Contreras, Luis C.; Carrillo, José; Zakaryan, Diana; Muñoz-Catalán, Mª Cinta; Climent, Nuria
Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro
Boletim de Educação Matemática, vol. 26, núm. 42 B, abril, 2012, pp. 433-457
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 0103-636X

Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro*

An Exploratory Study about Student Teachers' Numerical Competences

Luis C. Contreras**
José Carrillo***
Diana Zakaryan****
Mª Cinta Muñoz-Catalán *****
Nuria Climent******

* Investigación financiada por la Universidad de Huelva (Área de formación de PDI y Proyecto de Investigación Educativa: Competencia matemática de los estudiantes para maestro en el ámbito del proyecto PISA -PIE09003), y por los proyectos EDU2009-09789EDUC (Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento) y SEJ2007-6011/EDUC (Multiculturalidad y Matemáticas: Hacia la inclusión de los alumnos de grupos culturales minoritarios).

** Licenciado en Matemáticas, Universidad de Sevilla (US), y Doctor en Psicopedagogía, Universidad de Huelva (UHU), España. Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail:* lcarlos@uhu.es.

*** Licenciado en Matemáticas y Doctor en Filosofia y Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla (US), España. Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de La Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail:* carrillo@uhu.es.

**** Licenciada en Matemáticas, Universidad Estatal de Erevan, Armênia, y Doctora por la Universidad de Huelva (UHU), España. Ex-Becaria del Programa MAE-AECI, España. Dirección postal: Bashinjaghyan 2 nrb. 10/28, Ereván (Yerevan) 0095. Armenia. *E-mail:* dianaz@rambler.ru.

***** Licenciada en Psicopedagogía y Doctora por la Universidad de Huelva (UHU), España. Profesora Contratada de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail:* maria.cinta@ddcc.uhu.es

****** Licenciada en Matemáticas, Universidad de Sevilla (US), y Doctora en Psicopedagogía, Universidad de Huelva (UHU), España. Profesora Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail:* climent@uhu.es.

Resumen

Desde la educación matemática, la formación inicial del maestro debe promover la adquisición de competencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, asumiendo adquiridas, al menos en gran parte, las relativas a la disciplina. Este objetivo se ve mermado por las numerosas y graves lagunas en conocimientos puramente matemáticos de los estudiantes para maestro que acceden a ella, que les impide implicarse en razonamientos didácticos específicos. En este artículo describimos las competencias numéricas deseables en los estudiantes para Maestro y, a través de un estudio exploratorio con alumnos de la Universidad de Huelva, indagamos sobre el grado de adquisición de algunas de ellas.

Palabras-clave: Competencias Numéricas. Conocimiento Matemático. Estudiantes para Maestro Estudio Exploratorio.

Abstract

Concerning mathematics education, primary teachers initial education should encourage the acquisition of competences with respect mathematics teaching and learning, assuming that most of those related to the discipline will be learned. This objective is undermined by the numerous and serious gaps in student teachers' mathematical knowledge which impede them from getting engaging in specific pedagogical reasoning. Through an exploratory study with student teachers from the University of Huelva, we investigate the level of numerical competence they have.

Keywords: Numerical Competences. Mathematic Knowledge. Student Teachers. Exploratory Study.

1 Introducción

Desde todos los ámbitos de estudio y de opinión sobre la educación, desde cualquier perspectiva ideológica, se comparte la idea de que los profesores son esenciales y que sin su actuación competente no es posible alcanzar, en modo alguno, los fines que se asignan a la educación. Desde el campo de la educación matemática, la comunidad científica asume que un profesor competente requiere un conocimiento matemático apropiado para la enseñanza de dicha materia (SILVER, 2006). Sin embargo, los estudiantes para maestro que acceden a la formación inicial presentan numerosas y graves lagunas en conocimientos puramente matemáticos, lo que les impide implicarse en razonamientos didácticos específicos, y determina qué aprenden y cómo lo hacen (LLINARES; KRAINER, 2006).

Estas deficiencias, arrastradas de toda la escolarización obligatoria, no pueden pretender solventarse a lo largo de la formación inicial que, desde la educación matemática, tiene como fin alcanzar las competencias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, asumiendo adquiridas, al menos en gran parte, las relativas a la disciplina.

Llegados a este punto, cabe formularse la siguiente pregunta: ¿qué competencias y conocimientos matemáticos deberían ser exigibles para el acceso a la formación inicial del profesorado?

La comunidad de educadores matemáticos no se ha pronunciado de forma explícita respecto a esta pregunta, aunque algunos estudios, como el de Sáenz (2007) la aborda al comparar las competencias PISA de los estudiantes para Maestro (EPM) con los estudiantes de 15 años, extrayendo consecuencias para la formación inicial de aquellos. Entre ellas, en primer lugar, se invita a reflexionar sobre el proceso de acceso a los estudios de magisterio y a completar la investigación, estudiando nuevas variables como es el conocimiento matemático de cada estudiante (calificaciones académicas). En segundo lugar, a sustentar el desarrollo del pensamiento matemático de los futuros maestros durante sus estudios en magisterio a través del diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación, poniendo énfasis en la adquisición de procesos de matematización (en sentido de re-construcción de conocimiento matemático). En este artículo abordamos la pregunta desde las competencias que poseen en el ámbito numérico y su conocimiento matemático en este ámbito.

Diversos estudios realizados a nivel nacional e internacional han puesto de relieve la diversidad de errores conceptuales que los estudiantes para maestro muestran en distintas ramas del contenido matemático escolar, como en números y aritmética (CASTRO; CASTRO; SEGOVIA, 2004; MUÑOZ-CATALÁN; CARRILLO, 2007; TIROSH; GRAEBER, 1989, 1990; ZAZKIS; CAMPBELL, 1994). Estos estudios muestran que los maestros en formación suelen tener dificultades con los decimales menores que uno, y se muestran muy dependientes de las operaciones con números enteros, así como del conocimiento procedimental que tienen sobre ellas (TIROSH; GRAEBER, 1989, 1990). También reflejan un conocimiento deficiente de las reglas de cálculo con números decimales, que se manifiesta en errores en el ajuste del valor posicional cuando realizan estimaciones (CASTRO; CASTRO; SEGOVIA, 2004).

En el análisis de los protocolos de 3 problemas pertenecientes a un examen relativo a Números, dentro de la titulación de Maestro de Educación

Primaria (Universidad de Huelva), Muñoz-Catalán y Carrillo (2007, p.23) detectaron importantes dificultades para entender, en profundidad, los pasos ocultos de la división (ante la necesidad de obtener más cifras decimales que las ofrecidas por la calculadora en primera instancia); observaron la ausencia del uso de métodos formales para la simplificación de fracciones y la inclusión de números decimales en los miembros de una fracción. De todos los resultados obtenidos, los autores destacaron, como más sobresaliente, la ausencia de justificaciones o de argumentos de las decisiones tomadas, atribuyéndolo al "predominio de los hábitos adquiridos a lo largo de toda su historia de aprendizaje sobre lo exigido en el desarrollo de la asignatura", es decir, a las normas matemáticas vividas durante su escolaridad (YACKEL; COBB, 1996; PLANAS; GORGORIÓ, 2001).

2 Competencia matemática en la formación inicial de maestros

Entendemos la noción de competencia matemática en el sentido expresado por Mogens Niss (1999, 2003). Para este autor: *"La competencia matemática es la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra-matemáticos en los cuales la matemática desempeña o podría desempeñar un papel importante"* (NISS, 2003, p. 6-7).

Debido a la amplitud del área del conocimiento matemático, la competencia matemática engloba competencias en distintos contenidos matemáticos. De este modo se distingue la competencia numérica, geométrica, en tratamiento de datos, funcional etc.

Niss (2006, p.44) define profesor de matemáticas competente como aquél que *"de una manera efectiva y eficiente es capaz de ayudar a sus escolares a construir y desarrollar competencias matemáticas"*, lo que implica, como el mismo Niss reconoce, que el profesor debe dominar las competencias matemáticas que pretende desarrollar en sus estudiantes, además de poseer las correspondientes competencias didácticas y pedagógicas vistas desde las perspectivas de la educación matemática.

De entre todas estas competencias de los estudiantes para maestro, nuestro interés se centra en las competencias matemáticas y, específicamente, en la competencia numérica, que se considera como una de las competencias específicas de la titulación de Maestro de Educación Primaria (MEC, 2007).[1] Ello ocupará el siguiente epígrafe.

2.1 Competencia numérica para la formación inicial de maestros

En el campo de la formación de profesores, Llinares (2008) afirma que el término de competencia enfatiza los resultados de aprendizaje, pues hace referencia tanto a lo que el alumno es capaz de hacer al final del proceso formativo como a los procedimientos que le permitirán seguir aprendiendo a lo largo de su vida. El objetivo es preparar a los alumnos para que al final del proceso sean capaces, eficaces, eficientes, diestros y estén preparados para realizar *algo*. Este autor destaca la ligazón de la competencia con el conocimiento en la medida en que éste sustenta a aquella: para llegar a ser competentes, los futuros maestros han de usar e interpretar una serie de conocimientos que, en su caso, proceden de la Didáctica de la Matemática. Esta manera de incluir el conocimiento cuando tratamos las competencias es la que orienta este trabajo.

Entenderemos la *competencia numérica* como la concreción al campo numérico de la visión general de las competencias matemáticas, refieriéndonos a la adquisición, por parte de los estudiantes, del *sentido numérico*, es decir, de la capacidad de aplicar buenos planteamientos cuantitativos en situaciones reales (ALSINA, 2002) o de saber asociar significados a hechos o contextos y formular situaciones cuantificables (GIMÉNEZ, 2010).

De acuerdo con De Lange (1999), el razonamiento cuantitativo, como un aspecto esencial al tratar con los números, incluye el sentido numérico: la comprensión del significado de las operaciones, la percepción de la magnitud de los números, cálculos matemáticamente elegantes, cálculo mental y estimaciones. La competencia numérica, según el autor, requiere una capacidad de interpretar los números empleados para describir tanto los fenómenos accidentales como deterministas, de razonar con conjuntos complejos de variables interrelacionadas, y elaborar e interpretar críticamente los métodos para la cuantificación de los

[1] En este documento se establecen las siguientes competencias específicas relativas a matemáticas:
• Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información etc.)
• Conocer el currículo escolar de matemáticas.
• Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
• Plantear y resolver problemas vinculados a la vida cotidiana.
• Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.
• Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

fenómenos donde no hay un modelo estándar existente, lo que significa capacidad de enunciar y resolver problemas numéricos. Dicho en otras palabras, la competencia numérica debe permitir a los estudiantes disponer de la capacidad flexible para (a) identificar las relaciones esenciales en situaciones nuevas, (b) expresar esas relaciones en forma simbólica eficaz, (c) usar herramientas y técnicas para procesar información y (d) interpretar los resultados de estos cálculos (FEY,1990, apud DE LANGE, 1999).

Estas cuatro categorías (comprensión de los números y sus relaciones, comprensión del significado de las operaciones con ellos, agilidad en el cálculo mental y las estimaciones y plantear y resolver problemas) van a ser los elementos vertebradores de nuestra propuesta de competencias numéricas deseables en los estudiantes para maestro de Primaria. En cada categoría hemos recogido, además de las referidas en los párrafos anteriores, aportaciones de Llinares (2001, 2008), Llinares y Krainer (2006), Brown (2004) o Gregorio-Guirles (2008), así como las que establecen los estándares curriculares para la educación primaria del NCTM (2004). Por otra parte, las competencias enunciadas guardan relación con las ocho competencias matemáticas[2] determinadas por Niss (1999) y aparecen diluidas entre y adaptadas a las descripciones de la competencia numérica. Nuestra síntesis se expone en el cuadro 1:

I. Comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos (naturales, racionales, enteros, introducción al real)	**II. Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras**	**III. Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables respecto del cálculo mental y el escrito, y con números naturales, racionales y enteros**	**IV. Plantear y resolver problemas aritméticos**
I.1. Comprender el significado de los números en distintos contextos (cardinal y ordinal –naturales, medida, razón, punto de una recta, resultado de una operación). I.2. Saber traducir a términos numéricos una situación susceptible de ello (dominio funcional del SND), e interpretar el valor de los números	II.1. Comprender distintos significados asociados a los conceptos de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con los distintos tipos de números. II.2. Comprender	III.1. Realizar con corrección y fluidez cálculos relativos a las operaciones básicas y sus combinaciones. III.2. Disponer de estrategias de cálculo que permitan abordar un cálculo de modo flexible y fluido, tanto mentalmente como de forma escrita. III.3. Saber decidir qué estrategias de las anteriores interesa aplicar	IV.1. Resolver problemas abiertos, analizando y valorando las posibles soluciones. IV.2. Abordar la resolución de un problema utilizando diferentes estrategias y procedimientos

[2] Pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, modelizar, razonar matemáticamente, representar entes matemáticos, utilizar símbolos matemáticos y formalismos, comunicar en, con y sobre matemáticas, utilizar soportes y herramientas (NISS, 1999).

en textos numéricos de la vida cotidiana (alfabetización numérica). I.3. Comprender la estructura del sistema de numeración decimal y su relación con los algoritmos de operaciones básicas. I.4. Comprender que un número puede ser descompuesto y pensado de distintas formas y realizar con fluidez distintas composiciones y descomposiciones.[3] I.5. Saber elegir las descomposiciones numéricas más apropiadas para resolver situaciones problemáticas.[4] I.6. Reconocer o estimar el tamaño de un número. I.7. Saber representar un número de distintas formas (material manipulativo, símbolos, distintas expresiones numéricas equivalentes, representaciones pictóricas, recta numérica…)[5] I.8. Saber pasar de una representación a otra de un mismo número. I.9. Comprender las relaciones entre los números (comparar distintos números, ordenar, relaciones entre fracciones-decimales-porcentajes). I.10. Trabajar flexiblemente con naturales, fracciones, decimales y porcentajes para resolver problemas. I.11. *Utilizar factores, múltiplos, factorización en números primos y números primos entre sí para resolver problemas*[6]. I.12. *Comparar y contrastar las propiedades de los números y de los conjuntos numéricos, incluyendo los números racionales y los reales.*	situaciones que impliquen la realización de las operaciones básicas con los distintos tipos de números. Saber relacionar situaciones a las operaciones asociadas. II.3. Comprender cómo se relacionan las distintas operaciones. II.4. Comprender los efectos de realizar las distintas operaciones básicas considerando los números que intervienen. Usarlos para simplificar cálculos y resolver problemas. (Incluiría comprender los efectos de operar sobre operaciones, por ejemplo si en una división duplico el divisor, ¿qué pasa con el cociente?[7]. II.5. Identificar y utilizar las relaciones entre operaciones para resolver problemas. II.6. Comprender y utilizar propiedades de las operaciones (por ejemplo distributividad de la multiplicación respecto de la adición).	en un cálculo concreto[8]. III.4. Juzgar si los resultados de la aplicación de estrategias de estimación de cálculos son razonables. III.5. Saber resolver situaciones de cálculo no algorítmicas. III.6. Seleccionar y usar métodos y herramientas apropiados (incluyendo objetos, cálculo mental, estimación, calculadoras, lápiz y papel) para calcular, según el contexto y la naturaleza del cálculo en cuestión. Utilización de la calculadora para resolver problemas numéricos y para explorar en las propiedades de los números. III.7. Utilizar modelos visuales, referencias y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales de uso común III.8. Desarrollar y analizar algoritmos para calcular con fracciones, decimales y enteros, y desarrollar fluidez con ellos. III.9. Desarrollar, analizar y explicar métodos para resolver situaciones relacionadas con las proporciones, como usar escalas y hallar razones equivalentes. III.10. Enjuiciar lo razonable de los cálculos numéricos y sus resultados. III.11. Estimar el tamaño de los resultados de las operaciones, así como comparar resultados de operaciones por su tamaño (sin realizarlas).[9] III.12. Saber aplicar las múltiples composiciones de los números y la estructura del SND para explicar por qué	de resolución. IV.3. Interpretar y codificar correctamente desde el punto de vista matemático los datos del enunciado. IV.4. Identificar la operación que resuelve un problema y reconocer los problemas en los que hay que aplicar una determinada operación IV.5. Decidir y justificar la mejor manera de resolver un problema en términos de efectividad y formalidad matemática. IV.6. Saber comunicar por escrito y oralmente el proceso seguido para la resolución de los problemas, discutiendo la invalidez de caminos alternativos. IV.7. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana IV.8. Inventar problemas a partir de operaciones concretas previamente definidas

I.13. *Usar los argumentos de la teoría de números para justificar relaciones entre números naturales*. I.14. Saber encontrar patrones y propiedades numéricas. I.15. Argumentar y establecer razonamientos de tipo numérico, ya sean inductivos, o deductivos, o simplemente afirmaciones o falsaciones aritméticas.[14]	II.7. Enjuiciar los efectos de las operaciones como la multiplicación, la división y el cálculo de potencias y raíces sobre las magnitudes de las cantidades. II.8. Identificar, analizar y aplicar razonamientos proporcionales.	funcionan los algoritmos de las operaciones.[10] III.13. Saber cuál es el orden de unidad de las distintas cifras de los números que aparecen en las operaciones (en la realización de los pasos de los algoritmos estándar y personales).[11] III.14. Habilidad para utilizar puntos de referencia (hechos numéricos que sirven de base para resolver una situación numérica problemática).[12] III.15. Habilidad para vincular la numeración, operaciones y relacionar los símbolos de manera significativa.[13]	

Cuadro 1 - Competencias numéricas destacables en los EPM (I)

3 Metodología de investigación

Esta investigación forma parte de un estudio más amplio, cuya intención tiene la doble finalidad de conocer hasta qué punto los estudiantes para maestro son numéricamente competentes y de diseñar los nuevos programas formativos contemplando esta referencia. Lo que presentamos aquí es un primer acercamiento a este objetivo general, sobre la base de los contenidos matemáticos

[3] Según Llinares (2001) el sentido numérico supone poseer una comprensión flexible del número, ligado al número natural.
[4] De la fase 2 de Resnick (1983 apud LLINARES, 2001)
[5] Caso particular: Comprender y usar las notaciones exponencial, científica y de la calculadora relativa a números grandes.
[6] Todas las competencias escritas en cursiva están extraídas del NCTM (2004).
[7] Id.
[8] En Llinares (2001, p. 166) (destacado por Sowder (1992), como una de las manifestaciones del sentido numérico – en lo que se refiere a los números naturales): *Habilidad para realizar cálculos mentales mediante estrategias inventadas que se aprovechen de las propiedades de los números y de las operaciones*.
[9] De Llinares (2001), destacado por Sowder (1992), como una de las manifestaciones del sentido numérico en lo que se refiere a los números naturales.
[10] De la fase 3 de Resnick (1983), citado en Llinares (2001), referido a números naturales.
[11] Id.
[12] De Llinares (2001), destacado por Sowder (1992), como una de las manifestaciones del sentido numérico.
[13] Id.

que forman parte del programa de formación de maestros de la Universidad de Huelva, referidos al sentido numérico.

Mediante un estudio exploratorio (DANKHE, 1986), y a través de un enfoque interpretativo-cualitativo, abordamos nuestro interés por conocer las competencias numéricas y el conocimiento matemático que ponen de relieve los estudiantes para maestro de la Universidad de Huelva cuando se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos. El grupo de informantes está constituido por los 42 estudiantes que asistieron el día de la prueba, y pertenecen al tercer y último curso de la titulación de Maestro en Educación Primaria, que cursan *Matemáticas y su Didáctica* (12 créditos). Ésta es la única materia específica del área que reciben, además de *Matemáticas Básicas* (4'5 créditos) en el primer curso, de contenidos formales. La recogida de información se ha realizado en su contexto natural y con las condiciones existentes en el propio desarrollo del curso. En este sentido, el diseño de la prueba es similar a los exámenes del curso tanto en formato, como en contenido y extensión.

3.1 Instrumentos de obtención de información

La información se obtuvo a través de una prueba con siete problemas, las cuales abarcan distintos contenidos relacionados con el sentido numérico como la estimación, la jerarquía de operaciones, el cálculo no algorítmico, la proporcionalidad, la división con divisor no entero, y la identificación y ordenación de números expresados como fracciones y decimales. De acuerdo con algunos autores (BARRIGA, 2006; GIMÉNEZ, 2010; RICO; LUPIÁÑEZ; 2008; ZABALA; ARNAU, 2007) no se puede hablar de adquisición de una competencia en términos absolutos, pues se desarrollan y alcanzan a distintos niveles. Además, las competencias que se movilizan a la hora de resolver un problema dependen de la complejidad y tipo del problema planteado y de la profundidad de los procesos cognitivos requeridos. Distinguiremos los procesos cognitivos según tres grupos: reproducción, conexión y reflexión[14] (OCDE, 2004). Los problemas de nuestra prueba movilizan los procesos cognitivos del grupo de reflexión (problemas 1 y 2), conexión (problemas 3, 5, 6 y 7) y reproducción (problema 4). Las competencias de nuestro análisis son las que los investigadores interpretamos que los alumnos manifiestan en la prueba.

[14] Los diferentes procesos cognitivos que se activan al resolver problemas de dificultad diferente se determinan en tres grupos de competencias:
• Reproducción de conocimiento y uso de procedimientos rutinarios
• Conexión de diferentes conceptos y propiedades e integración de la información para la resolución de problemas no rutinarios
• Reflexión, matematización, argumentación y generalización (OCDE, 2004).

A continuación, presentamos los siete problemas junto a la discusión de conocimiento común y competencia numérica que requiere que los alumnos pongan en juego.

Primer problema:

> *Determina la operación que esconde cada * en la expresión (756*18)*29=1218, si representan a una suma, una resta, una multiplicación o una división y explica razonadamente por qué.*

El problema puede abordarse, por ejemplo, tomando conciencia de que 18 es poco más de la mitad de 29, así que multiplicar por 29 y dividir por 18 sería como multiplicar por poco menos de 2, lo que encaja con que 756 sea poco más de la mitad de 1218. Además, la unidad de 756x29 sería 4, con lo que el cociente entre 18 podría tener una unidad 8 (de 1218). Por tanto, las operaciones ausentes son cociente y producto, por ese orden.

El estudiante, para resolver este problema, además de poseer manejo de las operaciones básicas, ha de poner en juego, los siguientes conocimientos: a) estimación de cálculos, no para dar el resultado final de una operación, sino para usarlo a modo de resultado provisional con el que estimar otro resultado entre varias operaciones posibles; b) uso de paréntesis, no para realizar correctamente una operación, sino para aplicarlo incluso en el caso de que no sea necesario, aunque conserve la corrección; c) jerarquía de operaciones, no para aplicar correctamente una determinada secuencia de operaciones, sino para aplicarla entre varias operaciones y números dentro de varias posibilidades, incluyendo aquellas en las que la jerarquía es irrelevante.

De este modo, las competencias asociadas a la resolución de este problema se organizan en torno a la estimación y la jerarquía de operaciones, incluyendo el uso de paréntesis.

La competencia en estimación supera el habitual nivel consistente en aventurar razonablemente un resultado final, para, en este caso, llegar a aventurar resultados parciales de forma combinada para obtener la igualdad dada. En esta apuesta razonable hay que considerar, también, las posibles relaciones entre los números dados.

Una vez obtenidas las operaciones que hacen cierta la igualdad, la eventual discusión sobre la necesidad o no de los paréntesis conduce al estudiante a aspectos de competencia numérica ligados a la precisión y concisión del lenguaje matemático.

En resumen, las competencias asociadas son:

I.15, II.3, II.4, II.6, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.11 y IV.6

Segundo problema:

Explica tres procedimientos no algorítmicos distintos para obtener el valor de 49.5 x 4.5.

De entre las opciones posibles, podemos señalar las siguientes claves:

- que multiplicar por 4.5 es como multiplicar por 9 y dividir por 2, y multiplicar por 9 es como multiplicar por 10 y restar una, el resultado es la mitad de (495-49.5).
- que multiplicar por 49.5 es como multiplicar por 50 y restar el producto por 0.5, es decir, multiplicar por 100 y dividir por dos, y restar la mitad del factor. Es decir la mitad de (4.5x100)-2.25.
- que sería como multiplicar 99 por 9 y dividir por 4, es decir (990-99)/4 que es 891/4 que es la mitad de 445.5.

Asimismo, caben soluciones similares a las anteriores que prescindan del carácter decimal de la representación de los números, operando con ellos como enteros para luego dividir por 100 el resultado.

Los procedimientos no algorítmicos exigen el conocimiento indicado anteriormente, pero, fundamentalmente, demandan la aplicación de propiedades de las operaciones en sentido inverso. Es decir, no se trata de resolver una secuencia de operaciones con paréntesis, sino de crear esa secuencia para obtener el resultado, el cual, a su vez, está indicado como producto de dos números. En particular, se requiere ver números como resultado de una operación simple (por ejemplo, 50 como 100 dividido entre 2).

En primer lugar, para resolver este problema, el estudiante ha de ser competente en el cálculo de las operaciones básicas. Asimismo, debe ser competente en el manejo de las propiedades de dichas operaciones, incluyendo la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, siendo capaz de aplicarla en los dos sentidos de lectura de la igualdad, para lo cual ha de poner en juego también la competencia de estimación.

En resumen, las competencias asociadas son:

I.4, I.5, II.4, II.5, II.6, III.1, III.2, III.3, III. 4, III.5, III.11, III.12 Y IV.2

Tercer problema:

Una pizzería oferta dos pizzas redondas del mismo grosor pero de diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 30 cm. y cuesta 3 •. La grande tiene un diámetro de 40 cm. y cuesta 4•. ¿Qué pizza es la mejor opción en relación a lo que cuesta? Escribe tu razonamiento.

Se trata, básicamente, de un razonamiento proporcional en el que se necesita calcular el precio del centímetro cuadrado de pizza. El de la pequeña es $\frac{3}{225\pi}$ euros, y el de la grande $\frac{1}{100\pi}$ euros. Como el primer valor es mayor, es claro que nos interesa la grande.

La resolución correcta de este problema puede mostrar competencia en el uso de la fórmula del área del círculo y en la aplicación del concepto de unidad común para comparar cálculos. No obstante, la resolución podría seguir los derroteros de la comparación de figuras semejantes. En este caso, al existir la misma proporción entre precios y entre diámetro en ambas pizzas, es claro que conviene comprar la segunda, por aumentar el área en mayor razón que el precio. Con esta resolución emerge la competencia, en el campo de la semejanza y la proporcionalidad, relacionada con la aplicación adecuada de las razones entre segmentos y entre áreas.

Las competencias asociadas son:

I.15, III.9 Y IV.7

C*uarto problema*:

En una fábrica quiere comercializarse un rompecabezas en distintos tamaños. Si la medida en un modelo inicial es de 50 mm, calcula la medida de los modelos llavero (40%), magnético (150%) y bolsillo (50%).

Este problema consiste en una aplicación directa de porcentajes (menores y mayores de 100) para el cálculo de medidas.

La competencia que emerge de la resolución de este problema es la aplicación correcta, en situaciones cotidianas, de porcentajes de forma directa, incluyendo porcentajes mayores que la unidad. (I.10, IV.7).

Quinto problema:

Ordenar de menor a mayor los siguientes números, expresandoel primero en su forma fraccionaria: $0.7\widehat{6}$ *, 3/4 y 7/9.*

Como conocimiento matemático, requiere la ordenación de números racionales próximos (diferenciación a partir de las centésimas si se usa la expresión decimal, o bien ordenación de fracciones equivalentes con el mismo denominador) y la conversión de la expresión decimal a la expresión fraccionaria de un número racional.

Si, por la expresión del primer número, se resuelve el problema convirtiendo los otros dos números a su expresión decimal, aparecería sólo un conocimiento que puede calificarse de elemental. Otra cosa bien diferente ocurriría si se compara 3/4 y 7/9, aplicando razonamientos de la naturaleza de las fracciones, indicando, por ejemplo, que 3/4 = 6/8 y que 6/8 < 7/9 ya que la diferencia entre el numerador y el denominador se mantiene, mientras que el denominador va aumentando en una sucesión que tendería a 1 (n/n+2); así podrían compararse las fracciones 3/4, 23/30 y 7/9. Lo anterior serviría también para justificar que 3/4 = 21/28 < 23/30. Por otra parte, 23/30 = 69/90 < 70/90 = 7/9. El conocimiento de las fracciones equivalentes y su uso para ordenar números racionales es básico; sin embargo, el conocimiento de las características de las fracciones respecto al significado de numerador y denominador en un contexto de comparación basada en tendencias de posibles sucesiones de las que esos números podrían formar parte, es más avanzado, y necesario por parte del docente.

En este caso aparece, por tanto, la competencia en la conversión entre distintas expresiones de números racionales: de decimal a fracción y viceversa. Esto sería lo único relevante si se aborda el problema convirtiendo a decimal las fracciones del enunciado, sin olvidar la competencia en ordenar números decimales a partir de las diferentes cifras decimales.

Sin embargo, si el estudiante aborda el problema del segundo modo, mostraría competencia en el uso de fracciones equivalentes y su aplicación para ordenar números racionales, en el uso de la estimación para elegir las fracciones más adecuadas con las que comparar las fracciones dadas, así como en la aplicación de las propiedades de las fracciones asociadas a las alteraciones que podemos incluir en numeradores y denominadores.

En síntesis, emergerían las siguientes competencias:

I.7, I.8, I.9 Y I.12

S*exto problema*:

Hemos comprado un colchón de látex por 850 • por una oferta de descuento del 15% que tenía Mundocolchón. ¿Cuál habría sido su precio fuera de la oferta? ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única operación?

Se trata de ver que se ha pagado el 85% de su precio antes de la oferta, y obtener, mediante razonamiento proporcional que ese precio era 1000•. En la segunda parte se trata de dividir 850 entre 0.85.

Los estudiantes deben ser competentes, por tanto, en el uso de porcentajes en contextos de descuento comercial, así como en la resolución de ecuaciones de primer grado simples. El contexto, aquí, es determinante. De hecho, sucede que, aunque se sea competente en la aplicación de porcentajes de forma directa e indirecta, el contexto comercial convierte la mera y mecánica aplicación de un porcentaje en un problema donde ya aparece la necesidad de cierta deliberación. (I.10, IV.7)

Finalmente, *el séptimo problema* les solicitaba que identificaran el siguiente tipo de problema e indicaran cómo resolverlo con alumnos de primaria:

De un bidón de 29 litros de vino se quieren llenar botellas de 3/4. Calcula el número de botellas necesarias y el vino sobrante.

Se trata de una situación de división, donde dividendo y divisor son de la misma naturaleza (litros), dando lugar a un valor de otra naturaleza (número de botellas) como cociente. Es, por tanto, un problema de división cuotitiva o de medida, con resto. Una solución simple supone ver que, por cada litro, tenemos una botella y nos sobra un cuarto, lo que hacen 29 botellas y 29 cuartos, con los que obtener otras 9 botellas, quedando 2 cuartos, es decir, medio litro sobrante. Formalmente, puede realizarse la división de 29 entre 3/4, obteniendo 116/3, es decir, 38 y 2/3, e interpretar que se trata de 2/3 de 3/4, que supone 1/2 litro sobrante; o, también, realizar la división 29 entre 0.75 y entender el resultado como 38 botellas, y la parte decimal como 2/3 de 3/4, igual que antes.

Se requiere, por tanto, una aplicación directa de la división como resta repetida o conocimiento de la división de un número entero por una fracción (o su traducción por el producto del entero por la fracción inversa) o por su expresión decimal, e interpretación, en ambos casos, del resto. Todo ello es conocimiento matemático elemental, salvo la última parte (interpretar *el resto 2/3*). La interpretación del resto sólo se puede hacer desde un conocimiento avanzado del contenido, en el sentido de una reflexión profunda sobre el significado de la división entre fracciones (o con al menos el divisor fraccionario) y del significado del algoritmo tradicional de multiplicar por la fracción inversa.

Al resolver el problema asociando litros a botella más cuarto restante, el alumno muestra competencia en el significado de la división como reparto equitativo que puede obtenerse por restas sucesivas. Ahora bien, la resolución correcta del problema dividiendo 29 entre 0'75 muestra competencia en el significado del resto de la división, al igual que ocurre si se divide 29 entre ¾ (los alumnos pueden efectuar los cálculos dividiendo 29 entre ¾, y dar como solución que son necesarias 38 botellas y sobran 2/3 (o 0'66) litros, obviando que los 2/3 sobrantes no son de litro, sino de ¾ : 2/3 ¾ = 2/4 = ½ litro), donde se añade la competencia en el significado del denominador de una fracción (o el divisor de una división) en relación con la unidad.

En resumen, la competencia asociada es comprender el significado de la división con los distintos tipos de números (II.1)

En el anexo 1 se sintetizan cada una de las competencias y conocimientos asociados a los siete problemas.

3.2 Análisis de la información y resultados

Hemos analizado el protocolo de resolución de cada uno de los problemas, siguiendo el enfoque del análisis de contenido (BARDIN, 1986). Hemos profundizado en los datos considerando el uso y las deficiencias más significativas del conocimiento matemático y competencias, en el ámbito numérico, puestos en juego en el proceso de resolución de cada problema.

Los problemas primero, cuarto y quinto de la prueba mostraron la mayor tasa de éxito; por el contrario, el segundo y el tercero fueron resueltos por un número significativamente pequeño de estudiantes.

Los problemas tercero, cuarto y sexto son todos de proporcionalidad, sin embargo, el sexto tuvo resultados significativamente inferiores al cuarto, de corte más mecánico, y ambos (de proporcionalidad aritmética) muy superiores al tercero, de proporcionalidad geométrica, que tan sólo fue resuelto por tres estudiantes.

El nivel de respuestas correctas al *primer problema* muestra que la mayoría de los estudiantes supo poner en juego las competencias requeridas (véase anexo 1). Cabe destacar dos grupos de procesos de resolución. Parece que el primer grupo intuye que el orden de las operaciones es producto y cociente, descartando sin probar la suma y la resta, y justificándolo mediante divisibilidad (1218:29=42; 756:18=42; o, ya que el producto de los dos primeros números del paréntesis no es divisible por 29, ha de ser primero el cociente y luego el producto). El segundo grupo también parece intuir el resultado, pero pasa por un proceso previo de estimación y descartes al objeto de justificar su decisión. Frente a estos grupos se sitúan otras soluciones basadas en el descarte más o menos inteligente, o simplemente sin justificación. En todos los casos, muestran una clara comprensión de cómo se usan y cómo se relacionan las operaciones básicas con números enteros (II.3), sus propiedades (II.6) y de los efectos que producen (II.4), obteniendo de forma fluida o estimando resultados (III.1, III.2 y III.11) y emitiendo un juicio de razonabilidad claro (III.4, I.15), a excepción del último grupo, donde la capacidad de expresar por escrito la estrategia (III.3) o los procesos seguidos no se evidencia como en los otros (IV.6).

Los estudiantes de los dos primeros grupos descritos *ven* la solución, la comprueban y luego buscan una justificación; los demás estudiantes tienden al descarte no inteligente o a la no justificación.

En el *segundo problema* sólo un reducido número de estudiantes mostró la destreza necesaria en el cálculo de las operaciones básicas y en el uso de procedimientos no algorítmicos. Las soluciones podrían clasificarse en tres grandes grupos. El primero plantea las operaciones fruto de la descomposición de las cantidades (I.4) en sus partes entera y decimal y utiliza la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (II.6), o las expresa como fracciones para multiplicarlas ($196+\frac{49}{2}+\frac{4}{2}+\frac{1}{4}$; 500·5 menos 5·45, dividido por 100; $50\cdot\frac{9}{2}-0.5\cdot\frac{9}{2}$; $50\cdot 4-0.5\cdot 4$; $\frac{99}{2}\cdot\frac{9}{2}$); el segundo realiza una transformación de las cantidades del producto (49.5·4 es 98·2 y queda sumar la mitad de 49.5) y el tercero tan sólo estima el resultado [entre, 196 (49·4) ó 200 (50·4) y 250 (50·5)]. Ello evidencia la dificultad de la mayoría para utilizar las propiedades de las operaciones con números racionales (II.4) y sus relaciones, así como para realizar, con agilidad, cálculos mentales (III.1), elegir una estrategia adecuada, de entre varias posibles, para los mismos (III.2; IV.2), para estimar cálculos con números racionales (III.4, III.11) y, en general, para resolver situaciones no algoritmicas (III.5). Asimismo muestran la dificultad para aplicar de forma operativa las posibles descomposiciones de los números (I.5, III.12).

Como se ha señalado anteriormente, tan sólo tres estudiantes realizan correctamente el *tercer problema* y otros dos intuyen la mejor relación pero no son capaces de justificarlo por no recordar el cálculo del área de un círculo.

Los procesos incorrectos de resolución son muy variados, pero todos ellos comparten el razonamiento proporcional entre el diámetro y el precio, obviando la idea de superficie.

Hay alumnos que, con el razonamiento proporcional diámetro-precio, deciden o bien que les interesa la pequeña porque sólo 10 cm más en la grande es muy poca diferencia, o bien (otros alumnos) que deciden que prefieren la grande porque por sólo un euro tienen una pizza mayor (10 cm más). En ambos casos, lo que están considerando es el tamaño relativo de ambas cantidades (10 cm es muy poco, frente a longitudes mayores; 1 euro es muy poco dinero, con los precios que manejan de comidas), respecto de las medidas de esas magnitudes a las que están habituados.

Todo ello evidencia, sobre todo, la dificultad de la inmensa mayoría de los estudiantes en identificar, analizar y aplicar razonamientos proporcionales que implican relaciones entre números en situaciones de la vida cotidiana (I.15, III.9 y IV.7).

En el *cuarto problema* hemos encontrado tres grupos de soluciones. El primero consiste en la aplicación directa del concepto de porcentaje como producto de una división de divisor 100; la segunda es una variante de la anterior, en la que la división se expresa en su desarrollo decimal, y la tercera consiste en plantear una regla de tres. En algún caso, cuando se trata del 150%, estas versiones pasan por entenderlo como 100% más 50%.

Aparecen dos errores significativos en este problema. El primero de ellos, consiste en entender un porcentaje (n%) aplicado a un número como el cociente entre ese número y *1'n*. En el segundo caso, se calcula el producto del número por la unidad menos la expresión decimal del porcentaje En el primer caso, supone la transformación del problema en otro de valor inicial desconocido.

En el segundo caso, creemos que están interpretando el 40% como un descuento, que es el contexto en que más suelen ver el porcentaje. De este modo, hay alumnos que creen que el porcentaje siempre se suma o resta a la cantidad inicial (impuesto/descuento). Estos errores ponen de manifiesto la dificultad de utilizar los porcentajes más allá de su aplicación directa (I.10, IV.7).

En el *quinto problema* hemos encontrado 2 procesos de resolución o combinaciones entre ellos. El primero consiste en transformar el número periódico en fracción por el algoritmo (que en unos casos es deducido y en otros recordado) y ordenarlos según su expresión decimal; el segundo difiere del anterior en que la ordenación se hace tras expresar todas las cantidades como fracciones de igual denominador. Puede aventurarse que la deducción del algoritmo tiene una finalidad exclusivamente explicativa.

A pesar de que el problema fue resuelto correctamente por un elevado número de estudiantes, sorprende encontrar errores como no considerar el período en el caso de la expresión periódica mixta, considerar período 70 en 7/9, identificar $0.\widehat{7} = 0.77$ $0.7\widehat{6} = \frac{76}{100}$, o $0.7\widehat{6} = \frac{7}{9}$, obviar el período, cometer errores en la ordenación de decimales o, lo que es más grave, afirmar que $0.7\widehat{6}$ no tiene forma fraccionaria, lo que implica insuficiente comprensión de las diferentes descomposiciones y expresiones de un número racional (I.7) y de cómo pasar de una a otra (I.9), de las relaciones entre estos números (I.8) y de sus propiedades (I.12).

El sexto problema, ocupa un nivel intermedio de éxito entre los tres de proporcionalidad. Descartando algunas soluciones cuyos procesos aprovechan *la fortuna de un precio redondo* (combinando azarosamente 15 y 100 es fácil toparse con mil y hacer el problema conociendo el resultado), los procesos de resolución se basan en dos ideas. La primera consiste en asumir que se paga el 85% del precio inicial y aplicar una regla de tres o directamente como una ecuación de primer grado con una incógnita; la segunda, muy utilizada en los ámbitos comerciales y que supone la respuesta a la última parte de la pregunta del problema, parte de que aplicar un descuento de un 15% supone multiplicar la cantidad inicial por 0.85, o hacer lo mismo por un camino un poco más largo obteniendo 0.85 como 1-15/100.

Los errores más frecuentes de este problema fueron obtener el 15% del precio con descuento y sumarlo al mismo, asumir que 850 supone el 15% del precio inicial, aplicar de forma incorrecta el algoritmo simplificado (dividiendo por 1.15 en vez de por 0.85) o calcular el 85% del precio rebajado y sumárselo al mismo. En todos estos casos cabe añadir que se actúa en ausencia parcial o total del significado de la situación, siendo éste sustituido por procedimientos algorítmicos de situaciones evocadas, lo que, una vez más, indica incompetencia en el uso de los porcentajes en situaciones diferentes a aquellas que implican su aplicación directa (I.10, IV.7).

El *séptimo problema* (y último) muestra diversas estrategias de reparto que tienen como dificultad común la identificación de la naturaleza del resto de la división, probablemente el más especializado de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Aproximadamente un tercio de los alumnos lo calcula correctamente. Entre los procedimientos correctos, el más frecuente es efectuar la división de fracciones y hallar su valor decimal; de éste se quedan con la parte entera y, aplicando la regla de la división obtienen el resto. Una variante de esta resolución consiste en interpretar que la parte decimal del cociente debe multiplicarse por 3/4 (ó 0.75). Dos alumnos efectúan una tercera resolución, mediante la división 29:0.75 con lápiz y papel, obteniendo de cociente entero 38 y su resto correspondiente 50, de donde interpretan que se pueden llenar 38 botellas y sobra 0.5 l (entienden el valor real del 50 del resto, al haber sacado dos decimales en el cociente, conocimiento especializado). La cuarta estrategia correcta considera 2900 cl y 75 cl, obteniendo una división entera de cociente 38 y resto 50 (cl.).

Por último, tres alumnos usan una estrategia de resta repetida (o su equivalente de sumas repetidas): 4 botellas de 3/4 hacen 3 litros; En 29 litros caben 9 veces 3 litros y sobran 2 litros. Esto es $9 \cdot 4 = 36$ botellas y 2 más y sobra 1/2 litro. Estas estrategias muestran el conocimiento de relaciones de la división con la suma y la resta, así como una operatoria flexible. Pone de relieve el conocimiento de uno de los significados de la división.

En cuanto a las estrategias incorrectas, se basan en su mayoría en una interpretación errónea de la parte decimal de $38.\widehat{6}$ como cociente. De este modo, hay alumnos que dicen que sobra $0.\widehat{6}$ litros (esto es, 6/9 de vino), otros redondean a 0.5 y otros a 0.7.

Cuatro alumnos cometen un error que merece especial atención. Llegan a la fracción equivalente 116/3 y haciendo (con lápiz y papel) dicha división obtienen 38 de cociente y 2 de resto, por tanto concluyen que se necesitan 38 botellas y sobran 2 litros. Pensamos que para poder discernir dónde está el problema de esta resolución hace falta un conocimiento especializado. Se trata de diferenciar los conceptos de número racional y fracción. Aunque $\frac{29}{(3/4)}$ es equivalente a $29 \cdot \frac{4}{3}$, ambas divisiones no tienen el mismo resto (aunque sí el mismo cociente entero y evidentemente el mismo cociente decimal $38.\widehat{6}$). De hecho, si en ambos casos obtuviéramos el mismo resto, llamémosle *a*, *a*:(3/4) no daría la misma parte decimal que *a*:3. 29:3/4=*38+(1/2)/(3/4)=38+2/3*=29·4/3, lo que expresa que 29:3/4 y 29·4/3 corresponden al mismo número racional (decimal correspondiente), pero el resto de la división de 29 entre 3/4 es 1/2 (viene dado en la primera expresión en negrita), mientras que el resto de dividir 116 entre 3 es 2 (en la segunda expresión en negrita). Ello evidencia insuficiente comprensión de los significados asociados a los conceptos de las operaciones básicas con los números racionales (II.1), particularmente en lo referido a la identificación de la naturaleza del resto de la división.

4 Conclusiones

Haremos un recorrido a través de las categorías en que hemos dividido la competencia numérica para poner de relieve el nivel de dominio de cada una de ellas.

En cuanto a la comprensión de los números, de sus diferentes formas de representación y de las relaciones entre los distintos conjuntos numéricos, hemos encontrado dificultades operativas a la hora de descomponer una cantidad no entera de todas las formas posibles para facilitar procedimientos no algorítmicos de cálculo, de comparar y contrastar propiedades numéricas con números racionales, de trabajar flexiblemente con racionales y porcentajes, y de argumentar y establecer razonamientos de tipo numérico, también en lo referido a números racionales y porcentajes.

En lo relativo a comprender los significados de las operaciones y sus relaciones, se evidencian dificultades para aventurar los efectos de las operaciones y falta de operatividad de las propiedades conocidas de las mismas, en lo que se refiere a operaciones con números racionales. Se presentan *déficits* a la hora de dar sentido a los significados de las operaciones en números racionales. Es, además, especialmente débil la capacidad de los informantes para identificar, analizar y aplicar razonamientos proporcionales en el contexto de resolución de situaciones problemáticas extraídas de la vida real, así como de hacer explícitos los procedimientos que utilizan.

Las competencias referidas al cálculo fluido (exacto y estimado) presentan, también, dificultades al tratar con números racionales.

Solo algunos estudiantes han mostrado una adquisición adecuada de las competencias medidas. Ellos se muestran más capaces de atribuir significado a los problemas planteados, de anticipar una posible vía de solución y de poner en juego procedimientos sistemáticos e inteligentes de descarte. No se suelen ver limitados por procedimientos algoritmos conocidos, sino que usan sus conocimientos de manera creativa, aplicando propiedades matemáticas y realizando cálculos de operaciones básicas con fluidez. Además, abordan el proceso desde la globalidad, sin que cada paso de la resolución suponga un obstáculo en sí mismo, como suele ocurrir con los demás estudiantes, lo que les permite establecer sistemas de control del proceso. Podríamos decir que, en general, son buenos resolutores de problemas, en el sentido de que poseen un conocimiento rico y organizado, dominan una serie estrategias y son capaces de regular el proceso de resolución (KILPATRICK, 1985).

Otro aspecto que caracteriza a estos alumnos es su capacidad para reproducir demostraciones matemáticas con fines explicativos y aportar justificaciones apropiadas para las decisiones tomadas. Estos alumnos no sólo actúan, sino que saben por qué y cómo actúan. La seguridad en los propios conocimientos les permite estar más preparados para cuestionarse el proceso seguido y las dificultades encontradas y/o superadas (habilidad metacognitiva), es decir, les permite tomar conciencia del propio proceso de aprendizaje, obteniendo así herramientas para representar y formular la materia de un modo comprensible o en formas pedagógicamente más potentes a la hora de mostrar a otros su proceso (SHULMAN, 1986); esto resulta especialmente visible en la resolución de los dos primeros problemas.

Nuestro trabajo es una prueba más de la deficiente formación matemática con la que acceden muchos estudiantes para maestro a los centros de formación del profesorado. El conocimiento matemático especializado, que formará parte de su formación como maestros, necesita de un fuerte conocimiento matemático común previo, por ello no podemos obviar esta cuestión; al contrario, debemos tomarla como punto de partida. Por ello nos parece recomendable que, a modo de diagnóstico, al comienzo del período formativo puedan realizarse pruebas de conocimientos mínimos con la doble intención de concienciar a los estudiantes de sus deficiencias y de su responsabilidad de superarlas a lo largo de la formación.

Referencias

ALSINA, A. De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria. **Revista Uno**, Barcelona, v. unico, n. 29, p. 55 - 66, mar. 2002.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Las Vegas, v. 59, n. 5, p. 389 - 407, nov. 2008.

BARDIN, L. **L´analyse de contenu.** Paris: PUF, 1986.

BARRIGA, A. El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? **Perfiles educativos**, México, v. 28, n. 111, p. 7 - 36, mar. 2006.

BROWN, M. Introduction. In: MILLET, A.; BROWN, M.; ASKEW, M. (Eds.). **Primary mathematics and the developing professional.** Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 19 - 33.

CASTRO, C.; CASTRO, E.; SEGOVIA, I. Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 8., 2004, La Coruña. **Investigación en educación Matemática.** La Coruña, España: Universidad de La Coruña, 2004. p. 183 - 194.

DANKHE, G. Investigación y comunicación. In: FERNÁNDEZ-CALLADO, C.; DANKHE, G. (Comps.). **La comunicación humana**: ciencia social. México, DF: McGraw-Hill de México, 1986. p. 385 - 454.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics.** Madison: WCER, 1999.

GIMÉNEZ, J. Potenciando competencia numérica con alumnado de 6 a 12 años. **Revista Uno**, Barcelona,v. único, n. 54, p. 5 - 13, jun. 2010.

GREGORIO-GUIRLES, J. Competencia matemática en primaria. **Sigma**, Gobierno Vasco, v. único, n. 32, p. 31 - 49, sept. 2008.

KILPATRICK, J. A retrospective account of the pasta 25 years of research on teaching mathematical problem-solving. In: SILVER, E. (Ed.). **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving:** Multiple Research Perspectives. Hillsdale, New Jersey: LEA, 1985. p. 1-15.

LLINARES, S. El sentido numérico y la representación de los números naturales. In: CASTRO, E. (Ed.). **Didáctica de la matemática en la educación primaria.** Madrid: Síntesis, 2001. p. 151 - 175.

LLINARES, S. Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. In: ENCUENTRO DE PROGRAMAS DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS, 3., 2008, Santa Fe de Bogotá, Colombia. **Anales…** Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2008. p. 1 - 19. Disponible en: <http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/5302/1/llinares-bogota08.pdf>. Acceso en: 30 mar. 2011.

LLINARES, S.; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education:** Past, Present and Future**.** Netherlands: Sense Publishers, 2006. p. 429 - 459.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC). ORDEN ECI3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Ecuación Primaria. Madrid: **BOE***,* v. único, n. 312, p. 53747 - 53750, dic. 2007.

MUÑOZ-CATALÁN, M.C.; CARRILLO, J. Conocimiento numérico de futuros maestros. **Educación Matemática**, Mexico, D.F., v. 19, n. 1, p. 5 - 26, abr. 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principios y estándares para la educación matemática.** Granada: S.A.E.M. Thales, 2004. (Traducción de la versión del 2000 del NCTM).

NISS, M. Kompetencer og uddannelsesbesrivelse. (Competencies and Subject Description). **Uddannelse**, Copenhagen, Dinamarca, v. único, n. 9, p. 21 - 29, nov. 1999.

NISS, M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION, 3., 2003, Atenas. **Anales...** Atenas: Hellenic Mathematical Society, 2003. p. 115 - 124.

NISS, M. What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. In: PANELLENIO SYNEDRIO MATHEMATIKIS PAIDEIAS/PRAKTIKA, 23., 2006, Patras/Greece. **Anales…** Patras/Greece: Elleniki Mathematiki Etaireia, 2006. p . 39 - 47.

ORGANIZACIÓN PARA COOPERACIÓN Y DESARROLLO ECONOMICO (OCDE). **Marcos teóricos de PISA 2003.** Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Madrid: MEC, 2004.

PLANAS, N.; GORGORIÓ, N. Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 19, n. 1, p. 135-150, mar. 2001.

RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. **Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.** Madrid: Alianza, 2008.

SÁENZ, C. La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 25, n. 3, p. 355 - 366, nov. 2007.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4 - 14, feb. 1986.

SILVER, E.A. Formação de Professores de Matemática: desafios e direções/Educating Teachers of Mathematics: some important challenges and promising directions. **Bolema,** Río Claro, v. 19**,** n. 26, 2006. Disponible en <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/>. Acceso en: 30 mar. 2011.

TIROSH, D.; GRAEBER, A Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 20, n. 1, p. 79 - 96, feb. 1989.

TIROSH, D.; GRAEBER, A Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 21, n. 2, p. 98 - 108, mar. 1990.

YACKEL, E.; COBB, P. Sociomathematical normas, argumentation and autonomy in mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 4, p. 458 - 477, jul. 1996.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Cómo aprender y enseñar competencias.** Barcelona: Graó, 2007.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. Divisibility and division: Proceduran attachments and conceptual understanding. In: PME INTERNATIONAL CONFERENCE, 18th, 1994, Lisboa. **Proceedings...** Lisboa: Universidad de Lisboa. 1994. p. 423 - 430.

Submetido em Abril de 2011.
Aprovado em Junho de 2011.

ANEXO 1: Competencias y conocimientos asociados a cada problema

Problemas	**Proceso cognitivo y competencias asociados**	**Conocimientos asociados**
*1. Determina la operación que esconde cada * en la expresión (756*18)*29=1218, si representan a una suma, una resta, una multiplicación o una división y explica razonadamente por qué.*	Reflexión I.15; II.3, II.4, II.6; III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.11; IV.6	a) estimación de cálculos; b) uso de paréntesis; c) jerarquía de operaciones
2. Explica de tres procedimientos no algorítmicos distintos para obtener el valor de 49.5 x 4.5.	Reflexión I.4, I.5; II.4, II.6; III.1, III.2, III. 4, III.5, III.11, III.12; IV.2	a) propiedades de las operaciones; b) estimación de cálculos.
3. Una pizzería oferta dos pizzas redondas del mismo grosor pero de diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 30 cm. y cuesta 3 €. La grande tiene un diámetro de 40 cm. y cuesta 4€. ¿Qué pizza es la mejor opción en relación a lo que cuesta? Escribe tu razonamiento.	Conexión I.15; III.9; IV.7	a) concepto del área del círculo; b) semejanza y proporcionalidad
4. En una fábrica quiere comercializarse un rompecabezas en distintos tamaños. Si la medida en un modelo inicial es de 50 mm, calcula la medida de los modelos llavero (40%), magnético (150%) y bolsillo (50%).	Reproducción I.10; IV.7	a) concepto del porcentaje directo
5. Ordenar de menor a mayor los siguientes números, expresando el primero en su forma fraccionaria: $0.7\widehat{6}$, *3/4 y 7/9.*	Conexión I.7, I.8, I.9, I.12	a) ordenación de números racionales próximos; b) conversión de la expresión decimal a la expresión fraccionaria de un número racional
6. Hemos comprado un colchón de látex por 850 € por una oferta de descuento del 15% que tenía Mundocolchón. ¿Cuál habría sido su precio fuera de la oferta? ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única operación?	Conexión I.10; IV.7	a) concepto del porcentaje directo e indirecto
7. De un bidón de 29 litros de vino se quieren llenar botellas de 3/4. Calcula el número de botellas necesarias y el vino sobrante.	Conexión II.1	a) división de resta repetida; b) división de un número entero por una fracción; c) significado de la división entre fracciones.