



Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

bolema@rc.unesp.br

Universidade Estadual Paulista Júlio de

Mesquita Filho

Brasil

Werle de Almeida, Lourdes Maria; Nivalda Palharini, Bárbara  
Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática  
Boletim de Educação Matemática, vol. 26, núm. 43, agosto, 2012, pp. 907-934  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Rio Claro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291226275008>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto



# Os “Mundos da Matemática” em Atividades de Modelagem Matemática

## The “Worlds of Mathematics” in Mathematical Modelling Activities

Lourdes Maria Werle de Almeida\*

Bárbara Nivalda Palharini\*\*

### Resumo

As argumentações pautadas nos interesses e objetivos de alunos e professores durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática foram sistematizadas em Kaiser e Sriraman (2006) por meio de perspectivas para a Modelagem Matemática na Educação Matemática. Considerando o propósito do nosso trabalho de investigar a Modelagem Matemática como prática favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático de alunos, pautamos nossas discussões na perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática. Para abordar o pensamento matemático utilizamos os pressupostos teóricos de Dreyfus (2002) sobre o pensamento matemático de estudantes, e as caracterizações de Tall (2004) para diferentes “Mundos da Matemática”. As análises empreendidas se realizam a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática e expressam reflexões e considerações sobre o pensamento matemático dos alunos e os processos cognitivos que mobilizaram e apontam indícios do trânsito dos alunos pelos Três Mundos da Matemática durante o desenvolvimento destas atividades. Os resultados obtidos a partir dessa análise indicam o potencial de atividades de Modelagem Matemática como desencadeadoras de processos de pensamento matemático caracterizados por Dreyfus (2002) e Tall (2004).

\*Doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Docente da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, Brasil. Endereço para Correspondência: Rua Antonio Pisicchio, 155, apto 303, CEP: 86050-482, Londrina, PR, Brasil. E-mail: lourdes.maría@sercomtel.com.br

\*\* Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, PR, Brasil. Endereço para Correspondência: Rua Jerusalém, 120, apto 1001 B, CEP: 86050-520, Londrina, PR, Brasil. E-mail: babipalharini@hotmail.com

**Palavras-Chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Pensamento Matemático. Três Mundos da Matemática.

### Abstract

The arguments and objectives guided by the interests of students and teachers during the development of mathematical modelling activities were systematized by Kaiser and Sriraman (2006) as perspectives on Mathematical Modelling in Mathematics Education. Considering the purpose of our article of investigating Mathematical Modelling as practice that can lead to the development of students' mathematical thought, we based our discussions on Cognitive modeling. To approach mathematical thought, we used Dreyfus' theoretical presuppositions (2002) about students' mathematical thought and the characterizations of Tall (2004) for different "Worlds of Mathematics." Analyses are carried out of the development of modeling activities by students in a university-level mathematics teaching program and express thoughts and considerations regarding the students' mathematical thinking and cognitive processes. There was evidence that students move among the Three Worlds of Mathematics during the development of these activities. The results point to the potential of Mathematical Modelling activities for the development of processes of mathematical thought characterized by Dreyfus (2002) and Tall (2004).

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modelling. Mathematical Thinking. Three Worlds of Mathematics.

## 1 Introdução

As discussões sobre a importância de encontrar um espaço para as atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Matemática vêm ocupando considerável número de pesquisadores e professores dos diferentes níveis de escolaridade.

Ao mesmo tempo em que todos empreendem buscas por respostas às problemáticas com que se defrontam, os caminhos que optam por percorrer não são os mesmos, e os interesses e as possibilidades passam a caracterizar um mosaico de situações inscritas em concepções e perspectivas que, por vezes, chegam a divergir.

Considerando os investimentos nas pesquisas em relação à Modelagem Matemática, que, em algumas situações, também se debruçam sobre aspectos pragmáticos, e o desenvolvimento de material bibliográfico que, de algum modo, possa fomentar as práticas, todavia, parece que três questões são recorrentes: a) O que é Modelagem Matemática na Educação Matemática? b) Como fazer

Modelagem Matemática na sala de aula? c) Por que usar Modelagem Matemática na sala de aula?

Embora reconhecendo que as três questões são interdependentes, não podendo investigar-se completamente uma delas sem recorrência às outras, neste trabalho a tônica reside em contribuir para estruturação de aspectos que, em resposta à questão *Por que fazer Modelagem Matemática na sala de aula?* podem apontar o potencial de atividades de Modelagem Matemática como desencadeadoras de processos de pensamento matemático dos alunos.

A identificação ou caracterização de atividades com esse potencial e sua introdução nas aulas de Matemática, são aspectos importantes, considerando argumentações como a de Sfard (1991), por exemplo, de que a *aparente* dificuldade que muitos alunos revelam em relação à sua aprendizagem indica que deve existir algo diferente na maneira de pensar matematicamente: “[...] a Matemática parece ultrapassar outras disciplinas científicas, deve haver algo realmente especial e único no tipo de pensamento envolvido na construção de um universo matemático” (SFARD, 1991, p 2).

A fim de investigar a Modelagem Matemática como desencadeadora do pensamento matemático, este trabalho se debruça sobre a identificação de alguns elementos que podem sinalizar manifestações de pensamento matemático dos alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática e, com esta configuração, insere-se nos interesses pela perspectiva cognitivista de Modelagem Matemática caracterizada por Kaiser e Sriraman (2006).

Gray et al. (1999), ao tratar de pensamento matemático de estudantes, argumentam que aprender a pensar matematicamente significa desenvolver um *ponto de vista matemático*, ser capaz de realizar abstrações e desenvolver certa competência para lidar com as estruturas matemáticas.

David Tall passa a discutir, especialmente a partir de Tall (2002), uma perspectiva de desenvolvimento cognitivo (associado ao pensamento matemático) dos estudantes que leva em consideração ideias do psicólogo Jerome. S. Bruner que tratam do esforço de um indivíduo em “traduzir experiências para um modelo de mundo” (BRUNER, 1966, p. 10, apud TALL, 2004a) e levam o autor a caracterizar diferentes modos de representação mental.

Referindo-se especificamente às experiências matemáticas, Tall (2004a, p. 285) reinterpreta as ideias de Bruner, e caracteriza o que denomina de “Três Mundos da Matemática” (Corporificado, Simbólico Proceitual e Axiomático Formal), ponderando que determinados processos de pensamento matemático dos alunos expressam o seu desenvolvimento cognitivo e passam a ter

características específicas em cada um desses mundos.

Levando em consideração estas argumentações de David Tall, neste trabalho realizamos nossas análises a partir do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática por um grupo de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Tais análises conduzem a reflexões e considerações sobre o pensamento matemático dos alunos e os processos cognitivos que mobilizam durante seu envolvimento com atividades de Modelagem Matemática, bem como os indícios do trânsito dos alunos pelos Três Mundos da Matemática durante este desenvolvimento. Com esta configuração, a análise pode revelar o potencial de atividades de modelagem para o *aprender a pensar matematicamente* a que se referem Gray et al. (1999).

## 2 Sobre Modelagem Matemática

De modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática origina-se em uma situação problemática e tem como característica essencial a possibilidade de abranger a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.

Neste sentido, a Modelagem Matemática diz respeito à análise de uma situação-problema, à construção de representações matemáticas, à obtenção de resultados matemáticos para a situação e à reinterpretação dos resultados em relação à situação.

Considerando que os procedimentos associados ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem podem ocorrer na sala de aula, tratamos da Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

A partir dessa caracterização, Almeida e Ferruzzi (2009) identificam um conjunto de procedimentos realizados pelos alunos ao desenvolver atividades de modelagem:

[...] a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático<sup>1</sup>), a resolução do problema por meio de

<sup>1</sup> Segundo Lesh (2010), um modelo matemático é um sistema conceitual, descriptivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema.

procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 121).

Os referidos procedimentos, ainda que possam ser realizados de forma não linear em relação à ordem em que são apresentados, são associados ao que se denomina *etapas da Modelagem Matemática* mostradas na Figura 1.

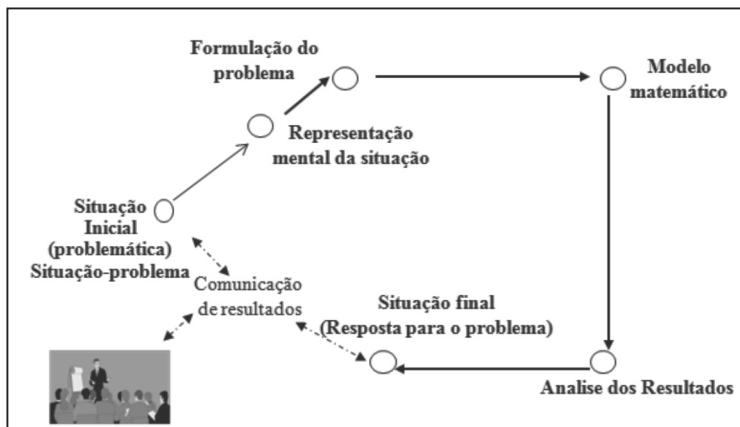


Figura 1- Etapas da Modelagem Matemática

Neste trabalho, o nosso interesse tem como foco buscar, nos procedimentos realizados pelos alunos no decorrer das etapas da modelagem, manifestações de pensamento matemático dos alunos e a sua relação com os Mundos da Matemática caracterizados em Tall (2004). A identificação das manifestações é relevante para contribuir com a estruturação de respostas para a questão *Por que usar Modelagem Matemática na sala de aula?*, de modo que se possa argumentar que o uso da Modelagem Matemática pode potencializar alguns aspectos da formação, especialmente matemática, dos estudantes.

As argumentações pautadas nos diferentes interesses e objetivos de alunos e professores, durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, foram sistematizadas em Kaiser e Sriraman (2006) por meio de *perspectivas* para a modelagem na Educação Matemática definidas como: perspectiva realística, perspectiva contextual, perspectiva sociocrítica, perspectiva epistemológica, perspectiva cognitivista e perspectiva educacional.

Segundo Kaiser e Sriraman (2006), na perspectiva cognitivista o interesse reside na identificação e compreensão de funções cognitivas associadas aos procedimentos dos alunos quando se envolvem em atividades de Modelagem

Matemática. Considerando o propósito do nosso trabalho, pautamos nossas discussões na perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática.

Para Ferri (2007, p. 261), “se a Modelagem é considerada sob uma perspectiva cognitivista o foco está nos processos de pensamento (individuais) que são expressos por meio de ações durante o processo de Modelagem”. Nesse encaminhamento parece se configurar uma relação profícua entre a Modelagem Matemática e a investigação de processos cognitivos associados ao pensamento dos alunos em atividades de modelagem.

### 3 Sobre Pensamento Matemático

Considerando argumentações de senso comum sobre *pensamento*, podemos dizer que estamos pensando quando refletimos sobre determinado assunto. Nesse sentido, o entendimento de *pensamento* remete a algo interno, e *pensar* pode ser utilizado para dar forma à imaginação, àquilo que vemos e percebemos do mundo.

O dicionário de filosofia Japiassú e Marcondes (2001), no entanto, apresenta uma caracterização mais *sofisticada* do que é pensamento:

Atividade da mente através da qual esta tematiza objetos ou toma decisões sobre a realização de uma ação. Atividade intelectual, raciocínio. Consciência. [...] pensamento é o “trabalho” efetuado pela reflexão do sujeito sobre um objeto, num movimento pelo qual a matéria-prima, que é a experiência, é transformada, de algo não-sabido, num saber produzido e compreendido. (JAPIASSU; MARCONDES, 2001, p. 209)

No âmbito da Educação Matemática diversos autores (DREYFUS, 2002; TALL, 2002; SFARD, 1991, 2007; GRAY et al., 1999; DUBINSKY, 2002; DOMINGOS, 2003; COSTA, 2002, entre outros) têm se dedicado ao estudo do pensamento matemático. A nossa pesquisa fundamenta-se, essencialmente, nos trabalhos de Tall (1995; 2002; 2004; 2007) e Dreyfus (2002) para tratar do pensamento matemático e dos processos cognitivos a ele relacionados.

As manifestações de pensamento matemático dos alunos podem estar relacionadas, segundo Tall (2002), com expressões verbais ou gestos, palavras,

com a realização de prova<sup>2</sup>, a generalização e o simbolismo usados por eles. Assim, indícios de como *funciona* o pensamento matemático podem, segundo Tall (2004), ser observados no contato dos alunos com os objetos matemáticos<sup>3</sup> que podem ser visualizados ou representados por símbolos, no contato com definições, teoremas, provas e demonstrações.

Segundo Tall (1995), o pensamento matemático emerge da *percepção de* objetos do mundo exterior e da *ação sobre* esses mesmos objetos, considerando que os sujeitos encaminham-se, do ponto de vista cognitivo, da percepção dos objetos do mundo externo de uma maneira visual-espacial para as ações sobre o que percebem desse objeto, utilizando a forma verbal-dedutiva.

Para além do contato com os objetos matemáticos, o sujeito aprofunda seu contato com eles, os quais passam a lhe exigir habilidades que vão além do perceber e do observar, requerendo-lhe a realização de abstrações, generalizações e provas, gerando, segundo Tall (2004), maneiras mais sofisticadas de pensar matematicamente.

Sendo assim, Tall (2002, 2004) e Dreyfus (2002) defendem que expressões de pensamento matemático *mais sofisticadas ou menos sofisticadas* estão associadas ao modo como os alunos lidam com processos cognitivos como a representação, a abstração e a interação entre esses processos.

A representação (em Matemática), segundo Dreyfus (2002), consiste no “ato de representar um conceito matemático, gerando uma imagem ou um ‘espécime’ do conceito”<sup>4</sup>. Podemos considerar, então, que a representação tem a função de *tornar presente ou viabilizar o acesso* ao conceito matemático. Tommy Dreyfus identifica dois tipos de representações: *representações simbólicas e representações mentais*. As representações simbólicas são externas e têm por finalidade facilitar o acesso e a comunicação dos conceitos a que estão associadas. Já as representações mentais referem-se àquilo que ocorre na mente do sujeito enquanto pensa no conceito ou sobre o conceito e, assim, pode diferir de pessoa para pessoa (DREYFUS, 2002). Para o autor o

<sup>2</sup> Entendemos *prova* no sentido de Tall (2002): “Proof is how they ordered in a logical development both to verify the nature of the relationships and also present them for approval to the mathematical community” (p. xiii).

<sup>3</sup> Fundamentados em Dubinsky (2002), usamos *objeto matemático* com o mesmo significado de *conceito matemático*, por exemplo, funções, números, variáveis, espaços vetoriais, grupos.

<sup>4</sup> Tradução livre de “To represent a concept, then, means to generate an instance, specimen, example, image of it” DREYFUS, T. (2002, p 31).

processo de representação pode ser relacionado com outros processos como a visualização, a mudança de representações, caracterizada por Dreyfus como *tradução*.

O processo de visualização, segundo Dreyfus (2002), é um processo que envolve a intuição e a compreensão do que se vê do objeto matemático. Para que seja possível gerar uma representação mental de um conceito, é necessário que existam sistemas de representação ligados a artefatos concretos, que podem ser visualizados. A construção de gráficos, diagramas e tabelas (representações externas do indivíduo e, portanto, simbólicas) são situações que envolvem o processo de visualização. Neste sentido, a visualização constitui um processo cognitivo de extrema importância em matemática, visto que está relacionado às habilidades de perceber, descobrir e representar.

A mudança de representações (ou tradução), segundo Dreyfus (2002), implica em mudar de uma representação associada a um conceito para outra representação associada ao mesmo conceito. Passar de uma tabela para um gráfico, ou de um gráfico para uma expressão algébrica, são exemplos de traduções. Segundo o autor, a tradução é uma atividade cognitiva essencial, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

O processo de abstração, relativo ao ato de *abstrair*, por sua vez, segundo Dreyfus (2002), diz respeito à capacidade de separar pelo pensamento, ou considerar separadamente, o que não pode ser observado separadamente na realidade. O autor associa com a abstração os processos de generalização e de síntese. A generalização, relativa à habilidade de generalizar, diz respeito à capacidade de concluir a partir de particularidades, a fim de identificar aspectos comuns e expandir domínios de validade. A generalização torna-se importante na medida em que estabelece um resultado mais geral, válido para um grande número de casos, ou na medida em que determina a formulação de um conceito. Já o processo de síntese, implica em sintetizar, combinar ou compor diversas partes de maneira a formar um todo, uma entidade.

Na estruturação de uma perspectiva teórica sobre a aprendizagem dos alunos em Matemática, vinculando a aprendizagem com o desenvolvimento matemático dos mesmos, David Tall argumenta que a representação e a abstração, e os processos a elas associados, bem como sua articulação, são aspectos que podem ser vinculados ao que chama de *Três Mundos da Matemática*.

## 4 Os Três Mundos da Matemática

O desenvolvimento matemático dos indivíduos é investigado e/ou caracterizado por meio de tricotomias em diferentes momentos e por diferentes autores. Pelo menos três desses estudos são referenciados nos trabalhos de David Tall: o trabalho de Sfard (1991) defende que durante o desenvolvimento dos conceitos os alunos passam por três estágios de estruturação, caracterizados como interiorização, condensação e reificação; o estudo das abstrações empíricas, pseudo-empíricas e reflexivas de Piaget, baseadas na percepção, ação e reflexão sobre os objetos; os modos de representação mental, sensório-motor, icônico e simbólico definidos por Bruner (1966, apud Tall, 2004a) como sequenciais no crescimento cognitivo do indivíduo.

A perspectiva de David Tall surge do estudo dessas teorias que tratam do desenvolvimento cognitivo e da necessidade de explicar como se dá o aprendizado em Matemática. Referindo-se às experiências matemáticas, Tall (2004) associa o desenvolvimento cognitivo em relação à matemática com Três Mundos da Matemática:

- a) O Mundo Conceitual Corporificado (ou apenas Mundo Corporificado - como afirma Tall, 2004, p. 2) “diz respeito às percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados<sup>5</sup>”. Este mundo está baseado na ação e na percepção e envolve os objetos corporificados, tais como, gráficos e diagramas, que podem ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os modos de operar no Mundo Conceitual Corporificado são associados com a percepção, a observação e a descrição que visam o entendimento de propriedades relativas aos conceitos matemáticos.
- b) O Mundo Simbólico Proceitual (ou simplesmente Mundo Proceitual - como afirma Tall)

[...] é o mundo dos símbolos que são usados para cálculos e manipulações na aritmética, na álgebra e no cálculo, por exemplo. As atividades neste mundo se iniciam com ações (como apontar e contar) e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos [...] <sup>6</sup> (TALL, 2004, p. 3).

<sup>5</sup> Tradução livre de “*The first grows out of our perceptions of the world and consists of our thinking about things that we perceive and sense, not only in the physical world, but in our own mental world of meaning.*” (TALL, 2004, p. 2).

<sup>6</sup> Tradução livre de “[...] is the world of symbols that we use for calculation and manipulation in arithmetic, algebra, calculus and so on. These begin with actions (such as pointing and counting) that are encapsulated as concepts by using symbol [...]”. (TALL, 2004, p. 2).

No Mundo Simbólico evidencia-se a capacidade do uso de símbolos e a ação, entendida como procedimento, passa a ser superada por um processo, considerado por Tall (2003), sequencialmente superior ao anterior.

c) O Mundo Axiomático Formal (ou Mundo Formal - como afirma Tall, 2004, p. 3) por sua vez, “é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas (por exemplo, ‘grupo’, ‘campo’, ‘espaço vetorial’ e ‘espaço topológico’ e assim por diante)<sup>7</sup>” que constituem o sistema axiomático da Matemática. Em termos gerais, este mundo pressupõe um movimento em direção ao formalismo nas representações e no uso dos conceitos.

As fronteiras difusas entre tais mundos são discutidas em Pinto (2006). A autora, referindo-se aos seus estudos anteriores (PINTO, 2000, 2001, 2002, apud PINTO, 2006), pontua que há analogias e contrastes nas estratégias empregadas pelos estudantes para aprender matemática e coloca que

Alguns alunos veem as definições e as construções lógico-formais a partir destas, como ponto de partida para sua experiência com a matemática formal. Já outros constroem a nova experiência a partir de imagens, refinando-as em permanente diálogo com a teoria formal (PINTO, 2006, p. 5).

Neste sentido, o desenvolvimento cognitivo dos alunos não é, necessariamente, sequencial, considerando suas ações em relação aos três mundos caracterizados. Isto é, podemos considerar que os alunos transitam (em termos cognitivos) nos Três Mundos em vez de tomá-los como estágios consecutivos a serem percorridos em suas atividades matemáticas, indo do Mundo Conceitual Corporificado ao Mundo Axiomático Formal. Cada indivíduo tem suas próprias experiências e, devido a isso, cada um desenvolve de maneira distinta sua jornada pelos Três Mundos da Matemática, desenvolvendo seu pensamento matemático (TALL, 2007).

O desenvolvimento do pensamento matemático no Mundo Conceitual Corporificado se inicia pelas percepções, observações e descrições dos objetos (corporificados). Os processos cognitivos mais evidentes nas ações dos alunos são relacionados à percepção, viabilizando-lhes perceber, observar, descrever características dos objetos matemáticos.

<sup>7</sup> Tradução livre de “[...] is based on properties, expressed in terms of formal definitions that are used as axioms to specify mathematical structures (such as ‘group’, ‘field’, ‘vector space’, ‘topological space’ and so on).” (TALL, 2004, p. 3).

O uso do simbolismo, relativo ao Mundo Simbólico Proceitual, já desloca o foco para um nível mais abstrato, conduzindo a refinamentos das apreensões do Mundo Corporificado, no qual o uso de proceitos, caracterizados por Tall (1995) como símbolos que representam tanto um processo quanto um conceito, requer o desenvolvimento do processo de representação bem como os processos a ele subjacentes, que envolvem visualizações e a tradução de representações.

Já as ações no Mundo Axiomático Formal, segundo Tall (2007), visam à migração das descobertas aliadas às operações, aos cálculos e às representações, para a especificação de propriedades, de relações e de provas, fortemente vinculadas com a abstração e com os subprocessos de generalização e síntese.

O trânsito no Mundo Axiomático Formal associado às experiências do Mundo Conceitual Corporificado e do Mundo Simbólico Proceitual conduz à formulação de definições formais e da prova de teoremas, usando uma linguagem matemática, de modo geral, sofisticada. A prova formal escrita é uma manifestação de pensamento matemático, no entanto, ela é elaborada a partir das ideias e experiências dos mundos Conceitual Corporificado e Simbólico Proceitual. A interação entre corporificações, símbolos e teoremas, mediada, em grande medida, pela abstração e pela generalização, demonstra maior entendimento dos objetos matemáticos e de suas múltiplas representações.

Considerando a importância de oportunizar essa diversidade de ações, aliando corporificações, simbolismo e teoremas e desenvolver no aluno certa flexibilidade de pensamento matemático é que investigamos o potencial de atividades de Modelagem Matemática como desencadeadoras de processos de pensamento matemático dos alunos.

## 5 Os alunos nas atividades de Modelagem Matemática - a pesquisa desenvolvida

As informações que subsidiaram as argumentações deste trabalho foram obtidas com alunos de uma turma do Ensino Superior, durante a disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, no último ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Os alunos desenvolveram atividades de modelagem sob a orientação das autoras deste texto, sendo que uma era a professora da disciplina.

Levando em consideração que o objeto de pesquisa é a Modelagem Matemática e a nossa investigação visa apresentar reflexões sobre o potencial de atividades de Modelagem Matemática para desencadear nos estudantes

diferentes processos de pensamento matemático, a disciplina de Modelagem Matemática parece ser um *lócus* adequado para a coleta das informações cujas análises orientam nossas argumentações.

Para o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática nas aulas, nos orientamos pelas indicações de Almeida, Pessôa e Vertuan (2012), de que a familiarização dos estudantes com a modelagem pode se dar de forma gradativa, de acordo com três momentos: inicialmente, o professor leva para a sala de aula uma situação-problema e a propõe aos alunos; em seguida, professor e alunos definem um problema a ser estudado e, por fim, os alunos são responsáveis por todas as etapas do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Esse encaminhamento proporcionou um contato prolongado das pesquisadoras com o ambiente e a situação que estava sendo investigada, ocorrendo um trabalho de campo intensivo. Os dados coletados são predominantemente descritivos. A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto, uma vez que o interesse das pesquisadoras, a todo o momento, consistiu em observar, nos alunos e em seus registros, indícios de processos de pensamento e de trânsito pelos Três Mundos da Matemática. As próprias pesquisadoras usaram de instrumentos de coleta de dados como anotações em diário de campo, gravações em áudio e vídeo, questionários e entrevista. A análise dos dados coletados, embora subsidiada pelos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa, vem cercada de compreensão e entendimento das pesquisadoras. Assim, considerando a argumentação de Lüdke e André (1986), caracterizamos nossa pesquisa como do tipo *qualitativa*.

Segundo Tall (2004), cada indivíduo estabelece uma jornada singular durante o seu desenvolvimento cognitivo em Matemática, traçando seu próprio caminho de mobilização de processos cognitivos e de modos de operar nos diferentes Mundos da Matemática. Assim, é preciso tratar de cada aluno em particular em relação às atividades que desenvolveu.

Desse modo, considerando a extensão possível para este texto, a análise que apresentamos é relativa a um dos alunos que participaram das atividades, identificado aqui como ‘aluna A’.

Tratamos do envolvimento dessa aluna em duas atividades de Modelagem Matemática: *O Diazepam no organismo*, atividade que corresponde ao segundo momento da modelagem a que nos referimos e diz respeito à análise da concentração do medicamento antidepressivo Diazepam no organismo do usuário, considerando a ingestão de diferentes doses e em diferentes períodos

de tempo; *A produção de etanol X a dinâmica da produção de veículos*, que investiga a auto-suficiência da produção brasileira de etanol tendo em vista a demanda para os veículos novos que usam esse combustível, problema que foi definido pelo grupo de alunos do qual a aluna A fazia parte, e corresponde ao terceiro momento da Modelagem Matemática.

Os conteúdos associados às atividades envolvem equações diferenciais ordinárias, o método dos mínimos quadrados, a soma de termos de uma progressão geométrica, o conceito de limites e derivadas, o método de Ford-Walford<sup>8</sup>. A descrição detalhada das citadas atividades consta em Palharini (2010).

## 6 A análise da aluna A

Buscamos, nas informações obtidas durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática pela aluna, elementos para apresentar reflexões sobre as ações desenvolvidas por ela no decorrer do desenvolvimento da atividade, elencando, dessa maneira, indícios do pensamento matemático da aluna e as manifestações de processos cognitivos, bem como o trânsito pelos Três Mundos da Matemática.

### 6.1 Atividade *o Diazepam no organismo*

Para o desenvolvimento da atividade *o Diazepam no organismo*, realizado durante um período de 04 horas (aula), a professora levou para a sala de aula a bula do medicamento e o estudo da atividade foi feito com todos os alunos da sala divididos em grupos. A partir das informações da bula, foi definido o problema: estudar a concentração do medicamento no organismo, considerando a ingestão de diferentes doses e diferentes tempos de tratamento conforme esclarece a bula (veja Figura 2). Para o problema, os alunos trataram de três situações: a ingestão de uma única dose (comprimido de 10mg); a continuação do tratamento com a ingestão de um comprimido de 10mg a cada 24 horas; a saturação do medicamento no organismo do paciente.

A representação da tabela da Figura 2 indica que a aluna compreendeu as informações da bula e foi capaz de construir a tabela representando a concentração de uma dose do remédio no organismo no decorrer do tempo.

<sup>8</sup> Descrição do Método consta em Bassanezi (2002).

O Diazepam é um medicamento indicado para pacientes com crises de ansiedade, queixas somáticas ou psicológicas relacionadas à ansiedade, no tratamento de desordens psiquiátricas, no alívio do espasmo muscular reflexo devido a traumas, como lesão e inflamação.

Eliminação: a curva concentração plasmática / tempo do diazepam é bifásica: uma fase de distribuição inicial rápida e intensa com uma meia vida que pode chegar a 3 horas e uma fase de eliminação terminal prolongada (meia-vida de 20-50 horas). A meia-vida de eliminação terminal do metabólico ativo nordiazepam é aproximadamente 100 horas. O diazepam e seus metabólicos são eliminados principalmente pela urina, predominantemente sob a forma conjugada. O clearance de diazepam é de 20-30mL/min.

Dessa maneira a meia-vida, relacionada com a eliminação do diazepam é:

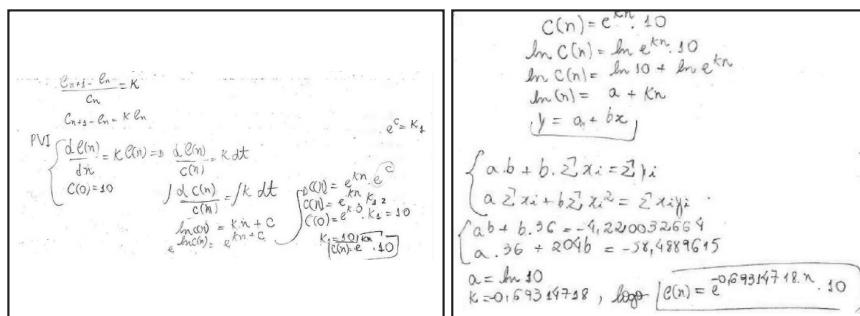
- na fase inicial pode chegar a 03 horas
- na fase final é entre 20-50 horas

O tratamento deve ser administrado com uma dose que não ultrapasse 10mg e a duração deve ser a menor possível, não excedendo 2 a 3 meses, incluindo o período de retirada progressiva do medicamento.

Tabela 1: Concentração de uma dose do remédio no organismo em função do tempo				
$t$ (horas)	$n$	$C_n$ (mg)	$C_{n+1} - C_n$	$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}$
0	0	10	-5	-0,5
3	1	5	-2,5	-0,5
6	2	2,5	-1,25	-0,5
9	3	1,25	-0,625	-0,5
12	4	0,625	-0,3125	-0,5
15	5	0,3125	-0,15625	-0,5
18	6	0,15625	-0,078125	-0,5
21	7	0,078125	-0,0390625	-0,5
24	8	0,0390625	-0,01953125	-0,5

**Figura 2** - Dados da bula e a tabulação matemática dos dados realizada pela aluna

A produção de diferentes representações como tabelas, gráficos e registros simbólicos está relacionada, segundo Tall (2004), ao Mundo Corporificado e ao Mundo Simbólico Proceitual. Dreyfus (2002) argumenta que um processo de pensamento matemático relevante é o de representar-visualizar, que, nesse caso, pode ser associado à construção da tabela pela aluna. Além disso, a aluna também realiza tradução de representações: os dados da bula (não apresentados em linguagem matemática, mas associados ao Mundo Corporificado), foram transformados em representações matemáticas típicas do Mundo Simbólico e serviram, essencialmente, para que as hipóteses fundamentais fossem construídas (ver Figura 2); a partir desse momento, a aluna utiliza de outras mudanças de representação, que a orientaram para a obtenção do modelo matemático e serviram de âncora para a análise e validação de resultados (Figura 3).



**Figura 3** - Construção do modelo para a 1<sup>a</sup> situação (dose única) a partir da tabela da Figura 2

Já para o estudo da situação em que o paciente ingere um comprimido a cada 24 horas, a aluna, necessariamente, teria que ativar processos cognitivos

como abstração e generalização e, em interação com as representações, obteria um modelo matemático para esta situação. Nesse caso, a partir das variáveis auxiliares  $T = 24$  horas;  $T$  = tempo na equação antes da ingestão da segunda dose;  $T_+$  = tempo na equação após a ingestão da segunda dose, e do modelo já obtido para a ingestão de uma única dose, conforme mostra a Figura 2, as ações da aluna, juntamente com o grupo do qual ela participava, se encaminharam com vistas a obter um modelo geral para esta situação conforme mostra a Figura 4.

1<sup>ª</sup> dose  $-0,23104906t$

$$C(t) = 10 \cdot e^{-0,23104906t}$$

2<sup>ª</sup> dose  $C(T_+) = 10 \cdot e^{-0,23104906 \cdot 1} + 10$

$$C(T_+) = 10,0390625$$

$C(T_-) = 10,0390625$

$$C(t) = (10 \cdot e^{-0,23104906 \cdot T} + 10) \cdot e^{-0,23104906(t-T)}$$

3<sup>ª</sup> dose  $C(2T_+) = 10,039215078 + 10 = 10,039215078$

$$C(2T_+) = 10(1 + e^{-0,23104906 \cdot T}) \cdot e^{-0,23104906T} + 10$$

$$C(t) = 10(1 + e^{-0,23104906T}) \cdot e^{-0,23104906T} + 10 e^{-0,23104906(t-2T)}$$

para  $2T_+ \leq t \leq 3T_-$

**Figura 4** - Construção do modelo pela aluna A para a ingestão de n doses do medicamento

Os registros da aluna, esboçados nas Figuras 3 e 4, dizem respeito aos modelos matemáticos por ela construídos para descrever a ingestão de uma dose do medicamento, duas doses, três doses e n doses, respectivamente. Os modelos são formalizados como:

$$C(t) = 10e^{-0,23104906t}, \text{ se } 0 \leq t < 24$$

$$C(t) = 10,0390625e^{-0,23104906(t-24)}, \text{ se } 24 \leq t < 48$$

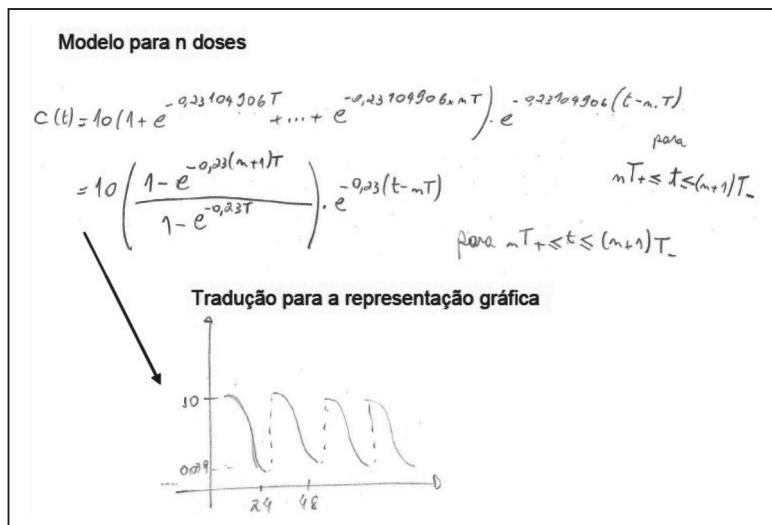
$$C(t) = 10,03921509e^{-0,23104906(t-48)}, \text{ se } 48 \leq t \leq 72$$

$$C(t) = 10(1 + e^{-0,23104906xT} + e^{-0,23104906x2T} + \dots + e^{-0,23104906xnT}) e^{-0,23104906(t-nT)}, \text{ se } nT \leq t \leq (n+1)T$$

Neste caso  $T = 24$  e  $n$  estão associados ao tempo de ingestão do comprimido, sendo que a primeira dose é ingerida quando  $n = 0$  e  $C(t)$  corresponde à concentração de Diazepam no organismo no instante  $t$ .

Os modelos estão expressos em linguagem simbólica e, portanto, dizem respeito ao trânsito da aluna pelo Mundo Simbólico Proceitual. Todavia, passar da situação da ingestão de uma única dose para a situação de ingestão de uma dose a cada 24 horas, requereu da aluna processos de generalização e abstração que, segundo Tall (2004), são associados ao pensamento matemático avançado e aos modos de operar do Mundo Axiomático Formal. Além disso, para encontrar um modelo matemático adequado a partir dessa generalização também necessitou da ativação de outros conceitos matemáticos (no caso, a soma de termos de uma progressão geométrica finita) para se transformar na expressão *formal* identificada no Mundo Axiomático Formal.

Na Figura 5 mostramos o modelo obtido pela aluna e a sua representação gráfica. Ao construir o gráfico associado à representação algébrica do modelo matemático, observamos uma mudança de representações, ou, segundo Dreyfus (2002), o processo de tradução aliado ao processo de visualização.



**Figura 5** - A generalização e a tradução realizadas pela aluna A na atividade *o Diazepam no organismo*

A obtenção e a análise do modelo matemático são procedimentos fundamentais na atividade de Modelagem Matemática, e conduziram a aluna a utilizar a representação gráfica do modelo matemático a fim de visualizar o comportamento do medicamento no organismo no decorrer do tempo. Assim, por meio dos procedimentos associados às diferentes etapas da Modelagem

Matemática, a aluna articula representações corporificadas (gráficos) com representações simbólicas do modelo matemático e, nesse contexto, manifesta utilização de processos cognitivos (generalização, representação, visualização, mudança de representações ou tradução) relativos ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Inferimos, ainda, que no desenvolvimento da atividade a aluna fez uso de um conjunto de conceitos matemáticos que, provavelmente, já faziam parte de sua estrutura cognitiva e que foram ativados para o estudo do problema, pois se trata de uma aluna do quarto ano de Licenciatura em Matemática. Assim, a resolução de equações diferenciais ordinárias separáveis de 1<sup>a</sup> ordem, a determinação de parâmetros nas soluções obtidas, usando o método dos mínimos quadrados, a soma de termos de uma progressão geométrica, são conceitos e procedimentos com os quais a aluna já havia se deparado em momentos anteriores de sua vida acadêmica. Neste caso, mesmo já conhecendo tais conteúdos, as características da atividade de modelagem, como a definição de variáveis, a matematização<sup>9</sup> da situação-problema, a busca por um modelo matemático e sua validação com base nos dados iniciais, requereram dela um conjunto de ações, aliando corporificações, simbolismos, generalizações e demonstrações formais, que só poderiam ser relacionados com certa flexibilidade de pensamento matemático.

## 6.2 Atividade a produção de etanol X a dinâmica da produção de veículos

Esta atividade foi desenvolvida pela aluna em conjunto com um grupo de 4 alunos, e corresponde ao terceiro momento da modelagem, de modo que os próprios alunos definiram o tema e o problema a ser investigado.

O grupo iniciou suas investigações a partir de um conjunto amplo de informações sobre a produção e consumo de etanol, bem como a fabricação e circulação de veículos que usam esse combustível. A atividade foi desenvolvida pelos alunos e apresentada em forma de seminário para a turma. A coleta de dados se deu por meio de acompanhamento pelas pesquisadoras das sessões de orientação extraclasses, do uso dos registros entregues pelos alunos, da gravação em áudio e vídeo do seminário em que a atividade foi apresentada e uma entrevista semi-estruturada com os participantes do grupo, na qual a aluna A também foi entrevistada.

<sup>9</sup> Matematização diz respeito à visualização, transição de linguagens, ao uso de símbolos para realizar descrições matemáticas bem como formalizações a respeito de relações entre o matemático e o não-matemático.

A atividade foi desenvolvida com a intenção da equipe da aluna responder a questão: *Levando em consideração a área disponibilizada para o plantio de cana-de-açúcar, o Brasil continuará sendo auto-suficiente no ano de 2007, conforme afirmam as notícias?*

A partir dos dados obtidos, apontando a quantidade de etanol produzida no Brasil e não exportada nos últimos anos e aqueles com relação à fabricação de veículos novos e ao consumo de etanol, a aluna A e sua equipe organizaram sua investigação, considerando diferentes hipóteses para a construção dos modelos. Registros escritos, entregues pela aluna, revelam como o desenvolvimento da atividade foi planejado e conduzido (Figura 6). A configuração definida pelo grupo era de que *modelos parciais* seriam construídos para, a partir deles, obter um modelo matemático para subsidiar a resposta para a questão enunciada.

Este trabalho traz um estudo sobre a dinâmica da produção de automóveis movidos a álcool e a dinâmica da disponibilidade de álcool combustível (etanol) no Brasil. Apresentamos duas modelagens: uma levando em consideração que a produção de automóveis movidos a álcool no Brasil se estabilizará, e, outra, na qual a produção de automóveis movidos a álcool no Brasil crescerá exponencialmente. Cada modelagem contará com os seguintes modelos: um para a produção de automóveis movidos a álcool no Brasil, um para a disponibilidade de etanol no Brasil e um terceiro que relaciona a disponibilidade de etanol com produção de automóveis. Todos os modelos foram obtidos com base nas informações coletadas e em hipóteses formuladas pelo grupo. Usamos informações relativas à características do etanol, como, por exemplo, de que o etanol combustível é composto, aqui no Brasil, de 96% de etanol e 4% de água e, aparece na gasolina, como substituto do chumbo, com 22%, formando o chamado gasool. Hoje 75% dos carros flex fuel abastecem com etanol e que a perspectiva é que, em 2017, 80% de todos os veículos de passeio serão abastecidos com etanol, que continuaria competitivo em relação a outros combustíveis.

Conduzimos o estudo da nossa problemática assim

#### *Modelagem 1*

- *Modelo 1: E(t): quantidade de álcool hidratado (Etanol) produzido e que fica no Brasil no ano t.*

$$\begin{aligned} E: A &\rightarrow B \\ t &\rightarrow E(t) \end{aligned}$$

- *Modelo 2: C(t): número de carros a álcool e flex no ano t.*

$$\begin{aligned} C: F &\rightarrow D \\ t &\rightarrow C(t) \end{aligned}$$

- *Modelo 3: Q(t): quantidade de álcool disponível para cada carro no ano t.*

$$\begin{aligned} Q: I &\rightarrow J \\ t &\rightarrow Q(t) \end{aligned}$$

#### *Modelagem 2*

- *Modelo 4 : G(t): número de carros a álcool e flex no ano t.*

$$\begin{aligned} G: O &\rightarrow P \\ t &\rightarrow G(t) \end{aligned}$$

- *Modelo 5 : K(t): quantidade de álcool disponível para cada carro no ano t.*

$$\begin{aligned} K: L &\rightarrow M \\ t &\rightarrow K(t) \end{aligned}$$

**Figura 6** - Registros da aluna A sobre a condução da atividade a produção de etanol X a dinâmica da produção de veículos

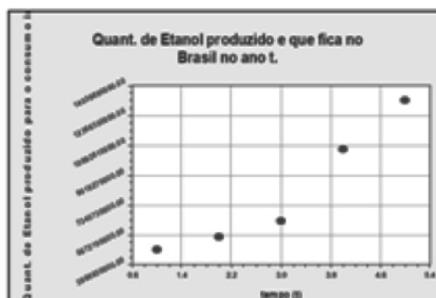
A equipe usou como hipótese que pelo menos os quatro primeiros modelos a que se refere a Figura 6 seriam assintóticos. Ao utilizar conjecturas associadas ao corpo de conceitos Matemáticos, percebe-se a utilização do que Tall (2004) denomina de objetos associados ao Mundo Axiomático Formal.

O modelo 1, representando a quantidade de etanol produzido e que fica no Brasil no ano  $t$ , foi construído utilizando a curva logística. Em apresentação oral de sua atividade (gravada em áudio e vídeo pelas autoras deste texto) a aluna justifica suas escolhas:

*[...] plotando esses pontos nós obtemos essa curva e como já sabemos que por conta da notícia que em 2017 não vai poder ultrapassar de 13 milhões de hectares, então nós pensamos que tem um limitante, então nós pensamos que como essa curva fica bem parecida com o modelo logístico, aí o que nós fizemos, fomos para a obtenção do modelo em que pensamos na curva logística [...] e aí que nós tivemos que achar esses parâmetros todos em cada caso...*

O modelo 1 da Figura 6 foi apresentado com a representação gráfica dos dados associados à quantidade de etanol produzido e que fica no Brasil no ano  $t$ , conforme mostra a Figura 7. Nesse modelo,  $L$  é o valor assintótico;  $E_0$  é valor inicial; a um parâmetro a ser determinado. Os valores foram determinados pela aluna e sua equipe, usando o Método de Ford-Walford<sup>10</sup>, bem como conceitos de taxas de crescimento médio da variável dependente.

$$E(t) = \frac{L}{\left(\frac{L}{E_0} - 1\right)e^{-\alpha t} + 1}$$



Modelo 1. Quantidade de etanol produzido e que fica no Brasil no ano  $t$ .

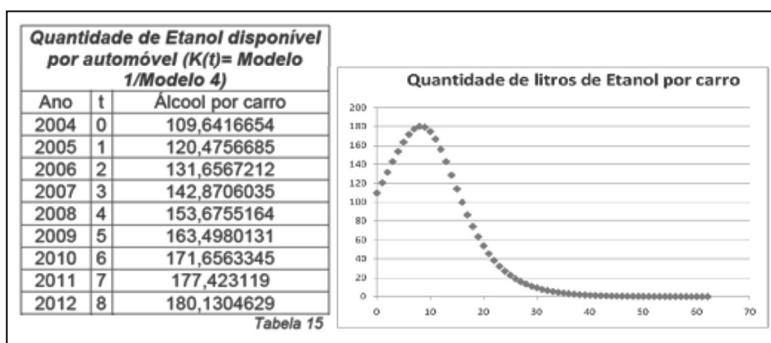
Gráfico 1. Representação gráfica do modelo 1

**Figura 7** - As representações da aluna A para o modelo 1 da atividade

<sup>10</sup> Descrição do Método consta em Bassanezi (2002).

A hipótese de que os quatro primeiros modelos a que se refere a Figura 6 seriam assintóticos orientou a elaboração dos mesmos. Naquele momento, os investimentos da aluna se direcionaram, primeiramente, para a busca dos *valores de estabilidade* (as assíntotas) desses modelos, considerando os dados específicos para cada situação. A determinação desses valores foi realizada usando o Método de Walford, em dois casos, e usando métodos de estimativas por meio de valores médios ou método de bissecção, em outros casos.

No entanto, a resposta à questão principal da atividade (*Levando em consideração a área disponibilizada para o plantio de cana-de-açúcar, o Brasil continuará sendo auto-suficiente no ano de 2007, conforme afirmam as notícias?*) viria do modelo 5, cuja obtenção se deu a partir das informações construídas a partir dos modelos anteriores (Figura 8).



**Figura 8** - Dados construídos para a obtenção do modelo 5, referente a quantidade de litros de etanol disponível por carro no ano t.

A construção de um modelo algébrico, nesse caso, se deu com ferramentas computacionais, embora fundamentada em aspectos analíticos e respeitando as características da situação. O modelo obtido é

$$K(t) = 138,331e^{\frac{(t-9,49)^2}{172,364}}$$

onde K é a quantidade de etanol disponível por veículo no ano t.

Durante o desenvolvimento dessa atividade a estudante efetuou traduções entre a representação tabular, a representação gráfica e a representação algébrica para a obtenção de um modelo matemático que representasse a situação em estudo. Essas mudanças de representação envolveram, ainda, o processo de visualização (DREYFUS, 2002) necessário para visualizar o comportamento do modelo matemático capaz de realizar as estimativas necessárias para

responder ao problema em estudo. Associados a esse contexto são observados gráficos e tabelas, descritos por Tall (2004) como objetos corporificados associados ao Mundo Conceitual Corporificado e as representações simbólicas, como por

exemplo, o modelo obtido  $K(t) = 138,331e^{\frac{(t-9,49)^2}{172,364}}$ , características do Mundo Simbólico Proceitual.

As conjecturas da aluna em relação à definição, análise e validação da hipótese de que os modelos seriam assintóticos representam indícios do processo de abstração, associado, segundo Tall (2004), ao Mundo Axiomático Formal.

Nessa atividade uma sinalização relevante de pensamento matemático avançado diz respeito à própria estruturação das ações da aluna. Considerando o seu objetivo (investigar se *Levando em consideração a área disponibilizada para o plantio de cana-de-açúcar, o Brasil continuará sendo auto-suficiente no ano de 2007, conforme afirmam as notícias?*) e os dados disponíveis, a configuração apresentada na Figura 6, estabelecendo quais seriam os *modelos parciais* que deveriam ser construídos e como deveriam ser articulados para chegar à relação final, apresentada na Figura 8 (Modelo 1/Modelo 4), talvez seja o aporte cognitivo mais significativo da atividade aqui descrita.

A análise das ações e dos procedimentos da aluna para o estudo do problema nessa atividade de modelagem é mediada por corporificações, representações, visualizações e traduções. Todavia, as construções e validações dos modelos se deram por meio de modos de operar típicos do Mundo Axiomático Formal.

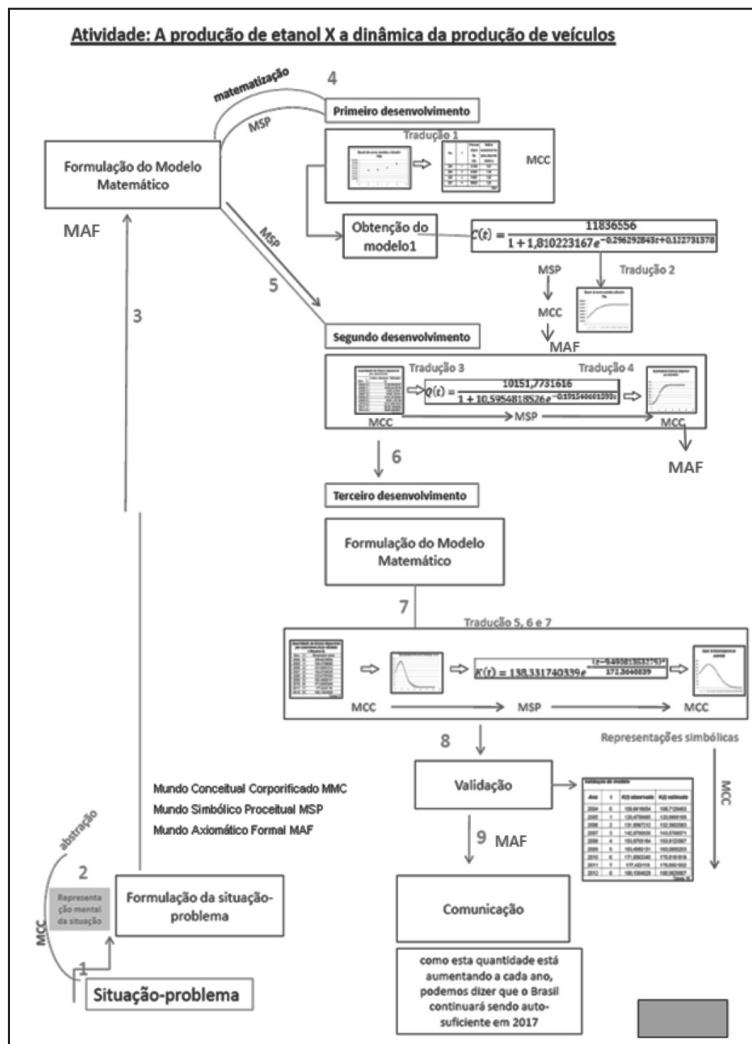
Ao analisarmos o desenvolvimento da aluna é possível relacionar procedimentos e ações específicas em cada uma das etapas da Modelagem Matemática, caracterizadas em seção anterior, com processos associados ao pensamento matemático e o *trânsito* entre os Três Mundos da Matemática. A Figura 9 foi elaborada para ilustrar essa relação.

A numeração de 1 a 9, na citada figura, indica o caminho que a aluna percorreu e, observando este caminho, é possível inferir sobre as manifestações de processos de pensamento da aluna. No ponto 1 ela parte da situação-problema e, fundamentada nas informações que tem sobre a situação – associadas ao Mundo Conceitual Corporificado – faz uma representação mental da situação para, a partir dessa, formular o problema que é relevante e que pretende investigar.

No entanto, logo no ponto 3, os processos de pensamento da aluna ultrapassaram o Mundo Corporificado para adentrar, num primeiro instante, de forma decisiva no campo da abstração, construindo modelos matemáticos para a situação. Todavia, esses modelos voltaram a se corporificar por meio de

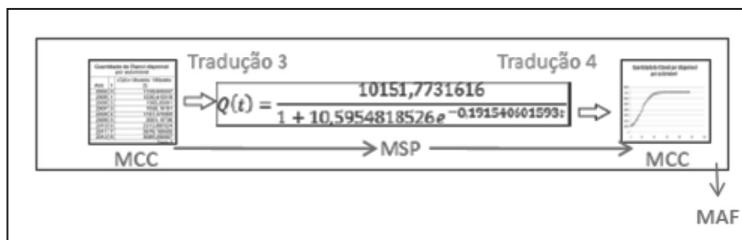
traduções de representações, tornando-se visíveis e manipuláveis para a aluna. Estas ações da aluna são indicativas de abstração, uma vez que dados da realidade são associados a uma ideia matemática e seu trânsito pelos três mundos, usando corporificações, símbolos e formalizações, é realizado.

A formulação dos modelos matemáticos indicada, por exemplo, nos pontos 4, 5 e 7 da Figura 9, vem acompanhada da necessidade de matematização associada aos diferentes mundos da matemática estruturados por David Tall.



**Figura 9** - Caminhos percorridos pela aluna A na atividade a produção de etanol X a dinâmica da produção de veículos

Já as interpretações desses modelos, bem como a identificação de características essenciais que associam o problema e o modelo, vêm acompanhadas da necessidade de traduções, visando extrair elementos para a interpretação das diferentes representações associadas aos modelos (Figura 10).



**Figura 10** - Recorte da Figura 9 mostrando traduções importantes

A análise do modelo construído a partir das formulações anteriores para responder ao problema (*Levando em consideração a área disponibilizada para o plantio de cana-de-açúcar, o Brasil continuará sendo auto-suficiente no ano de 2017, conforme afirmam as notícias?*), e indicado na sequência do ponto 7 da Figura 9, corresponde à validação citada na própria figura. Tal análise requer generalizações e abstrações também inseridas no Mundo Axiomático Formal. Assim, é possível inferir que atividades de Modelagem Matemática requerem e ao mesmo proporcionam um conjunto amplo de processos de pensamento e a utilização de representações e manipulações dos conceitos nos Três Mundos da Matemática, de modo que um explica o outro.

Desse modo, ao desenvolver a atividade de Modelagem Matemática, a aluna traça caminhos próprios pelos mundos da matemática, utilizando de percepções e objetos corporificados bem como de símbolos, generalizações e abstrações para a identificação do problema, a definição das variáveis, a formulação do modelo matemático e validação do mesmo. Os processos associados ao pensamento matemático, como os processos de representar, generalizar e sintetizar são fundamentais para a definição de hipóteses e construção dos modelos, bem como para sua interpretação e análise em relação ao problema em estudo.

Os registros da aluna revelam que seu pensamento matemático foi se refinando na medida em que a busca pelo modelo matemático para o estudo do problema requeria conhecimentos prévios, e conduziu à estruturação de novos conhecimentos. Confirma-se, então, a argumentação de Tall (2002) e Dreyfus

(2002) de que as expressões de pensamento vão se tornando *mais sofisticadas* na medida em que mais processos cognitivos vão sendo ativados e passam a interagir.

Partindo do que é observável (figuras, tabelas, textos), as ações de percepção e observação, da aluna, foram conduzindo a representações, traduções e visualizações. Era necessário, no entanto, chegar a abstrações e generalizações para obter respostas para o problema. A validação das respostas, todavia, remete novamente aos dados iniciais, às corporificações. Daí as interações a que se referem Tall (2004) e Dreyfus (2002), fundamentais para a aprendizagem em Matemática.

## 7 Finalizando, por ora

Buscar nas falas, nos gestos, nos registros dos alunos indícios de pensamento matemático é um desafio que se coloca com a ação investigativa engendrada neste artigo. Neste sentido, os aportes que servem de sustentação para nossas afirmações são a identificação de processos cognitivos, que enunciamos no texto com base em Dreyfus (2002) e as operações caracterizadas para os Três Mundos da Matemática por Tall (2002, 2004).

As ações da aluna, que analisamos em relação ao desenvolvimento de duas atividades de Modelagem Matemática, indicam que ela traçou seu caminho por esses mundos com *idas e vindas*, sem, no entanto, deixar de chegar ao *final*, que seria o Mundo Axiomático Formal no qual as análises buscam elementos para validar os modelos matemáticos associados à situação em estudo.

Escolher um tema, definir um problema, aspectos fundamentalmente extra matemáticos, são procedimentos que conduziram a aluna para os diferentes Mundos da Matemática, com vistas a buscar soluções para o problema por meio da Matemática.

No Mundo Corporificado, “o critério de verdade é que as coisas funcionam de um certo modo esperado” (PINTO, 2006, p. 9) e o pensamento fundamenta-se, essencialmente, na percepção sensorial, na imagem visual e espacial. Nele, a aluna buscou elementos para delimitar e, ao mesmo tempo, subsidiar suas ações.

Manipular símbolos, realizar cálculos, construir e analisar representações são processos que, nas atividades de modelagem que analisamos, foram fundamentais para que a aluna evoluísse em relação à solução. Todavia, as primeiras imagens, percepções, não foram abandonadas, de modo que não

podemos considerar que o Mundo Corporificado tenha sido *superado pela aluna*.

As abstrações, as generalizações também aconteceram e viabilizaram à aluna obter modelos robustos, descrever soluções para os problemas estabelecidos a partir de definições e deduções formais. Igualmente, certo *refinamento de pensamento* parece ter se configurado durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

Nesse contexto, considerando que o interesse do nosso trabalho é investigar o potencial de atividades de Modelagem Matemática para desencadear processos de pensamento matemático, podemos inferir que, pelo menos na situação que investigamos o desenvolvimento das atividades requereu e oportunizou a aluna diferentes processos de pensamento, havendo indicações de expressões *sofisticadas* de pensamento, conforme nomeiam Tall (2002) e Dreyfus (2002).

Assim, a pesquisa que desenvolvemos e cujos resultados descrevemos, ainda que de forma abreviada neste trabalho, representa indicativo de que para a questão *Por que usar Modelagem Matemática na sala de aula?* uma das possíveis respostas é: atividades de Modelagem Matemática têm potencial para o desenvolvimento de uma variedade de processos de pensamento matemático nos alunos, requerendo e, ao mesmo tempo, fazendo emergir um conjunto de processos cognitivos relevantes.

Ainda há poucas publicações na literatura abordando possíveis articulações entre os aportes teóricos Modelagem Matemática e Três Mundos da Matemática. Portanto, o presente artigo representa, provavelmente, um ensaio dessa aproximação teórica, e se fundamenta no que Morin (1995) caracteriza de *migração conceitual*, permitindo o fluxo das ideias de um campo científico para outro e, neste caso particular, contribuindo para a estruturação da perspectiva cognitivista para a área de conhecimento *Modelagem Matemática na Educação Matemática*.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W.; PESSÔA, K. A. S.; VERTUAN, R. **Modelagem Matemática para a educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-497, dez. 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-134, jul. 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: estratégia de ensino-aprendizagem. São Paulo: Contexto, 2002.

COSTA, C. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J. P. (Org.). **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e Formação de Professores**. Coimbra: SPCE, 2002, p. 257-273. Disponível em: <[www.esev.ipv.pt](http://www.esev.ipv.pt)>. Acesso em: 01 jun. 2012.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior**. 2003. 387f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação – Especialidade de Teoria Curricular e Ensino das Ciências.) - Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova Lisboa. Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 25-41.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 95-123.

FERRI, R. B. Cognitive Modelling: Individual modelling routes of pupils. In: HAINES, C. et al. (Eds.). **Mathematical Modelling** (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics Chichester: Horwood Publishing, 2007, p. 260-270.

GRAY, E. et al. Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Netherlands, v. 38, n. 1-3, p. 111-133, 1999.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **The International Journal on Mathematics Education**, London, v. 38, n. 3, p. 302 - 310, 2006.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 2, p.16 - 48, 2010.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo**. Trad. Maria Gabriela de Bragança. 2. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 1995.

PALHARINI, B. N. **Modelagem Matemática e pensamento matemático**: um estudo à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. 2010. 190f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

PINTO, M. M. F. Uma perspectiva sobre o desenvolvimento matemático. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEM, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2006. CD-ROM.

SFARD, A. When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. **The Journal of The Learning Sciences**, Mahwah, NJ, US, v. 16 n. 4, p. 567 - 615, 2007.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Netherland, NL, v. 22, n. 1, p.1-36, 1991.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19<sup>th</sup>, 1995, Recife, Brasil. **Proceedings...** Recife: UFPE, 1995. v. 1, p. 61-75.

TALL, D. The psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking Mathematics Education**. Cambridge, U.K: Kluwer Academic Publishers. A. J. Bishop, 2002.

TALL, D. Using Technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In: CARVALHO, L.M. and GUIMARÃES, L. C. (Eds.) **História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro, 2003, p.1-28. v.1.

TALL, D. Introducing the three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, Canadá, v. 23 n. 3, p. 29-33, 2004.

TALL, D. **Thinking Through Three Worlds of Mathematics**. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23<sup>th</sup>, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings...** Bergen, 2004a, p. 281 - 288. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/proof.html>>. Acesso em: 15 abr. 2008.

TALL, D. Developing a theory of mathematical growth. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 39, n. 1-2, p. 145-154, Springer Berlin, Heidelberg, 2007.

**Submetido em Outubro de 2010.**  
**Aprovado em Março de 2012.**