Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho
Brasil

Contreras de la Fuente, Ángel; García Armenteros, Manuel; Font Moll, Vicenç

Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función

Boletim de Educação Matemática, vol. 26, núm. 42 B, abril, 2012, pp. 667-690
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 0103-636X

Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función

Analysis of a Process of Statement on the Teaching of the Limit of a Function

Ángel Contreras de la Fuente*
Manuel García Armenteros**
Vicenç Font Moll***

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo analizar la estructura y funcionamiento de una clase de matemáticas en la que se enseña el límite de una función de una forma intuitiva[1] en el primer curso del Bachillerato[2]. Este análisis se basa en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y está pensado para describir, explicar y valorar procesos de estudio matemático en el aula. El principal resultado es llegar a una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica del proceso de estudio analizado.

Palabras-clave: Límite de una Función. Trayectoria Epistémica. Trayectoria Instruccional. Conflicto Semiótico. Idoneidad Didáctica.

* Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada. Catedrático de E.U. de la Universidad de Jaén, España. Dirección postal: Paraje Las Lagunillas, s/n. Universidad de Jaén, 23007. Jaén, España. *E-mail:* afuente@ujaen.es.

** Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Jaén. Profesor Asociado de la Universidad de Jaén, España. Dirección postal: Paraje Las Lagunillas, s/n. Universidad de Jaén, 23071. Jaén, España. *E-mail*: mgarmen@ujaen.es.

***Dr. en Ciencias de la Educación por la Universitat de Barcelona. Profesor Titular de la Universidad de Barcelona, España. Dirección postal: c/ Figols, 15. 08028. Barcelona, España. *E-mail:* vicencfont@ono.com.

[1] Se entiende por *forma intuitiva* en la enseñanza del límite de una función por aquella que no entra en la formalización del límite mediante δ y ε.

[2] Primer curso del Bachillerato español (estudiantes de 16 años).

Abstract

This current study aims to analyze the structure and development of a math class that teaches the limit of a function in an intuitive way in the first year of high school. This analysis is based on the onto semiotic approach of knowledge and of mathematical instruction. It intends to describe, explain and evaluate the processes of mathematical education in the classroom. The main result is to reach an evaluation based on the didactic suitability of the process of instruction analyzed.

Keywords: Limit of a Function. Epistemic Way. Semiotic Conflict. Didactic Suitability.

1 Introducción

En Planas e Iranzo (2009), se argumenta la importancia de introducir casos reales de aula que contribuyan a deconstruir e interpretar la clase de matemáticas, desde la doble perspectiva de los contenidos y de la interacción social. Este trabajo se ha tenido en cuenta en la organización del presente escrito. Se trata de un modelo teórico que presenta diversos niveles de análisis, elaborado para describir, explicar y valorar procesos de instrucción matemática. En primer lugar, presentamos los significados institucionales del límite de una función, lo cual responde a la pregunta ¿en qué nos basamos para estudiar la enseñanza del límite? En segundo lugar, se exponen herramientas para analizar las interacciones profesor-alumno en el aula, que responden a la pregunta ¿qué vemos durante los procesos de interacción en el aula? Por último, se utilizan útiles para poder efectuar una valoración de la enseñanza para responder a ¿qué se debería mejorar?

El marco teórico en el que nos basamos es el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (CONTRERAS et al., 2005; GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006; D'AMORE; FONT; GODINO, 2007; FONT; CONTRERAS, 2008; FONT; PLANAS; GODINO, 2010; CONTRERAS; GARCÍA, 2011). Se trata de un modelo teórico en el que se interrelacionan presupuestos ontológicos, semióticos y socioconstructivistas, de carácter matemático, para el análisis de procesos de interacción en el aula.

Este trabajo, basado en el trabajo de tesis doctoral de García (2008), tiene como objetivo general describir una parte del proceso de estudio de una clase de primero de Bachillerato sobre el objeto límite de una función, por medio de las trayectorias epistémica e instruccional, dedicando especial atención a la descripción y explicación de los conflictos semióticos detectados y a las técnicas cronogenéticas y topogenéticas detectadas en clase. Dicha descripción se utiliza para realizar una valoración parcial de la idoneidad del proceso de estudio. El artículo se estructura en siete apartados, el primero de los cuales es la introducción. En el segundo apartado se describen los antecedentes de la investigación. En el tercero se describen los elementos teóricos que se incorporan del marco conceptual. En el siguiente apartado se extraen los significados de referencia del límite funcional. A continuación se desarrolla el corpus del trabajo, es decir, el significado implementado verdaderamente en el aula, estudiando las trayectorias epistémica e instruccional. Los dos últimos apartados se dedican a la valoración del proceso de estudio y las conclusiones.

2 ¿En qué antecedentes nos basamos?

Son numerosas las investigaciones sobre las consecuencias de la enseñanza del límite de una función. En este trabajo nos centraremos en las correspondientes al *Advanced Mathematical Thinking* (AMT) debido a que representa el marco conceptual más desarrollado en cuanto a dicho concepto. En esta línea de investigación es un antecedente, ya clásico, el trabajo de Vinner y Tall (1981), en el que se aplica este marco teórico a los conceptos de límite y continuidad a fin de estudiar los factores causantes del conflicto cognitivo originado por la ruptura entre el *concept image* y el *concept definition* del alumno.

Por otra parte, Tall (1991, 1992, 1994, 1995), después de realizar un breve análisis de la enseñanza del Cálculo en diversos países, estudió las dificultades de los estudiantes en cuanto a su comprensión de los conceptos del Cálculo Infinitesimal, buscando las causas de dichas dificultades en cuanto al límite, y postulando que su triple representación (gráfica, numérica y simbólica) es imprescindible para el aprendizaje del concepto.

La corriente investigadora que más desarrollo ha tenido, dentro del AMT, es la seguida por Dubinsky (1996), la cual, basándose en determinados constructos de la teoría de Piaget - abstracción reflexionante, acción, esquema - ha creado la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema). Siguiendo esta corriente, en Cottrill et al. (1996), después de realizar una estudio crítico de la literatura sobre el concepto de límite, desde la dicotomía del límite como proceso dinámico o como proceso estático, se efectúa una descomposición genética del límite basada en los términos de dicha teoría, se aplica a la enseñanza una revisión de la descomposición genética y, por último, se discuten las observaciones realizadas.

Williams (2001), utilizando la metodología de *repertory grids*, dentro de un marco teórico de las metáforas específicas conceptuales y la extensión del significado, estudió las intuiciones de los estudiantes acerca del límite, por medio del análisis de las respuestas a un cuestionario y a entrevistas. Las conclusiones detectaron que las dificultades conceptuales sobre el límite pueden explicarse, en parte, por la anulación del infinito actual de la matemática moderna, al intentar eliminar artificiosidad y paradojas matemáticamente complejas.

Przenioslo (2004), estudia las imágenes mentales acerca del concepto de límite en 238 estudiantes de tercer, cuarto y quinto curso de estudios matemáticos, y en 182 estudiantes que comenzaban dichos estudios. Se utilizaron análisis de testes escritos, así como observaciones sobre las discusiones entre grupos de alumnos y, por último, se realizaron entrevistas. Se identificaron varias clases de imágenes sobre el concepto de límite: aproximación gráfica, aproximación estimada, el límite como valor de la función en un punto y el límite considerado como un algoritmo de cálculo.

Los puntos de vista cognitivos tienen una opción muy definida por los enfoques centrados en el individuo y por la utilización de elementos de análisis desarrollados por la psicología. Este tipo de estudios, al estudiar la subjetividad de alumnos y profesores, son cuestionados por los partidarios de considerar la dimensión social en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Una de las críticas más importantes se basa en el hecho de que la tradición psicologista no tiene suficientemente en cuenta el aspecto social, olvidando, además, los aspectos semióticos. Como puntualiza Artigue (1998, p. 248): “La evolución global de la didáctica contribuye a situar las cuestiones institucionales y culturales en escena, a poner el acento sobre los instrumentos, especialmente los de naturaleza semiótica, en el sentido amplio del trabajo matemático.” Es en esta perspectiva en la cual hay que situar el trabajo que aquí se presenta.

En Kidron (2008), se desarrolla una investigación sobre la conceptualización de la noción de límite, utilizando diversos enfoques teóricos, desde la teoría del procept hasta el modelo de la abstracción en contexto, pasando por la teoría de la instrumentación. El límite se considera como un proceso y como un concepto, y se llega a la conclusión de que los estudiantes ven el concepto de límite como un proceso infinito potencial. El estudio se realizó con alumnos de primer año de universidad, utilizando recursos informáticos.

En Da Silva (2009) se identifican y caracterizan las concepciones de los alumnos de enseñanza secundaria sobre el infinito a través de un cuestionario planteado a 829 alumnos de este nivel. Los resultados muestran una amplia diversidad en las concepciones respecto al concepto, así como algunas dificultades importantes. Lo cual es lógico si se tiene en cuenta que, tal y como se define en Da Silva (2009, p. 125): "el infinito actual es aquel que puede ser concebido como una entidad completa, o sea, todos sus elementos pueden ser pensados en un acto único". En particular, las respuestas incorrectas más elevadas de los estudiantes se corresponden con la cardinalidad de los conjuntos infinitos, lo que está de acuerdo con Waldegg (apud Da Silva, 2009, p. 138) al señalar: "el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una parte propia es un obstáculo muy difícil de superar para comprender los conjuntos infinitos".

Roh (2008, 2010) estudia las imágenes de los alumnos y su comprensión de la definición de límite de una sucesión, analizando las imágenes mentales que tienen bajo un punto de vista dinámico que han de movilizarse antes del método formal de enseñanza del límite. Se demostró que las imágenes dinámicas incompletas obstaculizan a los estudiantes una adecuada comprensión de la definición analítica del límite, es decir, se muestra que la comprensión de la definición del límite está estrechamente relacionada con la existencia, o no, de imágenes previamente construidas sobre los límites.

3 ¿Qué elementos conceptuales tomamos del marco teórico?

Como ya se ha indicado, el marco teórico que utilizamos es el enfoque ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento e instrucción matemática. El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Tomando como noción primitiva la de situación problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto institucional y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a la que hemos aludido, y por otro, la génesis institucional del conocimiento matemático.

Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica,…) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas, de una persona, o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutua con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas.

3.1 Tipos de significado

Se entiende por significado de un objeto institucional al sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de los que emerge dicho objeto en un momento dado. Existen diversos tipos de significado, aunque en este trabajo nos centraremos en el significado institucional de referencia y en el significado institucional implementado.

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por definir lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas. Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y, en general, a lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto que se fija como objeto Instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como significado institucional de referencia del objeto.

Por otra parte, teniendo en cuenta que lo que se planifica para el aula no exactamente se pone en práctica (puesto que las interacciones profesor-alumnos y alumnos-alumnos hacen que se introduzcan nuevos ejemplos, se obvien otros, se aborden nuevas cuestiones,…) y con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales, interesa hablar del significado implementado como el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

3.2 Configuración epistémica. Interacciones y conflictos

Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos:

- Lenguajes: se introducen notaciones y representaciones gráficas.
- Situaciones-problema: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas, o se proponen ejemplos.
- Procedimientos: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver problemas.
- Conceptos: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.
- Proposiciones: se enuncian e interpretan propiedades.
- Argumentos: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

A este conglomerado formado por dichos elementos, necesario para la realización y evaluación de las prácticas, en el EOS se le llama configuración epistémica.

Cuando el profesor aborda la enseñanza de un objeto matemático, pone en juego también el conglomerado de los elementos anteriores y sus actuaciones constituyen la configuración docente. Asimismo los alumnos en sus respuestas a las tareas propuestas usan dichos elementos y los resultados que obtienen constituyen lo que denominamos configuración discente.

Es decir, junto con la configuración epistémica hay que considerar las configuraciones docente y discente, constituyendo todo ello la configuración didáctica. En cada proceso de estudio, se produce una trayectoria de configuraciones didácticas que, a su vez, se descomponen en trayectorias más específicas, cuyo análisis lleva a la comprensión global de la trayectoria didáctica en su conjunto.

La herramienta configuración didáctica permite realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. Conviene, sin embargo, partir de configuraciones didácticas teóricas de referencia. Por ello, en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006) se consideran cuatro tipos teóricos, que se designan como configuraciones adidáctica, magistral, dialógica y personal. En este trabajo, la configuración didáctica que se analiza se aproxima al modelo teórico “configuración dialógica”. En dicho tipo de configuración el profesor se encarga de la formulación y validación, mientras que los alumnos se responsabilizan de la exploración. La institucionalización tiene lugar mediante un diálogo entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución.

Las trayectorias específicas que consideramos pueden agruparse en dos: trayectoria epistémica y trayectoria instruccional (docente y discente). La trayectoria epistémica es la distribución temporal de prácticas, objetos y procesos. La trayectoria Instruccional es la distribución de las acciones docentes y discentes en la instrucción. Por último, dentro de las configuraciones, se producen conflictos semióticos, entendiendo por éstos a cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos agentes (personas o instituciones).

En todo proceso de estudio se produce una interacción didáctica profesor-alumno en el que se establecen unos comportamientos cuyo estudio es necesario aflorar.

Por un lado, se dan elementos que están relacionados con la dirección de la clase por parte del profesor que, según Sensevy (2000), constituyen las técnicas topogenéticas. A lo largo de la investigación se han detectado dos técnicas topogenéticas: una, la cooperación (cuando el profesor y los alumnos construyen el saber en interacción); la otra, la diferenciación topogenética (cuando el profesor hace preguntas y los alumnos responden, el profesor consensúa las respuestas de éstos e instituye el saber).

Por otro lado, los momentos en que se construye el saber son importantes ya que en el desarrollo de una clase se dan avances, retrocesos y cambios de fase, que hay que detectar y analizar. Sensevy (2000) denomina a estos momentos técnicas cronogenéticas. En esta investigación se han detectado las siguientes técnicas cronogenéticas: demora o ralentización del saber (son momentos en la clase en los que hay preguntas y respuestas entre el profesor y los alumnos); afirmación del avance del saber (en un momento determinado el profesor considera que se puede institucionalizar el saber); y, cambio de fase (momentos en que el profesor pasa de una cuestión o problema determinado a otra cuestión u otro problema).

3.3 ¿Qué significados de referencia utilizamos en la enseñanza del límite?

Se han caracterizado tres significados de referencia que son los que se han tenido presentes a lo largo de la investigación. A continuación, comentamos brevemente dichos significados.

Significado gráfico, en el que el estudiante responde con motivos relacionados con la representación gráfica de funciones al concepto de límite de una función y está relacionado con los significados históricos geométrico y preinfinitesimal.

El *significado geométrico* corresponde a la etapa griega y en él se estudian entidades primarias (situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos) y conflictos semióticos, concibiendo el límite según el axioma de continuidad cuyo precedente se encuentra en Anaxágoras, cuando señala que: "[...] en lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño. De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande" (GONZÁLEZ, 1992, p. 21).

El significado preinfinitesimal utiliza razonamientos infinitesimales, es decir, aspectos relacionados con los infinitamente pequeños, pero muy imbricados con la metafísica. Así, por ejemplo, Galileo en su obra *Discursos que se refieren a las ciencias nuevas* recompone las magnitudes continuas por medio de los indivisibles (las líneas están formadas por puntos).

Así, por ejemplo, cuando un estudiante responde con el significado de referencia gráfico a la idea de que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, según la gráfica que sigue:

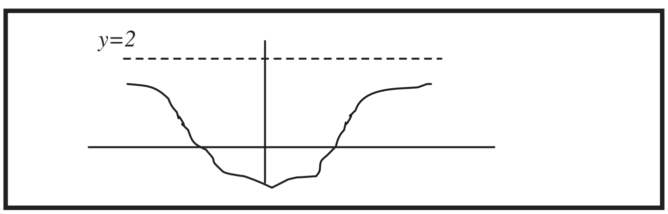


Figura 1 - Asíntota horizontal

está utilizando la idea de Anaxágoras, así como la idea de Galileo, ya que se acerca la gráfica de la función a la asíntota con distancias cada vez más pequeñas y, por otro lado, los puntos que forman la gráfica de la función y los que forman la asíntota cada vez están más próximos conforme x tiende a más infinito.

Significado infinitesimal, que está asociado a la idea de aproximación intuitiva numérica, de modo no ostensivo, obteniéndose el cálculo del límite al sustituir la variable *x* por el valor al que tiende el límite.

Es decir, el estudiante sustituye directamente la variable x por un valor concreto *a*, despreciando aproximaciones del tipo a + δ y a - δ, donde δ es un infinitésimo. Históricamente, este hecho se corresponde con el método de adigualdad de Fermat, cuando, en su obra *Método para la investigación de máximos y mínimos*, pasa de la expresión b ≈ 2a+e a la expresión b=2a, suprimiendo directamente e por ser un infinitésimo que tiende a cero (GONZÁLEZ, 1992, p. 144).

Significado numérico, en el que los alumnos utilizan tablas de variación dando valores a la variable independiente, a partir de los cuales aparecen los valores de la función. Esto obliga al alumno a estimar, por ejemplo, los valores, cuando x tiende a más infinito, de fracciones que tienden a cero según las potencias de la variable independiente x, es decir, hay que comparar la expresión $\frac{k}{x}$ con otras del tipo $\frac{k}{x^2}$ o $\frac{k}{x^3}$.

Históricamente corresponde al significado numérico del límite cuando Moigno, por ejemplo, en sus *Leçons de calcul differéntiel et de calcul intégral*, determina las reglas sobre el orden de una cantidad infinitamente pequeña.

Tanto el significado métrico-analítico como el topológico de Haussdorf, al tratarse de la enseñanza del límite de forma intuitiva, no son utilizados por los alumnos en el nivel de primero de Bachillerato, por lo que no se han tomado como referencia.

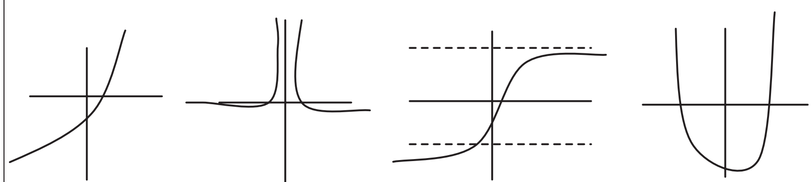
4 La sesión de clase

La sesión de aula (ver su transcripción en el Cuadro 1) tuvo lugar en una clase de matemáticas de primero de bachillerato, con 17 estudiantes de 15 y 16 años, en un Instituto de Educación Secundaria de un pueblo cercano a Jaén, España. El profesor tiene 25 años de experiencia docente en el nivel de secundaria y 12 como profesor de universidad. La sesión dura 45 minutos y ocurre la sexta semana del tercer trimestre del curso. El concepto que se estudia es el de límite en el infinito y el profesor desarrolla la idea intuitiva del límite en el infinito. Son alumnos que no han trabajado en cursos anteriores la noción de límite y, por tanto, no han tenido contacto con la idea de límite de una sucesión. No disponen de calculadoras en la clase.

Unidad de análisis 1: Idea intuitiva de límite en el infinito.

La clase comienza con la revisión de 4 gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando x tiende a infinito (límites en el infinito).

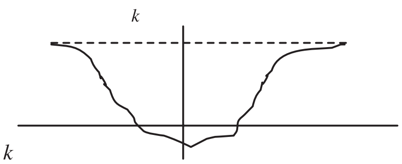
1. **Profesor**: *¿Tenéis hechos los límites de las 4 funciones de las gráficas (f, g, h, i)?*
2. **Profesor**: [Usando tizas blanca y roja mate, las dibuja en la pizarra]. *¿Éstas son?, ¿os suena la 2ª?*
3. *Alumnos: Sí, los tenemos.*



f h g i

4. **Profesor:** [Toma y observa la libreta de una alumna].
5. **Profesor:** *¿Cómo puede determinarse?*
6. **Profesor:** *¿Cuánto vale para el caso f?*
[Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la "tendencia"]
7. *Alumna (Yurena): Según la tendencia.*
8. *Alumna (Yurena): Vale* $+\infty$ *y se expresa:* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
9. **Profesor:** [Se centra en la gráfica f y explica el comportamiento de la gráfica para x tendiendo a más infinito y menos infinito]: *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto? indefinidamente.* *Y el* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?* [Se dirige a un alumno].
10. *Alumnos:* [El alumno interrogado no contesta y dice que no lo sabe].
11. *Alumnos:* [Otro alumno]: *pues –5000, menos lo que se quiera...*
12. **Profesor:** *Chiquitín, dime el* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
13. *Alumnos:* [El alumno no contesta].
14. *Alumnos:* Otros alumnos dicen: *¡2!*
15. **Profesor:** *Dime la monotonía.*
16. *Alumno: Creciente.*
17. **Profesor:** *Pero, ¿crece siempre?*
18. *Alumno: Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*
19. **Profesor:** *¿Y* $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ *?*
20. *Alumnos: ¡-2!*
21. **Profesor:** *¿Cómo lo interpretas Antonio?*
22. *Alumnos:* [Antonio no contesta, pero una alumna]: *la función toma valores menores que –2.*
23. *Alumnos: Es la x la que interesa.*
24. **Profesor:** *Toma valores muy grandes, pero en valor absoluto, aunque con signo menos. ¿Cómo son estas rectas?* [Señala las asíntotas]. *Se denominan asíntotas horizontales.*
[Define lo que es una asíntota horizontal con la expresión analítica]:
Y = k es una asíntota horizontal $\iff \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$

"La recta se va a pegar a la función".
Ahora sí que si es más infinito o menos infinito, intervienen las semirrectas. Por ejemplo:



$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$

25. **Profesor (respecto a la gráfica h).** *Veamos, Isabel, ¿cuál es el límite cuando x tiende a más infinito de h(x)?*
26. *Alumna:* [Isabel responde 0, pero no lo explica].
27. **Profesor:** [El profesor lo aclara y heurísticamente llega a 0]. *Y pregunta ¿qué ocurre con la otra rama? (es decir límite cuando x tiende a menos infinito de h(x)).*
28. *Alumna:* [Responde Mª José que es 0]. *Va pegándose al eje X.*
29. **Profesor:** *Hay una asíntota horizontal en y=0.*
30. **Profesor:** *Con h sí podemos aplicar que el límite cuando x tiende a infinito de h(x) es igual a k.*
31. **Profesor:** *Ya vimos que infinito no es un número, pero cuando me acerco a él tengo que especificar si es por la derecha o por la izquierda.*
32. **Profesor (respecto a la gráfica i(x)).** *¿Y con esta gráfica, Lucía, ...? ¿María?*
33. *Alumna:* [María responde que el límite cuando x tiende a más infinito es más infinito].
34. **Profesor**: [Señala la parte de la izquierda de la gráfica]: *¿qué pasa aquí?*
35. *Alumna:* [María responde que el límite cuando x tiende a menos infinito de i es menos infinito].
36. **Profesor:** *¡¡Votos a favor!!* (3 o 4 votos). *¡¡Votos en contra!!* (Todos los demás).
37. *Alumna:* [María rectifica y dice más infinito].
38. **Profesor:** *Podemos intuir lo que es una asíntota. ¿Podemos intuir una función para la parábola?* [El profesor escribe $y = x^2 +$ ¿].
39. Alumna: $x^2 \pm 50x$.
40. **Profesor:** *Pasa por el origen y es contradictorio.*
41. *Alumna:* [La alumna rectifica y dice $y=x^2+k$].
42. **Profesor:** *El patrón nuestro es $f(x) = x^2$ con el V (0,0).* [Heurísticamente el profesor los conduce a $y = x^2 - 2$].

Cuadro 1 - Transcripción de la sesión
Representación escrita del discurso de la clase

4.1 ¿Cuál es el significado implementado?

El significado implementado es la descripción exhaustiva, en las columnas 1-4 de la cuadro 1, de la actividad que se desarrolla en el aula. Si se analiza la actividad matemática que se desarrolla en el aula estaremos en lo que se denomina la trayectoria epistémica, si, en cambio, se estudian las interacciones profesor-estudiantes se tendrá la trayectoria interaccional.

4.1.1 Trayectoria epistémica

Se realiza un análisis epistémico del proceso de instrucción, para ello primeramente se identifican las prácticas a realizar y, después, los objetos primarios con la crónica de la sesión, dividiéndose en unidades de análisis de acuerdo a las distintas tareas que se van desarrollando. Llamaremos configuración epistémica al sistema de objetos relativos a la resolución de la tarea. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales, según los estados de la trayectoria, que llamaremos unidades epistémicas. Las distintas oraciones que componen la crónica del proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos unidades naturales de análisis.

En la sesión que se estudia solamente aparece una configuración epistémica, que es desarrollada a lo largo de 10 unidades epistémicas.

4.1.1.2 Prácticas

Las prácticas matemáticas, realizadas en la configuración didáctica implementada en la clase que se analiza, se inician con la presentación de cuatro gráficas para que, desde un punto de vista intuitivo, se dé solución a un cierto tipo de problema de modelización matemática: la determinación del límite de estas funciones en el infinito ($+\infty$ y $-\infty$), por medio del uso del lenguaje gráfico, buscando la definición intuitiva de asíntota horizontal. Para el éxito de la tarea, el tipo de actividad matemática requerida en estos ejemplos, basándose en el conocimiento escolar de gráficas de funciones, es el recuerdo y interpretación de la gráfica de una función, con el fin de analizar el comportamiento de la misma según valores de x y su *tendencia* a los infinitos. Se trata de funciones en las que las gráficas de las mismas nunca atraviesan a las asíntotas, ignorando, por tanto, los casos más complejos donde esto no ocurre.

Las cuatro gráficas escogidas por el profesor tienen comportamientos muy diversos: una gráfica es estrictamente creciente y sin asíntotas; en otra aparece implícitamente la idea de asíntota horizontal, sin especificar cuál es para que el estudiante la deduzca; en otra hay dibujadas sus asíntotas horizontales - esperando conducir heurísticamente al alumno a su definición - y, por último, aparece una gráfica tipo *parábola*.

El profesor plantea a los alumnos intentar asignar a esta última gráfica de función una expresión analítica, buscando que el alumno efectúe una conversión del lenguaje gráfico al analítico.

A largo de la configuración aparecen los significados de referencia gráfico e infinitesimal y, en menor medida, el numérico.

4.1.1.3 Objetos primarios

El texto se descompone en unidades de análisis (grupo de filas de la transcripción) con el objetivo de poder caracterizar el tipo de objeto matemático que se implementa realmente en la clase.

En la cuadro 2 se muestra la trayectoria epistémica de la primera sesión del estudio del límite funcional en primero de Bachillerato, referida al límite en el infinito.

Unidad Natural	Configuración Epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado	Objeto
0	CE1	0	Idea intuitiva de límite en el infinito en modo gráfico.	E1: Situacional	Presentación de la sesión
1-3		1	Dibujo y presentación de gráficas. Las cuatro gráficas	E1: Situacional E3: Lingüístico	Situacion-problema Lenguaje (gráficas)
4-8		2	Estudio de f para $x \to +\infty$ Alumna: según la tendencia Expresión del límite infinito en el infinito	E2: Actuativo E5: Proposicional E3: Lingüístico	Procedimiento (observación visual del comportamiento) Proposición (Afirmación sobre el tipo de comportamiento) Lenguaje $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
9-11		3	Estudio de f para $x \to -\infty$ Comportamiento de la gráfica f Límite cuando x tiende a menos infinito	E2: Actuativo E5: Proposicional E3: Lingüístico	Procedimiento (observación visual del comportamiento) Proposición (Afirmación sobre el tipo de comportamiento) Lenguaje $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
12-18	4		Estudio de g para $x \to +\infty$	E2: Actuativo	Procedimiento (observación visual del comportamiento)
19-23		5	Estudio de g para $x \to -\infty$	E2: Actuativo	Procedimiento (observación visual del comportamiento)
24	6		Definición de Asíntota Horizontal. Se justifican las acciones adoptadas para la gráfica g	E4: Conceptual E6: Argumentativo	Concepto (Asíntota horizontal) Argumentación del profesor sobre la asíntota
25-28		7	Estudio de h para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo	Procedimiento (observación visual del comportamiento)
29-31		8	Estudio de una asíntota horizontal Razonamiento del profesor	E1: Situacional E6: Argumentativo	Situación – problema Asíntota horizontal Argumentación del profesor sobre la asíntota
32-37		9	Estudio de i para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo	Procedimiento (reconocimiento de una asíntota en una gráfica)
38-42		10	Asignación de una fórmula a una gráfica de función. Razonamiento heurístico del profesor	E4: Conceptual E6: Argumentativo	Concepto (expresión analítica de una gráfica) Argumentación del profesor sobre una parábola

Cuadro 2 - Trayectoria epistémica de la primera sesión.

4.1.1.4 Procesos

La configuración analizada tiene un carácter esencialmente *actuativo*, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de límites apoyadas en la representación gráfica de determinadas funciones. Según la clasificación de procesos propuesta en Font, Rubio y Contreras (2008) se trata de desarrollar el proceso de mecanización (algoritmización) de técnicas de cálculo de límites. No hay, por lo general, procesos de enunciación de proposiciones, dado que no se pretende enunciar propiedades correspondientes al trabajo con límites.

4.1.2 Trayectoria instruccional

Se estudia la primera configuración didáctica de la sesión denominada *idea intuitiva de límite en el infinito*, que es de tipo dialógico. Dada la extensión que supone la configuración se realizará a continuación una síntesis, centrándose fundamentalmente en el tipo de configuración didáctica que se desarrolla, en los conflictos semióticos que se detectan y en las técnicas cronogenéticas y topogenéticas (Sensevy et al., 2000) que utiliza el profesor a lo largo del proceso de estudio.

4.1.2.1 Tipo de configuración

A lo largo de la sesión el profesor muestra una *configuración dialógica*. Para poder poner en evidencia dicha tipología de configuración, se mostrarán algunas de las unidades de análisis donde ésta se contempla.

1. ***Profesor**: ¿Tenéis hechos los límites de las 4 funciones de las gráficas f, g, h, i?*
2. ***Profesor**:* [Usando tizas blanca y roja mate, las dibuja en la pizarra] *¿Éstas son?, ¿Os suena la 2ª?*

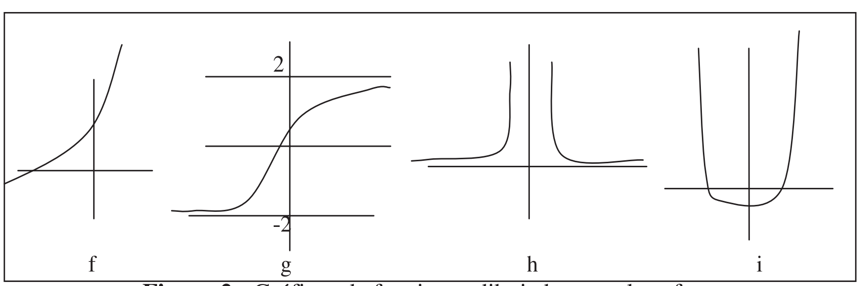


Figura 2 - Gráficas de funciones dibujadas por el profesor

…
*3. **Alumnos**: Sí, los tenemos.*
5. **Profesor:** ¿Cómo pueden determinarse los límites?
…
*6. **Profesor:** ¿Cuánto vale para el caso f?* [Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la "*tendencia"*].
7. **Alumna** (Yurena): Según la tendencia.
*8. **Alumna** (Yurena): Vale +∞ y se expresa:* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
…
*17. **Profesor**: Pero, ¿crece siempre?*
*18. **Alumno:** Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*
…
*32. **Profesor*** [Respecto a la gráfica i(x)]. *¿Y con esta gráfica, Lucía, ...? ¿María?*
*33. **Alumna**:* [María responde que el límite cuando x tiende a más infinito es más infinito].
*34. **Profesor**:* [Señala la parte de la izquierda de la gráfica]. *¿Qué pasa aquí?*
*35. **Alumna**:* [María responde que el límite cuando x tiende a menos infinito de i es menos infinito].
…

Como se puede observar, en las diferentes unidades naturales de análisis el profesor realiza constantemente preguntas a los estudiantes y éstos responden a las mismas. Además, los procesos de enunciación de proposiciones y de argumentación se construyen entre el profesor, algunos alumnos y el resto de la clase. Por otra parte, la institucionalización se efectúa por medio de un diálogo contextualizado entre el profesor y los estudiantes. Por tanto, nuestra conclusión es que se trata de una configuración dialógica.

4.2 Conflictos semióticos detectados

A lo largo de la sesión se han detectado diversos conflictos semióticos de tipo epistémico, debido al discurso del profesor, que aparecen en algunas de las unidades de análisis. Para poner en evidencia estos conflictos se describen, a continuación, algunas de dichas unidades de análisis con sus comentarios correspondientes.
*9. **Profesor:*** [Se centra en la gráfica *f* y explica el comportamiento de la gráfica para *x* tendiendo a más infinito y menos infinito]. *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto?, indefinidamente.*

Y el $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$*, ¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?* [Se dirige a un alumno].

La primera acción es aclarar la respuesta de la alumna al resto de la clase, expresando frases metafóricas (*cuando la gráfica va para infinito*, *se hace mayor la y*, *indefinidamente*), aunque el tratamiento que da es muy transparente, la noción *indefinidamente* se estima que no ha quedado clara. La expresión *indefinidamente*, al no aclararse posteriormente que los valores de *y* pueden hacerse tan grandes como se quiera, da lugar a un *primer conflicto semiótico* de tipo epistémico, ya que el alumno, ante una asíntota horizontal, puede creer que *f*(*x*) (la *y*) tiende a más infinito.

Cuando el profesor plantea la pregunta en –∞, trata de inducir a los alumnos a error al pedir los valores que puede tomar la *x* y dar como posibilidad el 0 o el -1.

…

15. **Profesor:** Dime la monotonía.
16. **Alumno**: Creciente.
*17. **Profesor**: Pero, ¿crece siempre?*

El alumno responde correctamente, aunque el profesor insiste en este proceso dialógico (*pero, ¿crece siempre?*). Es por ello que el *conflicto semiótico del crecimiento y el límite (segundo conflicto semiótico)* está muy presente y parece ser que el alumno no ha relacionado aún estos conceptos porque, en caso contrario, ya habría dado una respuesta.

…

*24. **Profesor**: Toma valores muy grandes, pero en valor absoluto, aunque con signo menos. ¿Cómo son estas rectas?* [Señala las asíntotas]. *Se denominan asíntotas horizontales.*

[Define lo que es una asíntota horizontal con la expresión analítica].

Y = k es una asíntota horizontal $\Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$

"La recta se va a pegar a la función".

Ahora sí, que si es más infinito o menos infinito, intervienen las semirrectas. Por ejemplo:

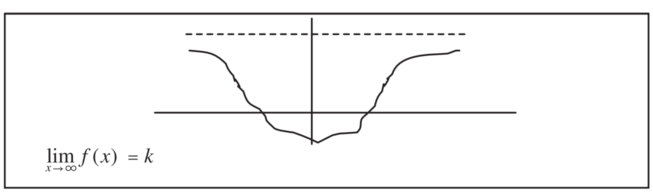


Figura 3 - Asíntota horizontal dibujada por el profesor

La acción del profesor ahora es situarse en una perspectiva magistral del proceso de instrucción para definir la noción de asíntota horizontal y, metafóricamente, les induce la idea de que *la recta se va a pegar a la función* (se observa cómo el profesor introduce con esta metáfora un posible *tercer conflicto semiótico* a los alumnos), comparando la gráfica *g*, objeto de estudio, con otra gráfica que sólo posee una asíntota horizontal.

4.3 Técnicas topogenéticas y cronogenéticas

En este proceso de estudio se han descubierto diversas técnicas topogenéticos y otras cronogenéticas. Para mostrar las mismas, se describen las unidades de análisis correspondientes.

5. **Profesor:** ¿Cómo pueden determinarse los límites?
*6. **Profesor:** ¿Cuánto vale para el caso f?* [Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la "*tendencia"*].
7. **Alumna** (Yurena): Según la tendencia.
8. **Alumna** (Yurena): Vale +∞ y se expresa: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
*9. **Profesor:*** [Se centra en la gráfica f y explica el comportamiento de la gráfica para x tendiendo a más infinito y menos infinito]. *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto?, indefinidamente.*
Y el, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?* [Se dirige a un alumno].
*10. **Alumno**:* [El alumno interrogado no contesta y dice que no lo sabe].
*11. **Alumno**:* [Otro alumno]. *Pues –5000, menos (lo que se quiera)...*

A lo largo de esta subconfiguración, correspondiente a la gráfica de la función *f*, el profesor utiliza diversas *técnicas topogenéticas* (SENSEVY; MERCIER; SCHUBAUER-LEONI, 2000), como son la *cooperación*, en la que el profesor y los alumnos construyen el saber; y la *diferenciación topogenética*: el profesor hace las preguntas, el alumno responde, el profesor consensúa la respuesta con los alumnos e instituye el saber.

También utiliza *técnicas cronogenéticas* de control-delimitación, como es la *demora o ralentización del saber* en los momentos de preguntas y respuestas entre el profesor y los alumnos; de *afirmación de avance del saber*, cuando el profesor, ante la respuesta de los alumnos sobre la institucionalización del saber, asiente. Por último, la técnica cronogenética de *cambio de fase*, que se da al haber finalizado la gráfica de *f* y pasar a la gráfica *g*.

…
18. ***Alumno:*** *Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*

Ante la pregunta del profesor, el alumno la justifica de una forma vaga e imprecisa (*hay infinitos números decimales*). Sin embargo, el alumno es consciente de que el crecimiento de esta función no es como el de la anterior (*desde luego, no crece igual que la f*). Asumiendo el alumno un estado de argumentación y justificación de conjeturas, no parece que haya entendido este límite, y da la impresión que prefiere no dar la respuesta antes que equivocarse. Aún sin saber la respuesta, puede haber superado el conflicto antes aludido (si $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x) \rightarrow +\infty$) al que parece que lo quiere conducir el profesor, aunque no aparece explícitamente la justificación. Se echa en falta la *técnica cronogenética* de la *determinación del momento propicio para la institucionalización del saber*.

Una técnica cronogenética importante es la del *alumno genérico*. Es decir, el profesor, al no poder preguntar a cada uno de los alumnos y para avanzar en su enseñanza, se apoya en las respuestas de un único alumno dando, muchas veces, esta respuesta como válida. El problema está en que quedarán muchos otros estudiantes sin construir el significado.

5 Conclusiones

La investigación sobre la enseñanza del límite de una función es una temática ampliamente estudiada en educación matemática. Sin embargo, la mayoría de estos estudios tienen unas connotaciones de carácter psicológico, que solamente cubren parte de las indagaciones que pueden efectuarse en este campo, quedando la parcela del análisis semiótico muy poco trabajada. Como señala Artigue (1998), la evolución global de la didáctica contribuye a situar las cuestiones institucionales y culturales en escena, a poner el acento sobre los instrumentos, especialmente los de naturaleza semiótica, en el sentido amplio del trabajo matemático. En este trabajo se ha utilizado el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) para dar respuesta a este importante problema didáctico.

En primer lugar se han determinado los diferentes significados de referencia del límite de una función, habiéndose identificado, en la epistemología histórica de las matemáticas, tres de dichos significados que están relacionados con el desarrollo intuitivo del límite en el nivel de primero de Bachillerato, objeto de la investigación. Con este marco de referencia ha sido posible abordar, en profundidad, el estudio del significado institucional implementado. Los significados de referencia obtenidos son: el gráfico, el infinitesimal y el numérico, todos ellos en estrecha relación con algunos de los momentos históricos del desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

El estudio del significado institucional implementado, correspondiente a una clase natural de matemáticas de primero de Bachillerato, se ha realizado según las trayectorias epistémica e instruccional. Con la primera de ellas se han podido extraer datos relevantes sobre las configuraciones epistémicas en cuanto a las dificultades de los alumnos con el aprendizaje del límite funcional. Con la trayectoria instruccional se ha podido ver el tipo de enseñanza desarrollada por el profesor, que, en gran medida es dialógica, y, en menor medida, magistral. Además, el estudio pormenorizado de las clases ha facilitado aflorar los conflictos semióticos reales de clase. Por otra parte, el análisis de las técnicas cronogenéticas y topogenéticas presentes en la clase ha permitido detectar algunas de ellas: técnica topogenética de la diferenciación topogenética y técnica topogenética de la cooperación. En cuanto a las cronogenéticas, las de control-delimitación, como las de ralentización, la afirmación del avance del saber, el cambio de fase, la determinación del momento propicio y el *alumno genérico*. A destacar esta última técnica, que puede conducir al profesor a resultados negativos en su enseñanza.

Teniendo en cuenta el análisis de la trayectoria instruccional, en la que se ha analizado en profundidad la actuación del profesor y los alumnos en clase, ha surgido un perfil del profesor de carácter *dialógico*. Dado que pueden existir otros perfiles, como el mecanicista, el magistral y el adidáctico, pueden desarrollarse líneas de investigación futuras en las que se estudien los perfiles de una determinada muestra de profesores del nivel de primero de Bachillerato en torno a la enseñanza del límite de una función.

En cuanto a las idoneidades estudiadas, epistémica e interaccional, puede decirse que no es fácil hallar un equilibrio entre las mismas, ya que una idoneidad epistémica media junto a una interaccional también media podría redundar en una idoneidad cognitiva media, suficiente para la enseñanza de un objeto matemático como el límite de una función de gran complejidad semiótica. Sin embargo, la idoneidad cognitiva obtenida en el proceso de estudio ha sido baja, lo cual indica que en la clase analizada al desarrollar el límite de modo intuitivo (donde no es estudiado el significado métrico) no garantizan que éste sea comprendido por el alumno.

Por último, los análisis detallados como el que se ha realizado en este trabajo permiten explicar ciertos resultados obtenidos por algunas de las investigaciones citadas en el apartado de antecedentes. Nuestro estudio contribuye a aclarar, dentro de las limitaciones que supone extraer consecuencias sobre el estudio de la instrucción en una clase, aspectos de la investigación de Przenioslo (2004). En el artículo de este investigador se identifican algunas imágenes mentales de los alumnos sobre el límite (aproximación gráfica, aproximación estimada, el límite como valor de la función en un punto y el límite considerado como un algoritmo de cálculo). La investigación que se presenta permite explicar la presencia de este tipo de imágenes mentales en los alumnos como resultado del proceso de instrucción. Por una parte, algunas de dichas imágenes mentales están relacionadas con significados de referencia ligados a la propia historia-epistemológica de las Matemáticas, y están presentes en el proceso de instrucción. Por otra parte, el análisis detallado del proceso de instrucción y el estudio de la falta de resolución de determinados conflictos semióticos, como, por ejemplo, asociar el crecimiento de x hacia el infinito con el crecimiento indefinido de la función $y = f(x)$ permite explicar la generación de las imágenes mentales de los alumnos, que se apoyan en la aproximación gráfica sin tener en cuenta el infinito actual.

Nuestro trabajo viene a corroborar la hipótesis de Tall (1991, 1992, 1994, 1995) que indica que la triple representación gráfica, numérica y simbólica es imprescindible para el aprendizaje del concepto, ya que en la experiencia educativa del presente trabajo se muestra la necesidad de que el profesor hubiera utilizado con frecuencia la representación numérica al objeto de superar algunos conflictos semióticos que han estado presentes en algunos alumnos.

Respecto a Williams (1991) y Kidrom (2008), en el artículo hemos mostrado que el desarrollo del límite de una función solamente de forma intuitiva elimina la posibilidad de conceptualización del infinito actual en los estudiantes. Por tanto, se corrobora que, tal como expresan los investigadores citados, los alumnos ven el concepto de límite como un proceso infinito potencial.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto I+D+i EDU2009-08120, del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

ARTIGUE, M. L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, France, v. 18, n. 2, p. 231 - 262, 1998.

CONTRERAS, A. et al. Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, France, v. 25, n. 2, p. 151 - 186, 2005.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M. Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)**, México, v. 14, n. 3, p. 277 - 310, nov. 2011.

COTTRILL, J. et al. Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, USA, v. 15, n. 2, p. 167 - 192, 1996.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. **Paradigma**, Maracay, Venezuela, v. 28, n. 2, p. 49 - 77, dec. 2007.

DA SILVA, P.A. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123 - 146, 2009.

DUBINSKY, E. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. **Educación Matemática**, México, v. 8 n 3, p. 25 - 41, dic. 1996.

FONT, V.; CONTRERAS, Á. The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 69, n. 1, p. 33 - 52, Sept. 2008.

FONT, V., RUBIO, N Y CONTRERAS, Á. Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. In: **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 21, p. 706 - 715, 2008. México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J.D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, Salamanca, España, v. 33, n.1, p. 89 - 105, feb. 2010.

GARCÍA, M. **Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato**. 2008, 406f. Tesis (Doctor en Ciencias Matemáticas) - Universidad de Jaén, Jaén, 2008.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática, **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, france, v. 26, n. 1, p. 39 - 88, 2006.

GONZÁLEZ, P. M. **Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII**. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

KIDROM, I. Abstraction and consolidation of the limit precept by means instrumental schemes: the complementary rule three different frameworks. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 69, n. 3, p.197 - 216, Nov. 2008.

PLANAS, N.; IRANZO, N. Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática (RELIME)**, México, v. 12, n. 2, p.179 - 213, jul. 2009.

PRZENIOSLO, M. Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 55, n.1 - 3, p. 103-132, Mar. 2004.

ROH, K. Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 69, n. 3, p.217 - 233, Nov. 2008.

ROH, K. An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the epsilon-strip activity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 73, n. 3, p.263 - 279, Apr. 2010.

SENSEVY, G., MERCIER, A.; SCHUBAUER-LEONI, M. L. Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course á 20. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, France, v. 20, n. 3, p. 263 - 304, 2000.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, A. C., 1991.

TALL, D. Students' Difficulties in Calculus. Plenary presentatiton in Working Group 3,In: International Congress Mathematical Education (ICME), 7th, 1992, Quebec. **Proccedings…** Quebec: University of Warwick - Mathematics Education Research Centre, 1992 . p. 1 - 8.

TALL, D. Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. **Mathematics Education Research Centre** University of Warwick, 1994.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSICOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 19th, 1995, Recife. **Proceedings...** Recife: Editora Universitária da UFPE, 1995. v. 1, p. 61 - 75.

VINNER, S.; TALL, D. Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151 - 169, 1981.

WILLIANS, S. R. Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston , v. 32, n. 4, p. 341 - 367, Jul. 2001.

Submetido em Setembro de 2011.
Aprovado em Novembro de 2011.