% e) Ninguna de las anteriores.

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

Problema 2-N1

Un alumno de la cátedra de Matemática obtuvo 60, 40 y 80 en las primeras evaluaciones. ¿Qué calificación debe obtener en la próxima evaluación para que su promedio sea 65?

a) 32 b) 95 c) 65 d) 80 e) Ninguna de las anteriores.

Problema 3-N1

Dos personas A y B son socias en una casa de Óptica. A es dueña de la tres quintas partes del negocio y B del resto. Recientemente una tercera persona C ofreció pagar la cantidad de $ 100.000 para unirse a la sociedad con la condición de que los tres tendrán la misma participación en la nueva sociedad. Si se hace una división justa, ¿cuánto deben recibir A y B de los $ 100,000?

a) ¿A debe recibir $ 80,000 y B los restantes $20,000?
b) ¿A debe recibir $ 25,000 y B los restantes $75,000?
c) ¿A debe recibir $ 10,000 y B los restantes $90,000?
d) ¿A debe recibir $ 90,000 y B los restantes $10,000?
e) Ninguna de las anteriores.

1.2 *Nivel 2*

En este nivel se requiere un análisis más complejo al de los problemas presentados en el nivel anterior. Este tipo de situaciones problemáticas requiere que, además de alcanzar la solución, sea necesario reflexionar sobre otras alternativas de resolución o bien, de determinar si se trata de un planteo que carece de solución.

Cada problema consta de un enunciado general y dos informaciones adicionales (1) y (2). Debe decidirse si los datos adicionales entregados son suficientes para llegar a resolver la situación problemática. Es decir, deben analizarse el enunciado general y las informaciones adicionales, en el marco conceptual de los conocimientos generales, para determinar en cuáles de las siguientes clasificaciones puede situarse al problema:

A/ Si la información (1) es suficiente para resolver el problema pero la información (2) por sí sola es insuficiente para llegar a la solución.

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

B/ Si la información (2) es suficiente para resolver el problema pero la información (1) por sí sola es insuficiente para llegar a la solución.

C/ Si las informaciones (1) y (2) empleadas en forma conjunta son suficientes para hallar la solución pero ninguna de las informaciones por sí sola es suficiente para llegar a la solución.

D/ Si cada información por sí sola es suficiente para solucionar el problema.

E/ Las informaciones (1) y (2) empleadas en forma conjunta no son suficientes para resolver la situación problemática planteada y es necesario contar con información adicional para resolver el problema.

Seguidamente se presentan tres problemas del Nivel 2 que se resolvieron durante la práctica docente.

Problema 1-N2

Hallar cuánto vale x-4y.

1) $2x+2y=8$

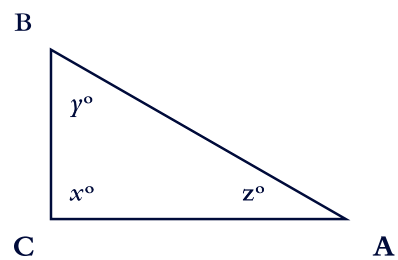
2) $x+2y=6$

Problema 2-N2

En la figura, el ángulo x aparece como rectángulo. ¿Es cierto que el ángulo x tiene una amplitud de 90 grados?

1) $x=2y$

2) $y=1.5z$



Problema 3- N2

¿Cuál es el salario mensual promedio de un grupo de 30 obreros? El capataz de estos obreros recibe un salario de $120.

1) El salario pagado a los 30 obreros y al capataz es de $ 3120.

2) El salario del capataz es 120% del salario semanal promedio de los 30 obreros.

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

1.3 *Nivel 3*

Los problemas matemáticos de este Nivel se extraen de la bibliografía recomendada a docentes egresados del Nivel Terciario No Universitario.

Los problemas seleccionados en el Nivel 3 no cuentan con alternativas de respuesta ni se plantean con análisis de suficiencia de datos, sino que son seleccionados de la bibliografía.

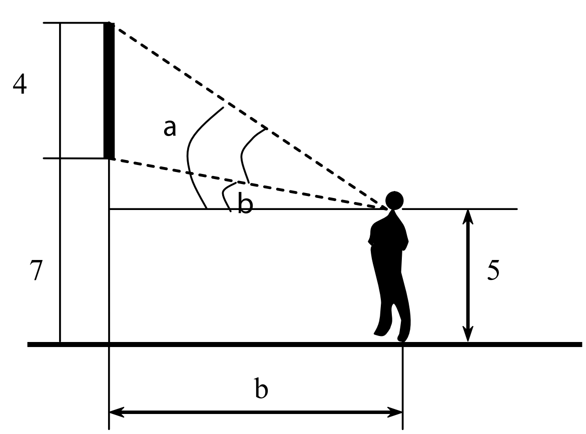
Seguidamente se muestran dos problemas seleccionados de la bibliografía sugerida que se desarrollaron en la práctica:

Problema 1- N3

Un maratonista está compitiendo en una carrera de 8,500m. Sufre una lesión y se retira cuando ha recorrido la cuarta parte de lo que le faltaba por recorrer. ¿Cuántos metros corrió realmente?

Problema 2- N3

En una pared está colgado un cuadro de 4 pies de altura, de manera que la parte inferior está a 7 pies del piso. Un observador cuyos ojos están a 5 pies sobre el suelo se para a "b" pies de la pared donde está el cuadro. Calcular el ángulo q sustentado por el cuadro y los ojos para b=8



4 Resultados y Conclusiones

Del Nivel 1 y Nivel 2 se desarrollaron 12 problemas, respectivamente, y del Nivel 3 se desarrollaron 5.

Considerando los diferentes procedimientos elegidos por cada grupo de alumnos que fueron escritos en el pizarrón, y los episodios de emergencia de conocimientos específicos a partir de la interacción con los procedimientos de los otros, los problemas del Nivel 2 fueron los que mejor promovieron los procesos de validación. Los problemas de este nivel implicaron no sólo la identificación de elementos para llegar a la solución, sino además el posterior análisis de suficiencia de datos para clasificar la situación problemática.

Las relaciones construidas en un primer trabajo individual y los diferentes argumentos desplegados por los integrantes del grupo en el momento de elegir un procedimiento, operaron de manera diferente en cada alumno en el momento de analizar lo presentado por los otros grupos. Al mismo tiempo, como resultado del análisis, cada alumno produjo un conjunto de argumentos relativos a los procedimientos analizados.

El posterior debate colectivo sobre los procedimientos dio lugar a la negociación pública de cuestiones como las siguientes: cómo establecer la cantidad de soluciones, qué criterios se utilizan para validarlas, con qué criterios se acepta o se rechaza la clasificación de suficiencia de datos asignada a cada problema del Nivel 2. El debate colectivo se estructuró sobre la base de los argumentos acerca de los cuales no existía acuerdo.

El análisis de las notas de clases permite inferir que los alumnos consideraron las producciones de los otros como objeto de estudio. El trabajo del otro cumplió la función de interpelar el propio. Los límites que encontró cada alumno para validar tanto las aceptaciones como los rechazos sobre los procedimientos de los otros, generaron buenas condiciones para formular nuevas preguntas. La tarea de evaluar los procedimientos de los otros después de haber producido el propio, colocó al alumno en una posición de control, agudizando el análisis crítico.

Seguramente, la necesidad de elegir entre opciones para determinar la suficiencia de datos abrió la posibilidad de optar por una de las opciones con el rechazo simultáneo de las otras. La idea de esa selección múltiple provocó un juego entre anticipaciones y decisiones que propiciaron la modificación de esquemas y la producción de conocimientos. Se generó una serie de preguntas y planteos formulados en el espacio social de la propia clase, a partir del trabajo propuesto.

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

En el marco de las discusiones generadas, se fueron elaborando justificaciones que permitieron resolver los problemas.

Otro elemento a considerar para los problemas del Nivel 2 respecto de los de otros niveles ensayados, está dado por el hecho de que como es necesario identificar entre un conjunto de posibles soluciones, el que resuelve el problema no es conducido como por un carril a la solución del problema, exponiéndose a tener que tomar decisiones que favorecen la producción del conocimiento.

Entre las interacciones de los alumnos se detectaron procesos de pensamiento diversos que, en general, tendieron a la colaboración mutua: a veces, quien ya había elaborado una aproximación al problema ayudaba a otros para que terminaran de comprender; otras, daban la solución en forma directa, sin ayudar demasiado a la comprensión de la situación problemática. También ocurrieron casos de alumnos que respondieron a un criterio de autoridad de otro compañero o desestimaron su contribución por la posición social de éste en la clase. Las voces en un grupo de clase no tienen el mismo valor, por lo que el poder académico en muchas ocasiones condiciona el accionar de los más relegados.

Se registraron casos de procedimientos diferentes con la misma solución que produjeron diferencias como producto de la interacción entre pares. En esos casos, la norma según la cual los procedimientos se consideraron equivalentes necesitó de la interacción entre pares, así como de la intervención docente para plantearlo como tema a debatir. En estos procesos de validación se pusieron en juego ideas de unos y otros y los aportes del docente contribuyeron a sostenerlas, modificarlas o producir nuevas relaciones.

La experiencia permitió además ejercitar un principio fundamental de la didáctica: la renuncia al "éxito académico" manifestado cuantitativamente, en beneficio del "éxito educativo" que se logra cuando se persiguen y ejercitan competencias para evaluar argumentos, construir alternativas de solución, comprender los procesos cognitivos, y donde el error se convierte en factor de aprendizaje. Las actividades propuestas facilitaron a los alumnos el reconocimiento de sus fuentes de autoinformación, que lo conducen al sano ejercicio de la autoevaluación, en el marco de un verdadero aprendizaje formativo.

La verdadera formación se logra en un diálogo entre personas capaces de realizar un retorno sobre sí mismos, y para ello es necesario saber que no todo lo que se aprende pasa por el intelecto; hay componentes afectivos y de contexto que los sujetos han puesto en juego en el trabajo realizado, lo que fue aprovechado como autoconocimiento, fuente verdadera de aprendizaje.

Alida M. Masachs
Germán E. Camprubí
Mauricio M. O. Naudi

Listado de Referencias.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7/2, 33-115.

___________ (1988) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9/3, 309-336.

___________ (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques 1970 1990.* Dordrecht: Kluwer.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Buenos Aires : Libros del Zorzal.

enero-junio 2007 | ISSN 1870-5308

Instituto de Investigaciones en Educación | Universidad Veracruzana