Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho
Brasil

Hassan Ahmad Ali Fernandes, Solange; Healy, Lulu
A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato
Boletim de Educação Matemática, vol. 23, núm. 37, 2010, pp. 1111-1135
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 1111 a 1135, dezembro 2010 *ISSN 0103-636X*

A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato[1]

Inclusion of Blind Student in the Mathematics Classroom: Tactile Exploration of Area, Perimeter and Volume

Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes[2]
Lulu Healy[3]

Resumo

Desde os anos 90 tem havido um movimento crescente para incluir aprendizes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Na sala de aula inclusiva de Matemática, professores têm enfrentado a complexa e árdua tarefa de planejar e organizar atividades de aprendizagem para aprendizes que enfrentam uma variedade de desafios. Neste artigo, focamos aprendizes cegos de matemática. Por nossa perspectiva, para construir uma Educação Matemática inclusiva, é necessário entender as particularidades dos processos de aprendizagem daqueles sem acesso ou com acesso limitado ao campo visual. Para tanto, apresentamos neste artigo nossas tentativas de elaborar materiais que permitam a exploração tátil de figuras geométricas, para que aprendizes cegos possam construir entendimentos sobre os conceitos de área, perímetro e volume de uma variedade de formas geométricas. Descrevemos interações dos alunos com o material, deles entre si e com o professor, dando atenção especial aos diálogos matemáticos e aos gestos que emergem durante a realização das tarefas.

[1] Texto de mesmo teor foi publicado nos Anais do IX ENEM, 2007, com o título "As Concepções de Alunos Cegos para os Conceitos de Área e Perímetro".

[2] Doutora em Educação Matemática. Departamento de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN. Endereço para correspondência: Av. Braz leme, 3029, São Paulo, SP, CEP 02022-011. E-mail: solangehf@gmail.com

[3] Doutora em Educação Matemática. Departamento de Pós-Graduação em Educação Matemática Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN. Endereço para correspondência: Av. Braz leme, 3029, São Paulo, SP, CEP 02022-011. E-mail: lulu@pq.cnpq.br

Palavras-chave: Cegueira. Educação Especial. Educação Matemática. Geometria. Ferramentas Táteis.

Abstract

Since the 1990s, there have been increasing moves to include learners with special educational needs within the mainstream system. In the inclusive mathematics classroom, teachers are faced with the complex and formidable task of designing and organizing learning activities for learners who face a variety of different challenges. In this article, we focus on the blind mathematics learner. In our view, in order to construct a more inclusive mathematics education, it is necessary to understand the particularities of the learning processes of learners with limited or no access to the visual field. To this end, in this paper we present our attempts to elaborate materials which permit the tactile exploration of geometrical figures, so that blind learners might build understandings of the areas, perimeters and volume of a range of geometrical shapes. We describe the interactions of the students with the materials, with each other and with the teacher, giving special attention the mathematical dialogues and gestures which emerged during tasks resolution.

Keywords: Blind Learners. Special Education. Mathematics Education. Geometry. Tactile Tool.

Motivação

A inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais como prática educativa, que tomou impulso no Brasil a partir da década de 90, tem imposto a sociedade de modo geral e aos educadores em especial um *revisitar* de suas concepções e crenças sobre o que se considera *diversidade*. As discussões, que a princípio ficavam restritas a poucos, atingem todas as camadas e níveis sociais, e de algum modo todo cidadão tem uma opinião formada sobre os direitos e os deveres das pessoas com necessidades especiais, e sobre o papel da sociedade no que se refere à formação de uma consciência inclusiva. Há atualmente o reconhecimento de que é preciso conhecer a diversidade para que se possa aprender com ela.

Apesar das leis destinadas a normatizar o processo de inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais, muitas pessoas ligadas a Educação afirmam não se sentirem preparadas para enfrentar tal desafio

(FERNANDES; HEALY, 2007). Nem sempre nossas concepções encontram respaldo nas práticas cotidianas e nos aparatos institucionais. Na verdade, nota-se que a partir das políticas de inclusão há a necessidade de preparar a comunidade educacional para receber estes alunos. Dentre as muitas incertezas, singularidades e conflitos de valores que ocupam nossas mentes, certamente as questões que se relacionam as nossas *ações pedagógicas* têm um papel central. Neste contexto, nos últimos anos, nossos estudos têm como um de seus fins, promover ações concretas destinadas a favorecer o *fazer pedagógico* de educadores que nos últimos anos têm acolhido aprendizes sem acuidade visual dentro dos padrões normais em suas salas regulares.

Neste artigo traremos algumas reflexões sobre práticas pedagógicas destinadas a favorecer o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos de área, perímetro e volume. Os dados que apresentamos foram coletados durante o desenvolvimento de um projeto[4] financiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), no qual trabalhamos por vinte e sete meses tendo como parceiros professores, alunos e dirigentes de uma escola pública do Estado de São Paulo.

Preparando o processo empírico

De modo geral, os conceitos matemáticos escolhidos para serem abordados durante a realização do projeto citado eram conceitos elementares ligados a Geometria Plana e Especial que fazem parte do núcleo comum dos currículos das escolas estaduais do Estado de São Paulo. Nosso intento é colaborar para que os problemas cotidianos sejam contornados, pois acreditamos que a partir do domínio desses poderemos oferecer a todo aprendiz, portadores de necessidades educacionais especiais ou não, maior acesso a conceitos matemáticos.

Neste artigo, pretendemos analisar as estratégias empregadas por aprendizes cegos para a determinação de área e perímetro de figuras planas e o volume de figuras espaciais, e a influência dos instrumentos de medição oferecidos aos alunos para a realização dessas tarefas. Iniciamos nossos

[4] Projeto *A Inclusão de Aprendizes com Deficiências Visuais nas Aulas de Matemática: O Caso de Geometria,* financiado pela FAPESP, Processo No. 2004/15109-9.

trabalhos levantando dados oriundos de pesquisas precedentes, como a de Pavanello (2004), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Nunes, Light e Mason (1993) que desenvolveram investigações envolvendo esses conceitos matemáticos com aprendizes videntes. Em todas essas pesquisas, os pesquisadores constatam que a escolha dos instrumentos de medição utilizados em determinadas tarefas influenciam os resultados obtidos.

Pavanello (2004), a partir de análises de uma pesquisa realizada com 270 alunos do Ensino Fundamental, declara que a elaboração do conceito de área necessita da compreensão de dois processos. Um desses processos, freqüentemente utilizado no Ensino Fundamental para a introdução do conceito de área de uma superfície plana, consiste em fixar uma unidade de área e a partir desta escolha, verificar: "quantas vezes a unidade cabe na figura". Desse modo, a cada superfície é associado um número e a comparação de duas ou mais superfícies se reduz à comparação desses números, ou seja, as medidas de suas áreas. Com esse tipo de procedimento professores incentivam seus alunos a determinar as fórmulas para o cálculo da área de uma figura. Um segundo processo permite comparar superfícies tendo como fundamento a igualdade de figuras por sobreposição. Desta forma, duas superfícies planas têm mesma área se coincidem, e essa verificação é feita por *sobreposição* ou *decomposição/composição* da figura, sem a utilização do conceito de medida de área. Para essa pesquisadora, o primeiro processo permite verificar que, ao adotar diferentes unidades de superfície, obtêm-se diferentes valores numéricos para sua área, enquanto o segundo pode levar a compreensão de que superfícies diferentes podem ter a mesma área. Tal perspectiva corrobora com os estudos de outros autores, como Douady e Perrin-Glorian (1989) e Nunes, Light e Mason (1993).

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), a construção do conceito de área deve envolver a distinção entre área de uma superfície e o valor numérico atribuído a ela. Essas autoras destacam que certas dificuldades freqüentemente são observadas nos trabalhos dos alunos, entre elas, dissociar a área de uma superfície de outras características desta superfície, por exemplo, com freqüência os alunos consideram que se o perímetro de uma superfície aumenta, a sua área também aumenta (e reciprocamente), ou então que se duas superfícies têm o mesmo perímetro devem ter mesma área. Os estudos de Furinghetti e Paola[5] (apud OWENS; OUTHRED, 2006, p.103) reforçam esses resultados ao apontar que os textos produzidos pelos alunos mostram evidências de confusão entre área e perímetro e a crença de que existe uma relação direta entre um e outro.

A pesquisa desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian, destinada ao estudo do processo de aprendizagem do conceito de área, baseou-se nas seguintes hipóteses: (a) desenvolver o conceito de área enquanto grandeza permite que os alunos estabeleçam relações entre os quadros geométricos e numéricos; (b) uma identificação precoce entre grandezas e números pode acarretar conflitos entre comprimento e área. Em suas análises, essas autoras enfatizam que intervenções de ensino que evocam os quadros geométricos e numéricos propiciam certo efeito na dissociação entre área e perímetro, mas insuficiente para alterar de maneira estável as concepções de alguns alunos.

Nunes, Light e Mason (1993), desenvolveram um estudo empírico que envolveu duas tarefas: a comparação de comprimento de segmentos e a comparação entre duas superfícies. Para a realização da primeira tarefa, foram oferecidos aos alunos três diferentes instrumentos de medição, barras sem graduação, réguas com graduação incomum e réguas graduadas (convencionais). Na segunda tarefa foi solicitado aos alunos que avaliassem, qual entre duas superfícies era a maior, para realização de tal tarefa foi disponibilizado aos alunos instrumentos de medição como régua e unidades de área (pequenos cubos). O modo como foi oferecida a tarefa, desenhos num papel, não permitia usar a estratégia da sobreposição. Nas análises relativas à primeira tarefa os autores concluem que o uso de instrumentos convencionais – réguas graduadas – favorece os resultados positivos obtidos pelos alunos. Na segunda tarefa os resultados mostraram que há uma estreita relação entre o número de respostas corretas e a aplicação de uma estratégia de medição baseada na contagem de unidades de área, sendo esses resultados expressivamente superiores ao número de acertos quando os alunos determinam a área de figuras planas usando réguas convencionais. Ainda em

[5] FURINGHETTI, F.; PAOLA, D. Exploring students' images and definitions of area. In: PME INTERNATIONAL CONFERENCE, 23, 1999, Haifa. in O. Zaslavski (editor), **Proceedings of PME 23** (Haifa), 1999. v.2, p. 345-352.

relação à área, Doig, Cheseman e Lindsey[6] (apud OWENS; OUTHRED, 2006, p.102), declaram que numa atividade experimental os alunos que usaram palitos de madeira para cobrir uma superfície tiveram duas vezes mais sucesso na determinação da área do que aqueles que usaram papel quadriculado. Os resultados desses e de outros estudos indicam que atividades práticas com unidades de medição não convencionais são recomendáveis, desde que posteriormente haja conexão dessas atividades com a formalização dos conceitos envolvidos.

Em resumo, estudos realizados com alunos videntes, constatam que a escolha dos instrumentos de medição utilizados em determinadas tarefas influenciam os resultados obtidos. Nossa proposta é avaliar se esses resultados são consistentes no caso de aprendizes cegos, e investigar quais estratégias e práticas podem ser associadas ao êxito na realização das tarefas. Apoiando-nos na pesquisa de Nunes, Light e Mason (1993) decidimos usar unidades de área (pequenos cubos) em tarefas para alunos cegos. Em nosso caso, o estudo do volume de sólidos geométricos emergiu naturalmente com o andamento da pesquisa.

Estudo

Inicialmente apresentaremos as análises relativas a uma das sessões destinadas ao estudo dos conceitos de área e perímetro, realizada com quatro aprendizes cegos trabalhando em duplas. Cada uma das duplas desenvolveu as atividades com uma pesquisadora, assim cada dupla realizou uma sessão de aproximadamente sessenta minutos. Estas sessões foram videogravadas, o que favorece a análise das estratégias empregadas pelos alunos, já que elas dependem em grande parte das ações dos sujeitos sobre as ferramentas oferecidas. Tão importante quanto às ações são os diálogos estabelecidos entre pesquisadoras e aprendizes e desses últimos entre si, pois esses nos oferecem indícios para que possamos analisar as estratégias empregadas pelos aprendizes. Uma conjectura que orienta nossas pesquisas é que as práticas

[6] DOIG, B.; CHESEMAN, J.; LINDSEY, J. The medium is message: Measuring area with different media. In: PME ANNUAL CONFERENCE, 18, 1995, Galtha. **Proceedings...** Darwin, Australia: MERGA, 1995. p. 229-234.

dos aprendizes em qualquer situação de aprendizagem estão intimamente ligadas aos sistemas mediadores - ferramentas materiais e linguagem - disponíveis durante as interações.

Em termos de diálogo instrucional, Renshaw (1996, p. 64) destaca que é particularmente relevante, quando examinamos a aplicação da teoria sociocultural, perceber que os *pseudoconceitos* ocupam uma posição crucial na possibilidade destes diálogos. Os pseudoconceitos, de acordo com Vygotsky (1998a), situam-se entre os conceitos imaturos e uma forma mais madura de conceitos, e é essa posição intermediária que cria a possibilidade de diálogos entre aprendiz e instrutor, onde paradoxalmente um desequilíbrio na estrutura cognitiva do aprendiz pode produzir uma mudança conceitual - ou um "mal-entendimento produtivo[7]" (NEWMAN; GRIFFIN; COLE, 1989). Explorando esse paradoxo que ocorre durante a interação com o instrutor, o aprendiz começa a usar palavras de modo parecido ao usado pelo instrutor, mas, de fato, o instrutor entende as palavras de maneira mais geral e abstrata que o aprendiz, ou seja, o instrutor fala a "voz matemática" que pode ser gradativamente apropriada pelo aprendiz.

Assim, Renshaw (1996) descreve o instrutor de uma situação de aprendizagem como aquele que conduz os aprendizes a empregarem a voz matemática: inicialmente, os aprendizes ingressam no diálogo com uma variedade própria de gêneros de discursos e o instrutor mostra uma maneira particular de falar, encorajando os aprendizes a "ventricular" (falar com) sua voz (p. 74).

Neste artigo queremos investigar como as ferramentas, materiais e dialógicas, oferecidas para a resolução de problemas associados à determinação da área e do perímetro de figuras planas, influenciam os procedimentos de medições aplicados por alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais e contribuem para suas concepções sobre os objetos em estudo. Deste modo, para realização das tarefas os aprendizes recebiam estímulos de pelo menos dois instrumentos, o que nos levou a utilizar uma metodologia inspirada no trabalho de Vygotsky.

Contrapondo-se aos métodos de experimentos psicológicos baseados

[7] Nossa tradução para *productive misunderstanding*.

numa estrutura estímulo-resposta, Vygotsky e seus colaboradores (1998a, p.77-99) propuseram uma metodologia na qual as análises dos dados não se limitavam ao nível do desempenho como tal, mas aos processos pelos quais o desempenho foi atingido. Três princípios norteavam os trabalhos de Vygotsky e de seus colaboradores. O primeiro centrava-se em *analisar processos e não objetos*, isto é, centrava-se na análise dos processos de desenvolvimento que conduziram o sujeito experimental a determinada resposta. O segundo *explicação versus descrição,* em outras palavras, uma análise explicativa ao invés de descritiva, que procura determinar as relações dinâmico-causais entre os estímulos externos e as respostas internas que são à base das funções superiores. O terceiro *problema do "comportamento fossilizado"* direcionava-se a analisar o desenvolvimento das formas superiores de comportamento, alterando o caráter mecanicista e fossilizado dessas formas de comportamento, por exemplo, as reações formuladas por um treinamento repetitivo. Vygotsky nomeou esse método de *método funcional da dupla estimulação*, no qual "dois conjuntos de estímulos são apresentados ao sujeito; um como objeto de sua atividade, e outro como signos que podem servir para organizar essa atividade" (VYGOTSKY , 1998b, p.70).

Quanto às atividades a serem elaboradas e aplicadas aos sujeitos, Vygotsky postulava que um experimento deveria ter por objetivo estudar "o curso do desenvolvimento de um processo" e para isso deveria oferecer o máximo de oportunidades para que o sujeito experimental se engajasse nas mais variadas atividades, que deveriam ser observadas e não rigidamente controladas (COLE; SCRIBNER, 1998, p. 16). Assim, os dados fornecidos por esse experimento não indicariam apenas o nível de desempenho como tal, mas o método pelo qual o desempenho foi atingido. Deste modo, o ambiente experimental torna-se um contexto de investigação em que o pesquisador pode manipular sua estrutura para desencadear (mas não produzir) a construção pelo sujeito de novas formas de resolver problemas.

Em suma, uma das principais características do método da dupla estimulação é o modo como se orienta e observa-se o desenvolvimento da atividade pelo sujeito. Por essa técnica experimental o sujeito é colocado "frente a uma tarefa que excede em muito os seus conhecimentos e capacidades" (COLE; SCRIBNER, 1998, p. 17). Essa tarefa é proposta dentro de uma situação estruturada e o sujeito recebe uma orientação ativa, por parte do pesquisador, no sentido da construção de uma estratégia (que ainda não existia para o sujeito) para a realização da tarefa (VEER; VALSINER, 1996, p. 187), o que o permite acessar a zona de desenvolvimento proximal (VYGOTSKY, 1998b, p.70).

Em atividades experimentais, as tarefas são propostas e executadas a partir das ferramentas materiais cujo papel é oferecer a primeira série de estímulos aos sujeitos. Um segundo conjunto de estímulos é proporcionado pelas ferramentas semióticas que emergem durante as intervenções feitas pelas pesquisadoras e pelos parceiros das atividades.

As ferramentas utilizadas foram desenvolvidas especialmente para este estudo (Figura1). Na elaboração destas, nosso principal foco foi o favorecimento de estímulos hápticos, tendo em vista que este é um dos principais canais de aquisição de informação para esses aprendizes.

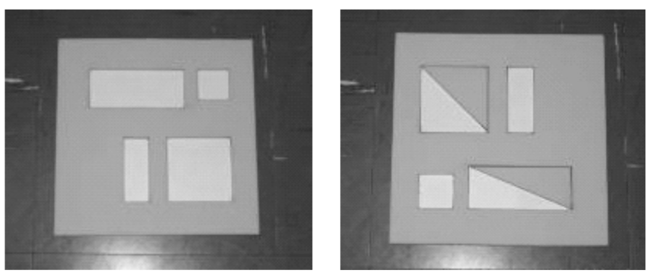

Figura 1a **Figura 1b**

Figura 1 – Prancha para o estudo de área e perímetro

As ferramentas foram confeccionadas sobre placas de madeira retangulares com medidas de 25 cm por 30 cm. Sobre as placas foram fixadas lâminas de EVA, na quais as figuras geométricas foram recortadas. A apresentação das formas geométricas em baixo relevo, além de favorecer o reconhecimento das formas através do tato, permitia que os alunos cegos pudessem medir os lados ou completar as figuras com os pequenos cubos de madeira utilizados como unidade de medidas. Na Figura 1a estão representados dois quadrados cujas medidas dos lados são 4 cm e 8 cm respectivamente; e dois retângulos cujas dimensões são 8 cm por 3 cm e 5 cm por 12 cm. A Figura 1b destinou-se ao cálculo da área de um triângulo, para isso ocultamos metade da área de duas das figuras representadas na Figura 1a.

Sendo nosso objetivo desenvolver uma série de atividades cujo objeto matemático em estudo seria o cálculo do volume de sólidos geométricos, as atividades aqui apresentadas destinavam-se a identificação do método empregado pelos aprendizes para o cálculo da área e do perímetro de figuras planas e a estruturação de tais conceitos para prosseguirmos com nossa pesquisa. Optamos por trabalhar com unidades de medidas convencionais usando a escala 1:1, para isso, usamos cubos de madeira com arestas medindo um centímetro, ou seja, trabalhamos exclusivamente com números inteiros. A escolha dos cubos como unidade de medida foi influenciada, em parte, pelos resultados de pesquisas com alunos videntes, mas também pela pouca familiaridade que os aprendizes que participaram deste estudo têm no uso da régua – geralmente as tarefas propostas a estes alunos em suas aulas de Matemática apresentam as figuras geométricas com as respectivas medidas, ou seja, a prática é medir para eles. Entretanto, embora tenhamos privilegiado no primeiro momento interações com os cubos, réguas graduadas adaptadas para alunos cegos e com baixa visão também estavam disponíveis, assim, com a progressão das tarefas, os alunos poderiam escolher qual ferramenta utilizar para efetuar medidas.

Os quatro alunos que participaram deste estudo são portadores de cegueira congênita, e fizeram o Ensino Fundamental em Escolas Especiais. Ingressaram na escola pública que acolheu nosso projeto para fazer o Ensino Médio e neste texto atribuímos a cada um deles um pseudônimo: Caio e Marcos; Leandro e Fábio foram as duplas que participaram deste estudo.

Falas iniciais sobre área e perímetro

Considerando que os conceitos matemáticos a serem abordados nas atividades são conceitos usualmente desenvolvidos nos Ensinos Fundamental e Médio, iniciamos a sessão investigando as concepções de cada um dos aprendizes a respeito dos conceitos de perímetro e área.

Fábio: Perímetro é toda a extensão da figura. Área é o espaço interno.
Leandro*: Perímetro é todos os lados. É o contorno da figura. Área é o espaço interno.*
Caio: Perímetro seria o comprimento da figura. Área seria toda a extensão da figura.
Marcos: Área é o tamanho e perímetro é a volta.

Os trechos transcritos acima indicam que os termos *área* e *perímetro* não são novos para esses aprendizes. No entanto, nem todos explicitaram definições consistentes para esses conceitos matemáticos. Expressões como *área é o espaço interno* e *perímetro todos os lados*, dos dois primeiros, ou mesmo *área é o tamanho e perímetro a volta*, poderiam indicar certa apropriação dos conceitos, ou ser indícios de um ecoar de vozes, ou seja, nos parece que estes aprendizes *ventriculam* as palavras dos professores ao trabalhar tal conteúdo em suas aulas regulares. No entanto este ecoar nos indica que há ao menos um *conceito ingênuo* que cria a possibilidade de diálogos entre aprendizes e pesquisadoras.

Primeira atividade

A cada dupla de aprendizes oferecemos uma prancha (Figura 1a) para exploração tátil. A seguir, pedimos a cada um que escolhesse uma das formas menores preenchidas com pequenos cubos. Assim, o quadrado e retângulo menores foram compostos por 16 e 24 cubos respectivamente. A tarefa foi proposta da seguinte maneira: *A idéia deste exercício é calcular a área e o perímetro dessas figuras. Essas duas* (quadrado e retângulo menores) *já estão preenchidas. Vamos ver se vocês conseguem calcular o perímetro e a área de todas elas.*

O trabalho de Marcos
Marcos*:* (explorando retângulo pequeno) *A área é 24 centímetros.*
Pesquisadora 1: Como você calculou?
Marcos*: Aqui* (no comprimento) *tem 8, cada um tem um centímetro*

e na altura tem 3. Eu multipliquei 8 por 3 tem 24.
Pesquisadora 1: Então você contou uma linha e multiplicou por 3.
Marcos: É eu fiz 8 vezes 3.
Pesquisadora 1: E o perímetro?
Marcos: Perímetro?
Pesquisadora 1: Perímetro é o contorno. Você tem que medir cada um dos lados e somar.
***Marcos**: Aqui dá 3* (indicando as duas alturas da figura com as mãos). *3 com 3 dá 6. Aqui tem 8* (indicando o comprimento) *com 8 dá 16. O perímetro é 22.*

O trabalho de Caio
Caio: (explorando o quadrado pequeno) *De área tem 12 e de perímetro tem o mesmo.*
Pesquisadora 1: Como você calculou?
***Caio**: Como cada cubo tem um centímetro, aqui temos 4, aqui mais 4 e mais 4. Seriam 12 certo? Ah não! São 16. 16 de área, porque cada cubinho tem um centímetro. E o perímetro também seria 16.*

No caso de Marcos e Caio a unidade de área não ofereceu obstáculos para a realização da atividade, ambos obtiveram resultados positivos. Marcos atribuiu a medida de 1 centímetro para as arestas dos pequenos cubos, talvez por essa medida lhe ser mais familiar. O questionar de Marcos sobre perímetro é um indício de que sua fala no início da entrevista foi mesmo *eco* das palavras do seu professor ao desenvolver tal conteúdo. Sua dúvida sobre esse conceito só foi superada quando a pesquisadora interveio inicialmente reproduzindo a definição dada por Marcos para perímetro e posteriormente oferecendo um procedimento para o cálculo. Neste ponto da entrevista não é possível afirmar se Caio, seu parceiro, de fato realizou a tarefa aplicando seus conhecimentos, ou se ele *ventriculou* as palavras de Marcos ou ainda apropriou-se da “voz matemática” proferida pela pesquisadora. A resposta para essa questão apresentou-se nas tarefas seguintes.

O trabalho de Fábio

***Fábio**: (explorando o quadrado pequeno) Contando os quadradinhos é 4 por 4. O perímetro é 16.*

Pesquisadora: E a área? Como você calcularia a área?

Fábio: Eu não sei.

Pesquisadora: Você me disse que a área é todo espaço. E todo espaço ai está preenchido por esses quadradinhos. Como você pode saber a área composta por todos esses quadradinhos?

***Fábio**: Só se for contando* (conta cada um dos cubos). *Ai, no caso, teria 16.*

Com muita facilidade, Fábio ofereceu a resposta correta para o perímetro da figura. Quanto à área, mais uma vez a definição apresentada no início foi apenas o *ecoar* da voz do seu professor. As dúvidas de Fábio em relação à área só foram superadas quando a pesquisadora *ventricula* sua voz e a complementa associando área ao preenchimento da figura, ou seja, atribui a *todo o espaço* o sentido de composição de figuras. Deste modo, para Fábio o uso da unidade de área foi decisivo, pois seu êxito na atividade deu-se após a intervenção da pesquisadora que implicitamente sugeriu que a área poderia ser determinada se ele percebesse que a figura era composta por áreas menores. A última fala de Fábio apresentada no trecho, indica que a intervenção da pesquisadora associada a estratégia proporcionada pela ferramenta material favoreceu uma aproximação entre os significados atribuídos a área e perímetro por Fábio e pela pesquisadora.

O trabalho de Leandro

***Leandro**:* (explorando o retângulo menor) *O perímetro da minha figura é 22.*

Pesquisadora: E a área?

Leandro: Não sei.

Pesquisadora: O que vocês disseram que era a área?

Leandro: O espaço interno.

Pesquisadora: Nesta figura que está cheia de quadradinhos qual seria

a área?
Leandro: Eu acho que é 6.
Pesquisadora: E como você calculou?
Leandro: Eu deixei o contorno de lado e contei só os quadradinhos de dentro.
***Pesquisadora**: Mas se eu tirar o contorno ficam espaços vazios* (tira alguns cubos que compõe o retângulo).
Leandro: Então tem 24.
Pesquisadora: E como você fez?
Leandro: 8, 8, 8 deu 24.
Pesquisadora: Você fez 8 vezes o 3?
Leandro: É e deu 24.

Leandro respondeu corretamente sobre o perímetro na primeira tentativa. No caso da área, apresenta a mesma dúvida que Fábio. Leandro, que havia presenciado o diálogo entre a pesquisadora e Fábio; não se apropriou do debate. Talvez sua resposta inicial para *o que é área* tenha sido um *eco* da definição dada por Fábio. A pesquisadora tenta estabelecer com Leandro um diálogo similar ao estabelecido com Fábio. No entanto sua resposta para a área indicou ser a escolha da unidade de área um impedimento para a resolução do problema. Ao concentrar-se no espaço interno da figura, Leandro acabou descartando todo seu contorno, sem perceber que a esse se agregava parte da superfície da figura. Tal impasse só foi resolvido quando a pesquisadora o fez perceber, retirando alguns cubos que compunham o contorno, que ao desconsiderar o contorno da figura, na verdade ele estava descartando parte de sua área. Ao justificar sua resposta final Leandro dá indícios, através de seus gestos, de que está contando as filas para determinar a área da figura.

Segunda atividade

Os cubos que compunham as duas figuras menores eram insuficientes para preencher completamente as duas outras formas apresentadas na prancha: um quadrado com lados medindo 8 centímetros e um retângulo com dimensões

12 centímetros e 5 centímetros. A segunda atividade consistia em calcular o perímetro e a área dessas formas, utilizando os cubos disponíveis em cada uma das figuras menores como instrumentos de medidas. Destacamos que os aprendizes trabalharam em duplas numa mesma prancha, assim os cubos deveriam ser partilhados entre eles. As pesquisadoras iniciam a atividade com a seguinte fala: *É possível calcular o perímetro e a área das figuras maiores sem preencher toda a figura?*

O trabalho de Marcos

***Marcos**:* (explorando o retângulo maior completa com os cubos o comprimento e a altura do mesmo) *Eu acredito que essa figura tenha 60 de área e perímetro 34.*

Pesquisadora: Então vamos discutir por quê?

***Marcos**: Cada linha dessas* (comprimento) *tem 12 quadradinhos desses* (cubos). *São 5 linhas para preencher a figura toda, então são 60. E de perímetro são 12* (comprimento) *mais 5 aqui* (altura)*, 17 mais 5 aqui, 22 e mais 12, 34.*

O trabalho de Caio

***Caio**:* (explorando o quadrado maior) *A área da minha figura é 64 e o perímetro 32.*

Pesquisadora: E como você calculou?

***Caio**: A área eu preenchi uma linha* (comprimento) *e deu 8. Depois eu preenchi aqui* (altura) *deu 8, então a área é 64. Perímetro, imaginando que todas estivessem com 8, 8 aqui* (comprimento)*, mais 8 aqui* (altura) *16, 16 mais 16 é 32.*

A falta de cubos para preencher toda a superfície da figura com a qual estavam trabalhando causou certo desconforto inicial. Caio que na primeira atividade havia trabalhado com o quadrado menor, ao perceber não tinha cubos suficientes para preencher o retângulo maior, passou a pegar os cubos do retângulo menor que estavam sendo usados por Marcos nessa atividade. A intervenção da pesquisadora o fez rever sua estratégia: *Agora Caio você tem um problema porque você não tem cubos suficientes para preencher* *toda a figura*. Caio que tinha duas linhas do retângulo preenchidas, começou a rearranjar seus cubos para que pudesse determinar a altura do retângulo.

Marcos e Caio aplicam a mesma estratégia para a determinação da área e do perímetro completam o comprimento e a altura da figura a seguir, *imaginam* um número de linhas igual à altura, completamente preenchidas e concluem os cálculos. A justificativa de Caio para sua resposta sugere que sua estratégia vai além de uma imitação do procedimento realizado por Marcos. A estratégia empregada por Marcos para o cálculo do perímetro indica que a introdução da voz matemática feita pela pesquisadora na tarefa anterior colaborou para a formulação de um conceito mais formal para o perímetro de figuras planas.

O trabalho de Fábio

Fábio: (explorando o retângulo maior) *O perímetro é 34.*
Pesquisadora: Como você achou 34?
***Fábio**: Eu somei 12 com 12* (indica os dois lados paralelos de maior medida)*, 24, mais 5 mais 5* (indica os dois lados paralelos de menor medida) *dá 34.*
Pesquisadora: E a área?
***Fábio**: A área dá 60. Eu multipliquei 12* (indica o comprimento da figura) *por 5* (indica cada uma das linhas que compõe a figura).

O trabalho de Leandro

Antes de iniciar a segunda atividade, Leandro voluntariamente explora o quadrado menor ainda preenchido pelos cubos e declara:

> O perímetro é 12 e a área é 16. Eu tenho 16 quadradinhos e no contorno eu tirei 4 de dentro e sobrou 12.
> ***Pesquisadora**: E a outra figura?* (quadrado maior)
> ***Leandro**:* (explorando o quadrado maior posiciona os cubos no comprimento e na altura e pede para corrigir a área do quadrado menor) *A área é 16 porque colocando todos os quadradinhos aqui* (comprimento) *ele formaria 4 carreiras de 4, o que dá 16. O*

> *perímetro eu deixei de contar os cantos, porque eu já tinha contado ele aqui* (indicando o comprimento da figura). *Não contei quando contei aqui* (altura), *então tem área e perímetro 16.*
> ***Pesquisadora****: E a figura maior?* (quadrado maior)
> ***Leandro****: O perímetro é 32 e a área é 64.*

Fábio aplica a mesma estratégia de Marcos e Caio para determinar da área e o perímetro, completa o comprimento e a altura da figura e *imagina* a figura completamente preenchida para concluir os cálculos. Marcos e Caio verbalizam tal procedimento, enquanto Fábio o deixa explícito através dos gestos que faz durante sua justificativa à pesquisadora indicando as linhas imaginárias que compõem a figura.

Nesta atividade parece-nos que Leandro superou o impasse apresentado na atividade anterior em relação à área, no entanto um novo bloqueio emergiu. Explorando o quadrado menor preenchido pelos cubos, Leandro confunde-se no cálculo de seu perímetro. Era estranho para ele contar duas vezes o mesmo cubo, mesmo que considerando dimensões distintas. Leandro só percebeu que na verdade contaria arestas distintas do cubo ao fazer as medições no quadrado menor, o que o fez retificar sua primeira assertiva a respeito da área do quadrado menor. Suas respostas corretas para a segunda atividade parecem ter sido resultados do seu trabalho com o quadrado menor.

Um método geral

Uma de nossas intenções era verificar se os *conceitos ingênuos* apresentados pelos aprendizes na fase que antecedeu as atividades haviam atingido o nível de um conceito geométrico mais abstrato que pudesse conduzir a um método geral para o cálculo da área e do perímetro de quadriláteros.

> **Pesquisadoras**: Se tivéssemos um retângulo com lados 5 e 8, qual seria sua área e seu perímetro?

Inicialmente os aprendizes apresentaram dificuldades para realizar essa tarefa. Ambas as pesquisadoras sugeriram aos aprendizes que usassem os cubos para simular as figuras, o que colaborou para que as dificuldades fossem superadas e deixou evidente a estratégia empregada. Mário e Caio apóiamse na prancha para simular a figura. Usaram as figuras maiores da prancha com o número de cubos adequado para compor o comprimento e a altura do retângulo proposto pela pesquisadora. Ambos contam o número de linhas que compõe a altura da figura para a determinação da área. Quanto ao perímetro, o *imaginar* acaba sendo prejudicado pelo espaço vazio deixado pelos cubos sobre as formas apresentadas na prancha, e seu valor correto só é apresentado após intervenções da pesquisadora e o debate que os parceiros estabelecem entre si.

> ***Caio**: 5 por 8. A área seria 40 e o perímetro... é um retângulo.* (aproximadamente 2 minutos de pausa)
> ***Marcos**: 5 por 8. O perímetro é 24.*
> **Pesquisadora**: Como você está pensando?
> **Marcos**: Porque 5 por 8 a área seria 40.
> **Pesquisadora**: Você está imaginando 5 linhas de 8?
> ***Marcos**: É eu imaginei ... mas está errado* (Passa a usar a ferramenta para mostrar sua estratégia) *... que seriam só 3 linhas assim* (indicando as linhas horizontais imaginárias compostas por oito cubos) *e 3 assim* (indicando colunas internas imaginárias a figura compostas por 3 cubos). *Está errado.*
> ***Pesquisadora**: Então faz usando os quadradinhos agora.* (posiciona na ferramenta uma fila com 8 quadradinhos e uma coluna com 5, formando um L).
> ***Marcos**: Todas essas linhas estariam preenchidas, não é?*
> **Pesquisadora**: Sim.
> **Marcos**: O perímetro é 26.
> **Caio**: É, duas linhas com 8, 16, mais duas com 5, 10, dá 26.

Leandro posiciona sobre a mesa uma figura com a forma de um L (Figura 2), cujos lados são compostos por 8 e 5 cubos respectivamente, criando para si um signo que poderá ajudá-lo a superar os impasses apontados nas atividades anteriores e o permitirá calcular a área de figuras planas. Ele passou a decompor as figuras em filas, e destas considerou sua área, bastando assim somar as áreas das filas que compõe a figura para obter sua área total.

Leandro: Eu fiz uma carreirinha com 8 e uma com 5, então o perímetro é 26. Para a área falta completar. Eu fiz como se estivesse completando. Eu fiz 8 vezes 5 carreiras que dá 40.

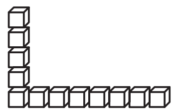

Figura 2 – O signo de Leandro

Fábio foi o único participante que não se apoiou nos cubos nem na prancha para simular a figura. Ao dar sua resposta para o perímetro vai indicando com as mãos os lados de uma figura imaginária sobre a mesa enquanto faz a soma das medidas dos seus lados.

Fábio: Perímetro 26. 8 e 8, 16. 16 mais 10, 26. Área 40, porque 5 vezes 8 é 40.

A estratégia de decompor as figuras planas em linhas de área, aplicada pelos aprendizes, nos estimulou a trabalhar o conceito de volume. Uma de nossas conjecturas que emergiu durante a realização dos cálculos para área foi que talvez nossos aprendizes pudessem estender essa estratégia para o cálculo do volume, aproximando-se do princípio postulado por Cavalieri (1598–1647) para comparação de volumes de sólidos diferentes: *duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume*. Para o cálculo do volume, o método das secções transversais que conduz a decomposição do sólido em *fatias de áreas* que pode ser utilizado para definir o conceito de volume de sólidos. Na figura abaixo exemplificamos o Princípio de Cavalieri com um empilhamento de moedas.

Fonte: Cavalieri's_principle.jpgý

Figura 3 – O volume de um cilindro

Volume do paralelepípedo

Numa segunda sessão, dando seqüência ao estudo de área e a fim de conduzirmos os aprendizes à determinação do volume de sólidos geométricos, propomos uma atividade em duplas. Cada dupla recebeu em duplicata um tipo de sólido planificado (cubo e paralelepípedo) confeccionado em papel cartão. A atividade foi proposta como uma disputa entre as duas duplas, e consistia em determinar qual das duas embalagens seria economicamente mais interessante para uma indústria. Ao receber as formas, os participantes passaram a fazer as dobras vincadas no papel para perceber de que tipo de embalagem se tratava. Para realizar a tarefa, disponibilizamos aos aprendizes réguas graduadas adaptadas e os pequenos cubos com os quais já estavam familiarizados. Nosso foco neste artigo é observar as estratégias de Leandro para resolver tais questões.

A determinação do volume do paralelepípedo por Leandro e seu parceiro (Marcos) ocorreu 20 minutos após a solicitação da proposta. Neste ponto das atividades, os alunos manifestaram o desejo de usar a régua para fazer as medidas das arestas dos sólidos, e justificaram que esta tática seria suficiente para avaliar quantos cubos seriam necessários para preencher o interior do sólido. No entanto pela falta de habilidade para o uso da régua coube as pesquisadoras orientá-los para que as medidas fossem realizadas. As análises das estratégias e dos diálogos entre os alunos e as pesquisadoras sugerem que, mesmo implicitamente, os alunos estavam aplicando o Princípio de Cavalieri que auxilia no cálculo de volumes de sólidos. Tal fato nos surpreendeu, pois explicitamente os alunos declararam não ter estudado Geometria Espacial nos seus cursos regulares. Na verdade, Leandro e seu parceiro estavam ampliando a estratégia que desenvolveram na atividade anterior quando estudavam área de figuras planas. Nas Figuras 4 e 5 Leandro, através de gestos, pede ao parceiro que faça *36* – área da base, *vezes 17* – altura do sólido.

Leandro*: Faz 36* (indicando com uma das mãos a área da base da figura) *vezes 17* (indicando várias camadas iguais da camada base que compõem a altura da figura) *assim nós vamos saber quantos cubinhos desses* (indicando o cubo de madeira sobre a mesa) *cabem na embalagem.*

Em outras palavras, ele dividiu o sólido em “filas de áreas” e verificou quantas áreas estavam dispostas na altura do sólido.

Figura 4 – 36...

Figura 5 – vezes 17

Reflexões

A proposta inicial deste estudo era verificar a influência das ferramentas materiais nos procedimentos de medições para a determinação da área e do perímetro de figuras planas. Nossa hipótese era de que tais ferramentas materiais associadas às dialógicas poderiam favorecer a alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais, maior flexibilidade na solução de problemas que envolvam os conceitos matemáticos em estudo, como foi apontado no trabalho com alunos videntes em pesquisas precedentes.

De fato, nossos aprendizes mostram que o trabalho com as unidades de área favoreceu a compreensão dos objetos matemáticos em estudo, e que o emprego desses procedimentos de medição em ferramentas materiais associados às ferramentas dialógicas influencia, na maioria das vezes, positivamente os resultados obtidos, como pode se verificado nas seguintes declarações.

> **Caio**: Muito mais fácil aqui do que como nós aprendemos na sala. Muito mais fácil na prática.
> ***Marcos****: Muito mais fácil do que com a figura* (impressa em Braille no papel).

Os próprios aprendizes reconhecem que ao ingressarem nessa atividade as definições apresentadas inicialmente não correspondiam a um conceito matemático ao qual atribuíam significado.

> **Caio**: Você pode perceber que a gente tinha uma noção, mas não sabia como era.

As transcrições apresentadas no decorrer deste texto apontam que ao iniciarem as atividades os aprendizes empregavam de forma sintaticamente correta os termos *área* e *perímetro – conceitos ingênuos* trazidos pelos aprendizes e que permitiram a emergência e manutenção das práticas dialógicas favorecendo a formulação de conceitos mais maduros e abstratos para esses termos.

A escolha de uma unidade de área para a determinação da área e do perímetro das figuras planas envolvidas neste estudo permitiu que nossos aprendizes desenvolvessem uma estratégia própria para os seus cálculos. A decomposição das figuras dadas em "linhas de área" e a composição dessas linhas para determinar a área da figura dada, parecem-nos uma associação dos dois procedimentos apontados por Pavanello (2004), ou seja, nossos aprendizes fizeram a decomposição da figura dada em "linhas de área", e a seguir compuseram a figura verificando "quantas vezes a linha cabe na figura".

Nossas análises apresentam pontos que nos permitem corroborar com os resultados obtidos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Ao iniciarmos as atividades, os conflitos apresentados entre os termos área, perímetro e dimensões e seus significados geométricos, sugerem que esses alunos foram conduzidos a identificar precocemente grandezas e números o que causou conflitos entre comprimento e área. Nesse caso o procedimento de medição adotado neste estudo parece ter sido benéfico.

Há indícios que nos permitem validar os resultados obtidos por Nunes, Light e Mason (1993) também para alunos sem acuidade visual dentro dos padrões normais. Nas análises relativas às tarefas os resultados mostraram que há uma estreita relação entre o número de respostas corretas e a aplicação de uma estratégia de medição baseada na contagem de unidades de área.

Mesmo para Leandro, os obstáculos encontrados no decorrer das atividades só foram superados pela presença física da unidade de área que o permitiu reavaliar suas respostas anteriores.

O gesto produzido por Leandro, indicando a decomposição das figuras em linhas de área quando empenhado em determinar a área de figuras planas aparece inúmeras vezes durante as interações. Na atividade inicial, quando aconteceu pela primeira vez, tal gesto foi motivado pela ferramenta material posta a disposição do aprendiz. Neste momento, além do seu gesto ter sido empregado com função comunicativa, ou seja, para comunicar à pesquisadora que procedimento havia sido empregado para o cálculo do volume, podemos destacar seu caráter cognitivo, que o permitiu criar uma estratégia que passou a ser empregada em outras tarefas, como na determinação do volume de sólidos geométricos. Em outras palavras, a ativação de diferentes áreas de cognição provocada pela tarefa e pelos recursos disponibilizados (diálogo e ferramentas materiais) permitiu que Leandro formulasse um signo, a princípio externo (Figura 2). Na seqüência das sessões este signo transforma-se num signo interno que passa a fazer parte do repertório de Leandro, sendo empregado até mesmo para a determinação do volume de um paralelepípedo. Este signo interno auxiliou Leandro a desenvolver um *imaginar* para completar as figuras tanto em linhas de área (para determinar área total) como em linhas de superfície (para determinar volume).

Queremos salientar que a cegueira dos aprendizes os impede de imitar diretamente as estratégias e os gestos usados pelos seus parceiros, assim o emprego de estratégias e gestos similares são fruto dos diálogos que permitem que as informações recebidas sejam tratadas e processadas para auxiliarem na formulação de estratégias para solução dos problemas matemáticos propostos.

Consideramos que o uso de ferramentas materiais e dialógicas como as apresentadas neste artigo em salas de aulas inclusivas podem favorecer o processo de aprendizagem para todos os alunos, tenham esses necessidades educacionais especiais ou não. As atividades e ferramentas materiais que utilizamos em nossas pesquisas são de modo geral bastante simples, e normalmente envolvem conceitos matemáticos usualmente desenvolvidos nas escolas regulares. A proposta de inclusão que defendemos é a que favorece ao aluno incluso integrar-se com seus pares e com o saber. Acreditamos que esse tipo de proposta beneficia a todos; deficiente ou não, promovendo uma reestruturação da escola que poderá oferecer uma resposta educativa de qualidade para todos.

Referências

COLE, M.; SCRIBNER, S. Introdução. In: COLE, M. ET al. (Orgs.). **A formação social da mente**. Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998. p. 3-19.

DOUADY, R.; PERRIN–GLORIAN, M.-J. Un processus d´apprentissage du concept d´aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, v. 20.4, p. 387-424, 1989.

FERNANDES, S. H. A. A.; HEALY, L. Ensaio sobre a inclusão na Educação Matemática. **Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNION**, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática – FISEM, v. 10, p. 59-76, 2007. Disponível em http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=27

NEWMAN, D.; GRIFFIN, P.; COLE, M. **The construction zone:** working for cognitive change in school. New York: Cambridge University Press, 1989.

NUNES, T.; LIGHT, P.; MASON, J. Tools for thought: the measurement of length and area. **Learning and Instruction**, London, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1993.

OWENS, K.; OUTHRED, L. The Complexity of Learning Geometry and Measurement. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.) **Handbook of research on the psychology of mathematics education:** Past, present and future (pp. 83-115). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers, 2006.

PAVANELLO, R. M**. Que Geometria pode ser significativa para a vida?** 2004. Disponível em: <www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2004/cm/index.htm>. Acesso em 09 jan. 2006.

RENSHAW, P. A Sociocultural View of the Mathematics Education of Young Children. In: MANSFIELD, H.; PATEMAN, N.; BEDNARZ, N. (Orgs.). **Mathematics for tomorrow's young children**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 59-78.

VEER, R.V. D.; VALSINER, J. **Vygotsky -** uma síntese. Tradução de Cecília C. Bartalotti. 4. ed. São Paulo: Loyola, 1996.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. In: COLE, M. et al. **Coletânea de Ensaios publicados originalmente em russo entre os anos de 1930 a 1935**. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998ª.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998b.

Submetido em novembro de 2009
Aprovado em março de 2010