Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

Carrillo, José; Contreras, Luís C.; Zakaryan, Diana

Avance de un Modelo de Relaciones entre las Oportunidades de Aprendizaje y la Competencia Matemática

Boletim de Educação Matemática, vol. 27, núm. 47, diciembre, 2013, pp. 779-804
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 0103-636X

Avance de un Modelo de Relaciones entre las Oportunidades de Aprendizaje y la Competencia Matemática

Advances in a Model of Relationship between Opportunities to Learn and Mathematics Competence

José Carrillo*
Luís C. Contreras**
Diana Zakaryan***

Resumen

La motivación de este estudio es comprender la importancia que tienen las oportunidades de aprendizaje (OTL)**** que ofrece el profesor en su aula a la hora de facilitar la adquisición de las competencias matemáticas de sus estudiantes (CM). Con este fin, nuestro objetivo es describir las posibles relaciones entre OTL y CM. En este artículo presentamos el modelo teórico OTL-CM que trata de describir, explicar y predecir los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje, en términos de que ciertas OTL (que ofrecen los profesores en sus aulas) pueden favorecer el desarrollo de ciertas CM. Este modelo es útil en la observación de situaciones de enseñanza-aprendizaje como instrumento que puede ayudar a explicarlas e interpretarlas.

* Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla (US), Sevilla, España. Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail*: carrillo@uhu.es.

** Doctor en Psicopedagogía, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (UHU), Huelva, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus El Carmen, Avenida del 3 de Marzo, s/n, 21071. Huelva, España. *E-mail*: lcarlos@uhu.es.

*** Doctora en Educación, Universidad de Huelva (UHU), España. Profesora Asociada de Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), Valparaíso, Chile. Dirección postal: Instituto de Matemáticas, Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile. *E-mail*: diana.zakaryan@ucv.cl.

**** Del original inglés "Opportunity-to-learn".

Palabras-clave: Oportunidad de Aprendizaje. Competencia Matemática. Modelo teórico OTL-CM.

Abstract

The aim of this study is to understand the importance of the Opportunities-to-Learn (OTL) offered by teachers in the classroom in facilitating the acquisition of mathematical competence (CM) of their students. Accordingly, our goal is to find and describe the possible relationship between OTL and CM. In this paper we present the theoretical model OTL-CM which seeks to describe, explain and predict the phenomena of teaching and learning, in terms of how certain OTL (offered by teachers in their classrooms) may favor the development of certain CM. This model can be applied in observing teaching-learning settings as an instrument that can help explain and interpret them.

Keywords: Opportunity to learn. Mathematics Competence. Theoretical Model OTL-CM.

1 Introducción

Considerando que la naturaleza de la enseñanza en el aula afecta significativamente a la naturaleza y al nivel de la aprendizaje de los estudiantes (HIEBERT; GROUWS, 2007), pretendemos comprender cómo se relacionan las oportunidades para aprender matemáticas que proporciona el profesor a sus estudiantes y las competencias matemáticas de éstos. Para dar respuesta a esta cuestión, en 2011 desarrollamos un estudio de dos casos (ZAKARYAN, 2011), en el que tratamos de comprender éstas relaciones. En este artículo solo presentamos el modelo teórico de relaciones que emergió de esa investigación, dejando para una posterior publicación la presentación del análisis de los casos.

Nuestra aproximación se ha hecho desde una doble perspectiva. Por una parte, desde la práctica docente, centrando nuestra mirada en dos profesores de secundaria y las actividades que desarrollaban cuando enseñaban matemáticas. Abordamos esta perspectiva en relación con el concepto de Oportunidades de Aprendizaje (OTL). Reconociendo la importancia de varias dimensiones que abarcan las OTL, nos centramos en el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje (STEVENS; GRYMES, 1993), particularmente, en las actividades del profesor en el aula (ANDREWS; CARRILLO; CLIMENT, 2005), que condicionan la naturaleza de la enseñanza que desarrolla. La otra perspectiva, la determinan las Competencias Matemáticas (CM) de estudiantes. Esta segunda línea de investigación tiene que ver con la noción de la competencia, concretamente, nos situamos dentro del marco de la competencia matemática del proyecto PISA 2003 (OCDE, 2004).

En este artículo presentamos el modelo teórico, desarrollado a lo largo de la investigación y adaptado a la realidad observada, que trata de describir, explicar y predecir los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje, en términos de que ciertas oportunidades de aprendizaje que ofrecen los profesores en sus aulas pueden favorecer el desarrollo de ciertas competencias matemáticas.

En los siguientes apartados presentaremos nuestra perspectiva en relación con las OTL (donde distinguiremos el foco matemático, las estrategias didácticas y el tipo de tareas propuestas por el profesor), las CM (basadas en PISA), para luego discutir el modelo de relaciones y concluir con algunas reflexiones finales.

2 Oportunidades de aprendizaje

El concepto de *Oportunidades de Aprendizaje* ha desempeñado, durante varios años, diferentes papeles: como concepto investigativo (*research concept*), como indicador de la educación (*education indicator*) y como instrumento político (*policy instrument*) (MCDONNELL, 1995), y actualmente, según Hiebert y Grouws (2007), se considera como uno de los pocos indicadores que conectan la enseñanza y el aprendizaje, y pretenden explicar las diferencias en el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes a través de varios contextos.

Siendo inicialmente asociadas las OTL con el contenido curricular, la extensión de su definición ha supuesto la inclusión de las dimensiones relacionadas principalmente con *recursos, condiciones del centro, currículo e instrucción* (BANICKY, 2000). Por otra parte, estas dimensiones se organizan acerca de cuatro preguntas: ¿qué se espera que aprendan los estudiantes?, ¿quién proporciona la instrucción?, ¿cómo se organiza la instrucción? y ¿qué han aprendido los estudiantes?[1], y las tres primeras, a su vez, se concretan en cuanto al sistema educativo, el centro y el aula (SCHMIDT; MCKNIGHT, 1995). La siguiente figura, extraída del modelo de estos autores, resume los indicadores relativos al aula, que presenta el foco de interés de este estudio.

[1] Los autores destacan la importancia de estudiar las características de los estudiantes como factor importante para la mejor comprensión de qué y cómo aprenden los estudiantes. Las características de los estudiantes, como su historia académica, nivel socio-cultural y económico de sus familias, autoconcepto, motivación, creencias, tiempo dedicado, influyen en cómo aprovechan las oportunidades de aprender que se les ofrece (SCHMIDT; MCKNIGHT, 1995).

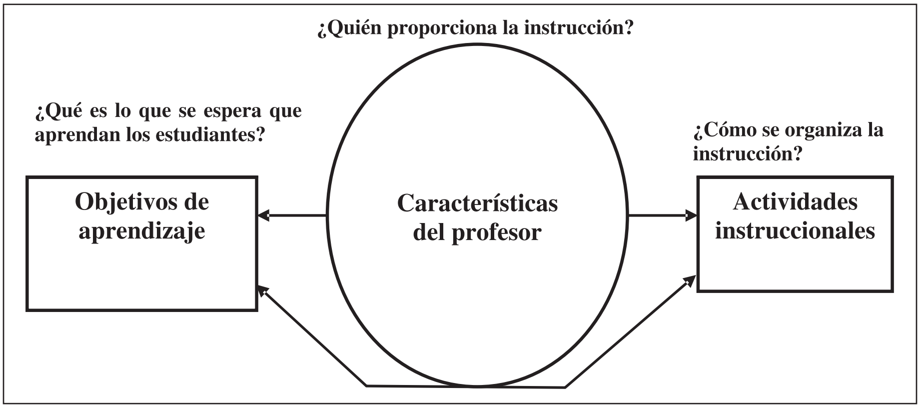

Figura 1 – Concreción de las OTL en relación con el aula
Fuente: Schmidt y McKnight (1995, p. 349)

Como se puede observar, la concreción de las OTL en relación al aula se refiere a diferentes indicadores interrelacionados entre sí y relacionados con el profesor; es decir, las características del profesor, sus objetivos y sus modos de enseñar y gestionar la instrucción tienen un papel clave a la hora de determinar las oportunidades de aprendizaje.

En nuestro estudio, uno de los aspectos principales en el análisis de las OTL son los objetivos subyacentes a las acciones y a la toma de decisiones del profesor, según el énfasis que pone en diferentes habilidades y procesos matemáticos; es el denominado *foco matemático* (ANDREWS; CARRILLO; CLIMENT, 2005).

En cuanto a las actividades instruccionales, que incluyen el uso del libro de texto, estructura de la lección, materiales didácticos, gestión de aula, evaluación de los estudiantes, participación, deberes, tipo de agrupamiento (SCHMIDT; MCKNIGHT, 1995; BOSCARDIN et al., 2005), hemos considerado las estrategias de la enseñanza que los profesores emplean para desarrollar las capacidades de sus estudiantes de entender y usar matemáticas, o sea, sus *estrategias didácticas* (ANDREWS; CARRILLO; CLIMENT, 2005). Este es otro aspecto central en el análisis de las OTL.

Dentro de los indicadores asociados a la actividad del profesor, que determinan las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, es destacable la relevancia que varios autores (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; PONTE, 2004; LUPIÁÑEZ, 2009; SULLIVAN et al., 2010) atribuyen al *tipo* *de tareas*[2] que éste selecciona y propone, ello es también objeto de interés en el marco de análisis de las OTL. En las tareas propuestas por el profesor, distinguimos los diferentes grados de complejidad de las mismas por el tipo de *procesos cognitivos* que se activan en los estudiantes para llevarlas a cabo. Otro aspecto importante, al tratar las tareas propuestas por el profesor, son *situaciones* y *contextos* en los cuales se plantean las tareas.

De este modo, en nuestra investigación nos proponemos estudiar las siguientes dimensiones de las OTL, presentadas mediante el Cuadro 1. Asimismo, consideramos los diferentes materiales didácticos y el tipo de agrupamiento utilizados en el aula.

Foco matemático	*Conceptual*[3] *Procedural* *Structural* *Derivational* *Efficiency* *Problem solving* *Reasoning*
Estrategias didácticas	Activación de conocimiento previo Ejercitación de conocimiento previo Explicación Entrenamiento Evaluación Motivación Cuestionamiento Diferenciación Activación de conocimiento previo Ejercitación de conocimiento previo Explicación
Tipo de tareas	Procesos cognitivos (según los tres grupos) Situaciones Contextos

Cuadro 1 – Dimensiones de las OTL
Fuente: Adaptado de Andrews, Carrillo y Climent (2005, p. 133)

La descripción de cada una de estas dimensiones de las OTL (foco matemático, estrategias didácticas y tipo de tares) y sus correspondientes subcategorías se presentan en el Anexo 1.

[2] Cuando nos referimos a las *tareas*, entendemos que son demandas que el profesor plantea a los estudiantes, que activan sus conocimientos acerca de un tema matemático concreto, e implican una determinada actividad matemática por parte de los estudiantes (GÓMEZ, 2007; LUPIÁÑEZ, 2009).
[3] Nos decidimos por usar las denominaciones de los focos en el idioma original del proyecto (inglés).

3 Competencia matemática

En nuestro estudio seguimos la noción de *competencia matemática* determinada por Niss (1999, p. 6), que es la "capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticas en las cuales la matemática desempeña o podría desempeñar un papel". Esta noción, junto a otras ideas de este autor, ha sido adaptada en el proyecto PISA para la construcción de un amplio marco de trabajo de competencias, en el cual nos situaremos.

Destacando el papel funcional de las matemáticas, el foco de atención del proyecto OCDE/PISA se centra en "cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido" (RICO, 2007, p. 4).

Con el fin de identificar y examinar las competencias matemáticas de los estudiantes que reflejan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, el proyecto OCDE/PISA ha centrado en ocho competencias matemáticas características que se basan en su forma actual, en el trabajo de Niss (1999): "pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, emplear soportes y herramientas tecnológicos"[4] (OCDE, 2004, p. 40).

Por otra parte, las competencias que muestran los estudiantes cuando utilizan normalmente estos procesos matemáticos al resolver los problemas que surgen mientras se relacionan con su mundo, en el proyecto se clasifican en tres grupos: *reproducción, conexión y reflexión*. Cada uno de los tres grupos constituye el conjunto de conocimientos y destrezas cualitativamente diferentes de los del grupo anterior, es decir, es más amplio o más desarrollado, por lo que se supone que los estudiantes que adquieren competencias del grupo de *conexión,* son capaces de hacer con éxito las tareas del grupo de *reproducción;* y los que poseen competencias del grupo de *reflexión,* las de *reproducción* y *conexión*, lo que a su vez nos permite considerar las competencias de estos tres grupos como un continuo reproducción-conexión-reflexión.

[4] Esta última competencia ha sido descartada finalmente en el análisis de los resultados de PISA2003, debido a la imposibilidad de establecer comparaciones internacionales entre países que usan diferentes herramientas en el aula (RICO; LUPIÁÑEZ, 2008). Por tanto, a continuación tratamos solo las siete competencias matemáticas.

Según las consideraciones que hemos hecho respecto a la importancia de las OTL, vistas desde la perspectiva de las actividades del profesor en el aula, en relación con las competencias matemáticas de los estudiantes, el siguiente apartado dedicamos al modelo teórico de relaciones entre OTL y CM.

4 Modelo OTL-CM

Con el objetivo de avanzar en la elaboración del modelo, inicialmente nos sumergimos en la realidad de dos aulas con la intención de observar lo ocurrido y, a partir de ello, intentar comprender las relaciones entre las OTL y las CM de los estudiantes. Los datos obtenidos, aunque aludían a ciertas relaciones, sin embargo, por ser algunas intuitivas y otras no tan convincentes, no permitían formar una imagen completa de las relaciones entre OTL y CM. De ahí, "en el esfuerzo por llenar la distancia entre los hechos tal y como se nos presentan y los conceptos y esquemas con los que debemos aprehenderlos y comprenderlos" (BERICAT, 1998, p. 82), desarrollamos un modelo teórico adaptado a la realidad observada. Los datos provenientes de las aulas observadas, por tanto, han servido para consolidar el modelo teórico a lo largo de su elaboración y, al mismo tiempo, para abstraer de ellos en el mayor grado posible (AGAR, 1996).

Por una parte, el eje principal del modelo lo constituyen las siete competencias matemáticas o procesos cognitivos (y sus clasificaciones según los tres grupos) que activan los estudiantes al abordar problemas matemáticos (OCDE, 2004). Por otra, nos basamos en las siguientes consideraciones inferidas de los fundamentos teóricos del enfoque por competencias (para una lectura más amplia y detallada véase ZAKARYAN (2011)): (a) para llegar a tener competencias matemáticas los estudiantes necesitan un amplio abanico de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; (b) estos conocimientos y destrezas se adquieren mediante el aprendizaje significativo; (c) estos conocimientos y destrezas han de ser movilizados en una variedad de situaciones y contextos. Otra premisa a tener en cuenta (en la medida que ayuda a comprender mejor las relaciones), aunque explícitamente no esté presente en el modelo, es una actitud positiva hacia las Matemáticas.

De acuerdo con esas premisas, intentamos determinar tales actividades del profesor, y las respectivas OTL, que, potencialmente, facilitan la adquisición de cada una de las competencias o, al mismo tiempo, varias de ellas. De este modo, podemos establecer relaciones e interpretar el modelo teniendo en cuenta diferentes objetivos del profesor, que se reflejan en sus actividades en el aula, a la luz de las competencias matemáticas de sus estudiantes.

Con este fin, consideramos una trayectoria hipotética de enseñanza (THE) de las matemáticas, que tiene cierta similitud con la trayectoria hipotética de aprendizaje[5] (THA) (SIMON, 1995; DE LANGE, 1999) en cuanto que ambas consideran los objetivos de aprendizaje como un componente principal. En nuestro modelo, la THE es entendida como constructo del investigador que representa una hipotética evolución del estilo de enseñanza del profesor en función de determinados objetivos de aprendizaje.

En un primer nivel de la THE, el objetivo del profesor respecto al aprendizaje de las matemáticas se enfoca en la adquisición, por parte de los estudiantes, de los conceptos y procedimientos, que es lo que tradicionalmente ocurre en las clases de matemáticas (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; SCHOENFELD, 1988; STEIN; GROVER; HENNINGSEN, 1996) como consecuencia se proporcionarán a los estudiantes unas determinadas oportunidades de aprendizaje.

En un segundo nivel, el objetivo del profesor sería que los estudiantes entendieran las relaciones entre los conceptos, sus propiedades y fórmulas aplicadas, entre la Matemática y los fenómenos del mundo real; se les plantearán oportunidades de aprendizaje correspondientes.

En el siguiente nivel el objetivo podría ser que los estudiantes aplicaran sus conocimientos en situaciones desconocidas, que supieran argumentar sus decisiones, generalizar los resultados, usar diferentes estrategias; entonces las oportunidades de aprendizaje serán distintas.

Admitimos que puede ocurrir que los objetivos del profesor no pasen del primer nivel, pueden llegar al segundo o hasta el tercero, incluso pueden empezar por el último. Asimismo, asumimos que pueden observarse diferentes combinaciones de focos matemáticos, estrategias didácticas o tipo de tareas propuestas durante el abordaje de un tema determinado con mayor o menor

[5] La THA de Simon (1995) es parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas y está compuesta por tres componentes: objetivos de aprendizaje del profesor, actividades de aprendizaje e hipotético proceso de aprendizaje. El objetivo del profesor marca la dirección para la selección de las actividades de aprendizaje y la hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Simon (1995, p. 135) usa la frase "trayectoria hipotética de aprendizaje" para referirse "a la predicción del profesor acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje". Mientras nosotros usamos la frase "trayectoria hipotética de enseñanza" para referirnos a la supuesta evolución en la enseñanza del profesor según cambian sus objetivos. Por otra parte, en nuestro modelo, los objetivos del profesor igualmente determinan sus actividades, sin embargo, no consideramos explícitamente sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje, sino las relacionamos con la potencialidad de desarrollar ciertas competencias matemáticas de los estudiantes.

énfasis en ellos (ANDREWS, 2005; ANDREWS; CARRILLO; CLIMENT, 2005). Sin embargo, para la construcción de nuestro modelo partimos de estos tres niveles en los objetivos, sin excluir la posibilidad de existencia de otros objetivos, pero considerando un mayor énfasis en los mencionados, de manera que presenten otro continuo correspondiente al de los tres niveles[6] de dominio de los estudiantes.

4.1 Relaciones entre las OTL y CM

a) Relaciones relativas al foco matemático

Como se puede apreciar, los focos matemáticos c*onceptual, procedural, structural, derivational, efficiency, problem solving y reasoning* (ANDREWS, 2005; ANDREWS; CARRILLO; CLIMENT, 2005) abarcan las principales facetas del conocimiento matemático.

Así, *problem solving,* como la actividad matemática principal, comprende las situaciones-problemas y las técnicas de resolución, y requiere el dominio de los distintos recursos para llevarla a cabo con éxito o, de acuerdo con Schoenfeld (1985), la resolución de problemas matemáticos se construye sobre el fundamento de los conocimientos matemáticos básicos. Los conocimientos matemáticos básicos, a su vez, como objeto del aprendizaje escolar, prioritariamente consideran el dominio de nociones básicas, de relaciones entre éstas, de procedimientos, operaciones y técnicas de cálculo, de razonamientos, demostraciones y justificaciones, de diferentes vías para abordar una variedad de problemas y cuestiones. Resumiendo, parafraseando a Rico y Lupiáñez (2008), el conocimiento matemático se organiza en dos grandes campos: conceptual y procedimental, que se desglosan, el primero en los conocimientos sobre hechos, conceptos (c*onceptual*) y estructuras conceptuales (*structural*), y el segundo en destrezas (p*rocedural*), razonamientos (r*easoning*) y estrategias (*efficiency*). El foco *derivational* se relaciona con el conocimiento matemático en cuanto enfatiza el modo en que se adquiere el conocimiento matemático: derivándose de los conocimientos existentes en un proceso de reestructuración continua de estructuras cognoscitivas.

[6] Para el manejo más operativo de los 6 niveles establecidos empíricamente (OCDE, 2003), los agrupamos en tres niveles, considerando nivel bajo el correspondiente a los niveles 1 y 2, nivel medio a los 3 y 4, y nivel alto a los niveles 5 y 6 de las actuaciones de los estudiantes. Cabe recordar que, cuando nos referimos a los niveles en las actuaciones de los estudiantes, éstos están sujetos a los procesos cognitivos que movilizan los estudiantes, a las situaciones y contextos, y a los contenidos matemáticos. Es decir, son más extensos y no se reducen solamente a los tres grupos (reproducción, conexión, reflexión).

Partimos del hecho de que todos los focos matemáticos son importantes a la hora de la construcción del sistema de conocimientos, y cada uno a su vez promueve la adquisición de distintos conocimientos y destrezas, así como puede complementar los demás focos. En Zakaryan (2011) describimos, detalladamente, las oportunidades que presenta cada uno de los focos matemáticos. Dependiendo de a favor de cuál o cuáles focos se desequilibran las oportunidades de aprendizaje, pueden producirse desequilibrios en los conocimientos y destrezas de los estudiantes. De este modo, descuidar alguna de las facetas del conocimiento matemático produce un desequilibrio en la formación (MIALARET, 1984).

b) Relaciones relativas a las estrategias didácticas

Las estrategias didácticas también tienen mucho que ver con las oportunidades de aprendizaje dadas a los estudiantes, dado que, dependiendo de las estrategias elegidas por el profesor para facilitar la compresión de sus estudiantes, variarían tanto el papel del estudiante y del profesor en el proceso de la enseñanza y aprendizaje, como las interacciones entre ambos y, por tanto, las situaciones de aprendizaje. Consideramos la enseñanza no como pura transmisión de conocimientos del profesor al estudiante, sino como un proceso complejo de interacción efectiva entre ambos. Por ello, estudiamos, de forma particular, las estrategias didácticas que evidencian dichas interacciones: explicación, entrenamiento, cuestionamiento, participación y exploración. Una extensa descripción de las relaciones se puede encontrar en Zakaryan (2011).

c) Relaciones relativas a los tipos de tareas (contexto y complejidad)

El contexto de tareas propuestas por el profesor, es una dimensión importante a considerar (PONTE, 2004); marca, esencialmente, el sentido y la finalidad de las matemáticas enseñadas y presenta la oportunidad para los estudiantes de formar ideas sobre las situaciones donde se pueden aplicar y sobre la utilidad y el papel de las matemáticas en la resolución de una gran variedad de problemas. Asimismo, el contexto tiene otras varias funciones[7], entre ellas, una de las más importantes, según De Lange (1987), es su uso para el proceso de la matematización conceptual, es decir, para la formación de conceptos.

De acuerdo con lo expuesto, la resolución de los problemas planteados

[7] Desde la perspectiva de la RME, el contexto permite a los estudiantes acceder a las matemáticas de una manera natural y motivadora; proporciona un fundamento sólido para el aprendizaje de operaciones formales, procedimientos, notaciones, reglas y algoritmos; permite utilizar la realidad como recurso y dominio de aplicaciones; y realizar la ejercitación de las habilidades específicas en situaciones aplicables (TREFFERS; GOFFREE, 1985).

en una variedad de situaciones y contextos proporciona a los estudiantes la oportunidad de experimentar sus conocimientos y habilidades de una manera significativa. En el caso ideal, los estudiantes tendrían que trabajar en problemas representados en diversas situaciones y contextos, ya que cada uno proporciona oportunidades para el desarrollo de diferentes habilidades.

Por otra parte, la resolución de tareas de demanda cognitiva diferente presenta oportunidades para activar diferentes procesos cognitivos. Según señalan Stein, Grover y Henningsen (1996), las tareas matemáticas en las que suelen trabajar los estudiantes determinan no solo lo esencial que aprenden, sino también cómo llegan a pensar sobre el desarrollo, el uso y el sentido de las matemáticas. En efecto, una distinción importante que sustenta la investigación sobre tareas académicas es la diferencia entre tareas que involucran a estudiantes a un nivel superficial y tareas que les involucran a un nivel más profundo por interpretación exigente, flexibilidad, control de recursos y construcción de significados.

La demanda cognitiva de una tarea puede reconocerse por las características de la tarea, que incluyen: número y tipo de representaciones, número de estrategias de solución y exigencias de comunicación (la extensión de explicación o justificación requerida del estudiante) (STEIN; GROVER; HENNINGGSEN, 1996). Las tareas de demanda cognitiva inferior suelen representarse de una única manera (simbólica, gráfica sencilla o verbal), requieren aplicación directa de fórmulas y algoritmos, y comunicación del resultado (prioritariamente, son tareas de respuesta cerrada). Las tareas de demanda cognitiva superior implican representaciones más sofisticadas, requieren su interpretación y traducción, y uso de diferentes estrategias para su proceder, así como, normalmente, son de respuesta abierta que invitan a explicar, argumentar o justificar. Entre estos dos extremos existe una variedad de tareas que combinan estas características de diferente manera. En todo caso, en las tareas que implican procesos cognitivos de nivel superior el foco se pone en la comprensión, interpretación y aplicación flexible de los conocimientos y habilidades (DOYLE, 1988).

Teniendo en cuenta las consideraciones que hemos hecho acerca de las relaciones entre cada una de las subcategorías, desde el punto de vista de las OTL que se ponen en juego, y las siete competencias matemáticas y los grupos de competencia, detalladamente descritas en Zakaryan (2011), en el siguiente paso construimos el modelo de relaciones entre OTL y CM.

El modelo OTL-CM, que sigue a continuación (Figura 2), describe, explica y predice estas relaciones y es representado mediante los tres niveles de THE, cada uno de los cuales comprenden las OTL que potencian las categorías y subcategorías correspondientes a ese nivel, y los tres niveles de dominio considerados como un continuo: nivel bajo - nivel medio - nivel alto. En las siguientes líneas justificamos nuestra decisión respecto a la correspondencia de cada uno de los tres niveles de la THE con los tres niveles de dominio.

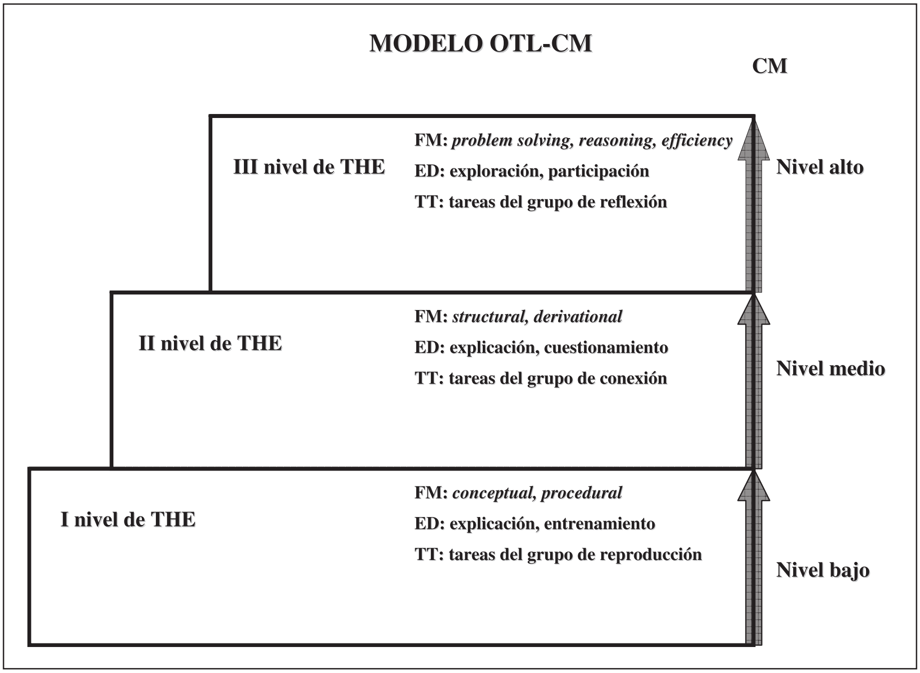

Figura 2 – Modelo OTL-CM
Fuente: Zakaryan (2011, p. 101)

Hay que advertir que la posición que tomamos respecto al papel de cada subcategoría, en su relación con alguno de los niveles de dominio, viene dada por tener siempre presente los tres niveles en los objetivos del profesor que determinan ese papel. Así, por ejemplo, no es que el foco *conceptual y procedural* se limiten al desarrollo de las competencias del grupo de reproducción, sino que el objetivo del profesor correspondiente al I nivel de THE, lo limita a ese papel. Estos mismos focos están presentes en los niveles II y III de THE, sin embargo, promueven el desarrollo de las competencias matemáticas que permiten una actuación competente, debido al objetivo distinto del profesor. Es decir, cada nivel de THE supone la presencia de las subcategorías del nivel anterior, sin embargo, su papel queda determinado por el objetivo del profesor.

Por otra parte, con la intención de destacar el papel del profesor y del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, asignamos diferentes estrategias didácticas para cada nivel, pero no son fijos, sino, por ejemplo, en el nivel II o III de la THE, pueden ser otras combinaciones (*explicación y exploración* o *participación y cuestionamient*o), lo que hemos querido subrayar, es el papel pasivo, parcialmente activo/pasivo y activo de cada uno de los agentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por último, el tipo de tareas que propone el profesor directamente se relaciona con los tres grupos de las competencias matemáticas que activan.

Las reflexiones que siguen a continuación explican y justifican nuestra posición.

4.1.1 I nivel de THE – nivel bajo de dominio

Tal como mencionamos, en un primer nivel de la THE el objetivo del profesor se dirige, principalmente, a la adquisición por parte de los estudiantes de los conceptos y procedimientos, va acompañado, prioritariamente, por las estrategias didácticas explicación y entrenamiento, y resolución de ejercicios tipo. Exponemos las oportunidades de aprendizaje que se proporcionan en este caso.

En primer lugar, hay que destacar que el conocimiento conceptual se caracteriza como un conocimiento rico en relaciones: cada concepto se constituye tanto por los hechos como por las relaciones entre ellos. Por tanto, si no se dan a conocer (y se invitan a establecer) las diversas relaciones entre diferentes conceptos matemáticos *(structural*, *derivational)*, que a su vez, forman auténticas redes de conocimientos, éstos se quedan como unidades aisladas de información. Asimismo, si no se da la oportunidad de aplicar los hechos y conceptos aprendidos a situaciones y problemas nuevos, mediante la resolución de problemas *(problem solving)*, este tipo de conocimiento no es transferible y está ausente de la componente *comprensión*. De acuerdo con Bloom et al. (1972, p. 28) “un conocimiento adquirido tiene poco valor en cuanto tal si no puede ser utilizado en situaciones nuevas o en formas bien diferentes de la original”.

Por otra parte, Chamorro (1991) llama la atención sobre el significado de los procedimientos, que deberían compatibilizar la creatividad del sujeto con el aprendizaje de procedimientos estándar; éstos deben ser valorados por el estudiante en función de su mejor adaptabilidad a situaciones comunes y de una economía de acciones o de pensamiento. Sin embargo, cuando ésta es la oportunidad de aprender matemáticas, proporcionada casi en forma exclusiva, se convierte en un instrumento mecánico, carente de sentido y la Matemática llega a entenderse "como un conjunto de datos y de procedimientos que no se relacionan entre sí, y no como un conjunto de estructuras de conocimiento complejas e interrelacionadas" (RESNICK; FORD, 1998, p. 128). Como menciona Skemp (1976), las matemáticas instrumentales tienen la ventaja de aprenderse fácilmente, son más inmediatas y aparentes, sin embargo, son difícilmente adaptables a situaciones nuevas, ya que la comprensión instrumental necesita tener presente los métodos aplicados a un problema y ha de aprender cada vez un método diferente para una nueva tarea.

De acuerdo con lo expuesto, consideramos que cuando el énfasis se pone, principalmente, en el foco *conceptual* y *procedural*, se da la oportunidad de adquirir diferentes saberes necesarios para ejercitar matemáticas, pero no suficientes para saber conectar, aplicar y argumentar su uso. En palabras de Ball (2003), el conocimiento de los tópicos, conceptos y procedimientos tiene papel central en el manejo de las matemáticas, pero no es suficiente para el uso efectivo de las matemáticas.

Por otra parte, una enseñanza centrada principalmente en el profesor (explicación, entrenamiento), limita las oportunidades para llegar a adquirir conocimientos de una manera activa[8], que, a su vez, impide el desarrollo de las competencias matemáticas más avanzadas. Además, si los estudiantes tienen la oportunidad de realizar principalmente tareas de demanda cognitiva inferior (reproducción), encuentran dificultad en abordar las tareas matemáticas complejas, ya que es poco probable que al emplear en el aula la ejercitación repetitiva de ejercicios tipo, los estudiantes adquieran procesos propios a la actividad matemática tales como observación, análisis y síntesis, generalización, abstracción, validación etc., por ello, tienen dificultades a la hora de resolver problemas distintos de los que resuelven en el aula, aquellos que no les resultan familiares y que requieren unos procedimientos diferentes de los usados. Sus habilidades en resolución de tareas rara vez llegan más allá de la resolución de ejercicios tipo con la aplicación mecánica de fórmulas y algoritmos. En definitiva, reducir la enseñanza de las matemáticas a la realización de ejercicios, puede

[8] En palabras de Piaget (1973), cada vez que enseñamos a los niños algo que hubiera sido capaz de descubrir solo, le impedimos inventarlo, o sea, comprenderlo completamente.

llevar al empobrecimiento de los retos propuestos y a desmotivar a los alumnos (PONTE, 2004).

De este modo, las oportunidades de aprendizaje que se proporcionan en el I nivel de THE se limitan a la memorización de los hechos y conceptos o aplicación de fórmulas, algoritmos y procedimientos a una serie de ejercicios similares, por tanto, promueven las competencias matemáticas del grupo de reproducción en situaciones rutinarias, lo que corresponde al nivel bajo de las actuaciones de los estudiantes.

4.1.2 II nivel de THE – nivel medio de dominio

En este segundo nivel de la THE, el objetivo del profesor es que los estudiantes entiendan las relaciones entre los conceptos, sus propiedades, procedimientos y operaciones, que sepan reconocer estas relaciones y patrones, tanto dentro de las Matemáticas como en situaciones del mundo real, reestructuren sus conocimientos nuevos a partir de los conocimientos previos (focos *structural, derivational*). Se les proponen resolver tareas matemáticas más complejas, pero todavía en situaciones familiares.

La construcción de significados, según Ausubel (1982), implica la conexión de lo que el alumno sabe con los conocimientos nuevos. Asimismo, la comprensión de las secuencias del desarrollo de los contenidos matemáticos puede ser motivadora y promovedora para la construcción de *mapas mentales*. Por su parte Skemp (1976), comparando la comprensión relacional e instrumental de las matemáticas, entre las ventajas de la comprensión relacional frente a la instrumental, destaca su adaptabilidad a nuevas tareas, ya que el saber por qué funciona un método permite aplicarlo a nuevos problemas; su facilidad para recordar, ya que el saber cómo están interrelacionadas las reglas o fórmulas permite recordarlas como parte de un todo y su retención a largo plazo.

Por tanto, cuando el énfasis se pone en el foco *derivational* y *structural* se da la oportunidad de relacionar diferentes conceptos y procedimientos, sus propiedades, conocer las conexiones entre ellos.

Por otra parte, se trata de una enseñanza parcialmente centrada en el profesor (explicación, cuestionamiento), se proporciona la oportunidad de cierta actividad del estudiante, que favorece el nivel medio de dominio.

Asimismo, en este nivel de la THE los estudiantes tienen la oportunidad de realizar tareas de demanda cognitiva más avanzada (conexión): aplicar sus conocimientos a situaciones familiares, conectar varios pasos, establecer relaciones, es decir, se movilizan las competencias matemáticas del grupo de conexión en situaciones y contextos familiares, las que condicionan el nivel medio en las actuaciones de los estudiantes.

4.1.3 III nivel de THE – nivel alto de dominio

En el tercer nivel de la THE el objetivo del profesor es que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos en situaciones no rutinarias, en contextos distintos, que sean capaces de argumentar y justificar sus respuestas y decisiones, generalizar los resultados, usar diferentes estrategias de resolución de modo autónomo. Este objetivo implica un mayor énfasis en los focos matemáticos *problem solving, reasoning y efficiency*, las estrategias recurridas son exploración y participación, las tareas propuestas requieren activar procesos cognitivos avanzados (reflexión) en una variedad de situaciones y contextos. Las oportunidades de aprendizaje correspondientes a este nivel son siguientes.

No será ninguna exageración la afirmación de que la actividad vital humana consiste en la resolución diariamente de diferentes problemas en toda su diversidad de contenidos, situaciones y métodos de resolución, que exige de las personas la capacidad bien desarrollada hacía la actividad creativa o, por lo menos, la habilidad de encontrar y tomar la solución óptima en unas condiciones dadas. Por tanto, no es de extrañar el papel importante que se le otorga a la resolución de problemas.

La potencialidad de la resolución de problemas para proporcionar situaciones de aprendizaje significativo ha sido destacada por numerosos investigadores (BLANCO, 1993; GAROFALO; LESTER, 1985; CARRILLO, 1998; CONTRERAS, 1987; POLYA, 1980; SCHOENFELD, 1985; entre otros).

La oportunidad que proporciona el foco *efficiency*, por su parte, supone algún dominio mayor que pura reproducción o conexión, ya que se trata de las estrategias que llevan a los estudiantes a elegir técnicas, conocimientos, destrezas o razonamientos en cada etapa de la resolución de problemas.

A su vez, el razonamiento causa un gran impacto en el desarrollo intelectual de cualquier persona, lo que le otorga un valor indiscutible y se considera tanto medio como fin en el desarrollo del alumno. El proceso mental de realizar inferencias a partir de una o varias proposiciones interrelacionadas sobre una nueva proposición, que contiene un nuevo conocimiento acerca del objeto de estudio, se entiende como razonamiento y se considera propio de un pensamiento de alto nivel. Para Ball y Bass (2003) el razonamiento es la habilidad fundamental de las matemáticas, necesario para varios objetivos: para la comprensión de conceptos matemáticos, para el uso flexible de ideas y procedimientos, para la reconstrucción de los conocimientos una vez entendidos, pero olvidados con el tiempo. Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), en su definición de la pericia matemática (*mathematical proficiency*) entre sus cinco componentes[9] interconectados y mutuamente dependientes, destacan el razonamiento flexible (*adaptive reasoning*), que es la capacidad para el pensamiento lógico, reflexión, explicación y justificación, y la describen como el pegamento que mantiene todo junto. El núcleo del razonamiento flexible es la justificación de declaraciones y desarrollo de argumentos.

Por tanto, cuando el énfasis se pone en el foco *problem solving, reasoning* y *efficiency* se da la oportunidad de movilizar los conocimientos y destrezas, de saber cómo aplicar los diferentes saberes y por qué.

Por otra parte, estos focos implican el uso de las estrategias didácticas exploración y participación, que determinan una enseñanza centrada en el estudiante. De este modo, se da la oportunidad de adquirir los conocimientos de modo activo y significativo.

Además, el foco *problem solving* conlleva la oportunidad para los estudiantes de experimentar sus conocimientos y destrezas resolviendo problemas de demanda cognitiva de alto nivel (reflexión), mediante enfoques y estrategias originales, o sea, se movilizan las competencias matemáticas del grupo de reflexión en una variedad de situaciones y contextos que facilitan un alto nivel en las actuaciones de los estudiantes.

5 Comentarios finales

Con este estudio hemos pretendido aproximarnos a un problema que preocupa, tanto a los profesores, por sentirse desarmados y desanimados ante las exigencias que parecen cada día más inabordables, como a los investigadores y formadores en Educación Matemática, preocupados por la formación inicial y continua de los profesores. Parece lógico que para un desarrollo integral de los estudiantes haya que repensar el acceso a la formación docente[10], así como, profesionalizar y reorientar la formación de los maestros y de los profesores de

[9] Los cinco componentes de *mathematical proficiency* son: comprensión conceptual (*conceptual understanding*), fluidez de procedimientos (*procedural fluency*), competencias estratégicas (*strategic competence*), razonamiento flexible (*adaptive reasoning*) y disposición productiva (*productive disposition*) (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001).

[10] En esta línea, Contreras et al. (2012) han documentado la deficiente formación matemática de los futuros maestros, a partir del estudio de sus competencias numéricas; Sáenz (2007), a su vez, ha comparado las competencias PISA de los estudiantes para maestro con los estudiantes de 15 años, y ha registrado los resultados poco satisfactorios de aquellos. Ambos estudios invitan a reflexionar sobre el proceso de acceso a los estudios de magisterio.

matemáticas. Las nuevas tendencias educativas, orientadas hacia las competencias, obviamente habrán de cambiar aproximaciones tradicionales a la enseñanza que, en una primera instancia, implica a este gremio.

Nuestra aportación, en este sentido, es el modelo OTL-CM, que trata de explicar y predecir los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje. Hemos visto que los objetivos del profesor, respecto al aprendizaje de las Matemáticas, tienen un papel importante a la hora de determinar las oportunidades de aprendizaje. Aunque es sabido que los objetivos del profesor no son independientes de sus concepciones acerca de la Matemática, su enseñanza y aprendizaje o de su conocimiento profesional, no obstante, al tener presente ciertos objetivos, le podrían ayudar a modificar y mejorar sus recursos para su alcance. El énfasis en qué ha de aprender el alumno hace cambiar la tarea tradicional del profesor que ha consistido en *enseñar* hacia la de *ayudar a aprender* (MORALES VALLEJO, 2006). Siendo así, es preciso que los futuros profesores vayan aprendiendo a formular objetivos de aprendizaje generales y más concretos para cada unidad didáctica, distinguir entre medios y fines, buscar los recursos y estrategias necesarias y analizar su adecuación para conseguirlos, así como planificar y seleccionar tareas para el desarrollo de las competencias matemáticas concretas. En lo que se refiere a sus formadores, su papel es orientarles, haciendo ejemplares sus clases en cuanto a *ayudar a aprender*, hacerles conocer y familiarizarse con tales recursos y estrategias, y revelar su potencialidad a la hora de facilitar el desarrollo de diferentes procesos cognitivos de los estudiantes.

Al describir y explicar las relaciones implícitas y explicitas entre los tres niveles de la THE y los tres niveles en las actuaciones de los estudiantes, parece obvio que una *buena práctica* (CLIMENT; CARRILLO, 2007) es la que considera como objetivo el desarrollo de las competencias matemáticas que permiten una actuación competente, o sea, la que corresponde al tercer nivel de la THE.

Asimismo, en términos de Schoenfeld (2011), que reflexiona sobre el *profesor experto* (*teacher expertise*), si la pericia en la enseñanza es la culminación del proceso del desarrollo, lo que ha de desarrollar y cambiar un profesor, son sus *recursos, objetivos y orientación*. En el marco de nuestro trabajo, si tomamos como punto de partida el primer nivel de la THE, entonces cada vez, ampliando y subiendo (complicando) sus objetivos el profesor pasaría al segundo nivel, culminando en el tercer nivel de la THE, lo que supondría el desarrollo y cambio en los objetivos del profesor. Desde esta perspectiva, un profesor experto es el que da más oportunidades para el desarrollo de las competencias matemáticas que aseguran el dominio de alto nivel de estudiantes.

De esta manera, el modelo OTL-CM puede ser aplicado a otras prácticas de enseñanza como instrumento que puede ayudar a explicar e interpretarlas, tanto en términos de una buena enseñanza, como de un profesor experto o competente. No obstante, como ya hemos mencionado, asumimos que pueden existir otros modelos que describan, explican y predigan los mismos fenómenos de una manera diferente; de la misma forma reconocemos que ningún modelo consigue, ni pretende, explicar e interpretar con exactitud procesos tan complejos como los de la enseñanza y el aprendizaje, que involucran tanto factores internos como externos interrelacionados.

Referencias

AGAR, M. **The Professional Stranger**. San Diego: Academic press, 1996.

ANDREWS, P. The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: methodological perspectives and instrument development. In: BIENNIAL CONFERENCE OF THE EUROPEAN ASSOCIATION FOR RESEARCH ON LEARNING AND INSTRUCTION (EARLI), 11th, 2005, Nicosia. **Proceedings…** Nicosia: University of Cyprus, 2005. p. 43-44. Disponible en: <http://www.earli.org/resources/ABSTRACTS%20Nicosia%202005.pdf>. Acceso en: 14 nov. 2013.

ANDREWS, P.; CARRILLO, J.; CLIMENT, N. Proyecto "METE": El foco matemático. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 9, Córdoba, 2005. **Proceedings...** Córdoba: Universidad de Córdoba, 2005. p. 131-137. Disponible en: <https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas09SEIEM.pdf>. Acceso en: 14 nov. 2013.

AUSUBEL, D. **Psicología educativa.** Un punto de vista cognitivo. México: Trillas, 1982.

BALL, D. **Mathematical proficiency for all students**: toward a strategic research and development program in mathematics education. (DRU-273-OERI). Rand mathematics study panel for office of educational research and improvement. Santa Monica, CA: RAND, 2003.

BALL, D.; BASS, H. Making mathematics reasonable in school. In: KILPATRICK, J.; MARTIN, W.; SCHIFTER, D. (Ed.). **A research companion to principle and standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2003. p. 27-44.

BANICKY, L. Opportunity to learn. **Education Policy Brief**, Delaware, v. 7, p. 1-4, Oct. 2000. Disponible en: <http://udspace.udel.edu/bitstream/handle/19716/2446/opp%20to%20learn.pdf?sequence=1>. Acceso en: 14 nov.2013.

BERICAT, E. **La integración de los métodos cuantitativos y cualitativos en la investigación social.** Barcelona: Ariel, 1998.

BLANCO, L. Una clasificación de problemas matemáticos. **Epsilon**, Sevilla, v. único, n. 25, p. 49-60, may. 1993.

BLOOM, B.; ENGELHART, M.; FURST, E.; HILL, W.; KRATHWOHL, D. **Taxonomía de los objetivos de la educación:** clasificación de las metas educacionales. Manual 1. Buenos Aires: El Ateneo, 1972.

BOSCARDIN, C.; AGUIRRE-MUÑOZ, Z.; STOKER, G.; KIM, J.; KIM, M.; LEE, J. Relationship between opportunity to learn and student performance on English and Algebra assessments. **Educational Assessment**, Routledge, v. 10, n. 4, p. 307-332, Dec. 2005.

CARRILLO, J. La Resolución de Problemas en la Enseñanza Secundaria. Ejemplificaciones del para qué. **Epsilon**, Sevilla, v. único, n. 40, p. 15-26, may.1998.

CLIMENT, N.; CARRILLO, J. El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. **Investigación en la Escuela**, Sevilla, v. único, n. 61, p. 23-35, mar. 2007.

CONTRERAS, L. C. La resolución de problemas, ¿Una panacea metodológica? **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 5, n. 1, p. 49-52, mar. 1987.

CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J.; ZAKARYAN, D.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; CLIMENT, N. Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 433-457, abr. 2012.

CHAMORRO, C. **El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas**. Madrid: Alhambra Longman, 1991.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DE LANGE, J. **Mathematics, insight and meaning**. Utrecht: OW&OC Rijksuniversiteit, 1987.

DOYLE, W. Work in mathematics classes: The context of student’s thinking during instruction. **Educational Psychologist**, Routledge, v. 23, n. 2, p. 167-180, Aug. 1988.

GAROFALO, J.; LESTER, F. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 16, n. 3, p. 163-176, Jan. 1985.

GÓMEZ, P. **Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. 2007. 482f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2007.

HIEBERT, J.; GROUWS, D. The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. LESTER, F. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Tteaching and Learning**. Reston: NCTM/Information Age Publishing, 2007. p. 371-404.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Ed.). **Adding it up**: Helping children learn mathematics. Washington: National Academy Press, 2001.

LUPIÁÑEZ, J. L. **Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemática de secundaria**. 2009. 584f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, 2009.

MCDONNELL, L. Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, Washington, v. 17, n. 3, p. 305-322, Sep. 1995.

MIALARET, G. **Las Matemáticas**: cómo se aprenden, cómo se enseñan**.** Madrid: Visor Libros, 1984.

MORALES VALLEJO, P. Implicaciones para el profesor de una enseñanza centrada en el alumno. **Miscelánea Comillas**, Madrid, v. 64, n. 124, p. 11-38, jul. 2006. Disponible en: <http://www.upcomillas.es/Servicios/serv_publ_revi_misc_revi.aspx>. Acceso en: 14 ago. 2011.

NISS, M. Competencies and Subject Description. **Uddanneise**, Copenhagen, Dinamarca, v. único, n. 9, p. 21-29, Nov. 1999.

ORGANIZACION PARA COOPERACION Y DESARROLLO ECONOMICO (OCDE). **The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills**. Paris: OECD, 2003.

ORGANIZACION PARA COOPERACION Y DESARROLLO ECONOMICO (OCDE). **Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas**. Madrid: MEC, 2004.

PIAGET, J. **To understand is to invent:** The future of education. Nueva York: Viking, 1973.

POLYA, G. On Solving Mathematical Problem in High School. In: KRULIK, S.; REYS, R. (Ed.). **Problem Solving in School Mathematics**. Reston: NCTM, 1980. p. 1-2.

PONTE, J. P. Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In: GIMÉNEZ, J.; SANTOS, L.; PONTE, J. P. (Coord.). **La actividad matemática en el aula**. Barcelona: Graó. 2004. p. 25-34.

RESNICK, L.; FORD, W. **La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.** Madrid: MEC- Paidós, 1998.

RICO, L. La competencia matemática en PISA. **PNA**, Granada, v. 1, n. 2, p. 47-66, ene. 2007.

RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. L. **Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular**. Madrid: Alianza, 2008.

SÁENZ, C. La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 25, n. 3, p. 355-366, nov. 2007.

SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, Jan. 1995.

SCHMIDT, W.; MCKNIGHT, C. Surveying educational opportunity in mathematics and science: an international perspective. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, Washington, v. 17, n. 3, p. 337-353, Sep. 1995.

SCHOENFELD, A. Reflections on teacher expertise. In: LI, Y.; KAISER, G. (Ed.). **Expertise in mathematics instruction.** New York: Springer + Business Media. LLC, 2011. p. 327-341.

SCHOENFELD, A. When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. **Educational Psychologist**, Routledge, v. 23, n. 2, p. 145-166, Aug. 1988.

SCHOENFELD, A. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academy Press, 1985.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, Derby, v. único, n. 77, p. 20-26, Mar. 1976.

STEIN, M.; GROVER, B.; HENNINGSEN, M. Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: analysis of mathematics tasks used in reform classroom. **American Education Research Journal**, Washington, v. 33, n. 2, p. 455-488, June 1996.

STEVENS, F.; GRYMES, J. **Opportunity to learn**: Issues of equity for poor and minority students. Washington: National Center for Education Statistics, 1993.

SULLIVAN, P.; CLARKE, D.; CLARKE, B.; O'SHEA, H. Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. **PNA**, Granada, v. 4, n. 4, p. 133-142, jun. 2010.

TREFFERS, A.; GOFFREE, F. Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas program. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 9^{th}, 1985, Utrecht. **Proceedings...** Utrecht: Streefland, L. (Ed.). PME, 1985. p. 97-121. v. 2. Solo disponible para miembros del PME en: <http://igpme.org/index.php/publications>. Acceso en: 14 nov. 2013

ZAKARYAN, D. **Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. Un estudio de casos**. 2011. 446f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Huelva, Huelva, 2011.

Submetido em Junho de 2012.
Aprovado em Janeiro de 2013.

ANEXO 1: Dimensiones de las OTL

1 Foco Matemático (FM)

El foco matemático de un episodio se relaciona con los objetivos subyacentes a las acciones y a la toma de decisión del profesor. Puede haber más de un foco en un episodio, o incluso no haber ningún foco en un episodio. El Cuadro 2 recoge cada uno de los focos y su descripción.

Conceptual	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes
Procedural	El profesor enfatiza o promueve la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos
Structural	El profesor enfatiza o promueve los lazos o conexiones entre entes matemáticos diferentes: conceptos, propiedades etc.
Derivational	El profesor enfatiza o promueve el proceso de desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente
Efficiency	El profesor enfatiza o promueve la comprensión o adquisición por parte del alumno de procesos que desarrollan flexibilidad, elegancia o comparación crítica del trabajo
Problem solving	El profesor enfatiza o promueve la implicación de los estudiantes en la solución de tareas no triviales o no rutinarias
Reasoning	El profesor enfatiza o promueve el desarrollo y la articulación de justificaciones y argumentos por parte de los estudiantes

Cuadro 2 – Foco matemático
Fuente: los autores

2 Estrategias didácticas (ED)

Las estrategias didácticas se refieren a las estrategias de la enseñanza que los profesores usan para facilitar las capacidades de sus estudiantes de entender y usar matemáticas. Con la excepción de *participación*, que es un acto público explícito, todas las estrategias podrían ser vistas en contextos públicos (grupo clase) e individual. El Cuadro 3 recoge la descripción de cada una de las estrategias.

Activación de conocimiento previo	El profesor centra explícitamente la atención de los estudiantes en contenidos matemáticos tratados anteriormente, en forma del período de revisión, como preparación para las siguientes actividades.
Ejercitación de conocimiento previo	El profesor centra explícitamente la atención de los estudiantes en contenidos matemáticos tratados anteriormente, en forma del período de revisión, que no estén relacionados con las actividades que siguen.
Ejercitación de conocimiento previo	El profesor centra explícitamente la atención de los estudiantes en contenidos matemáticos tratados anteriormente, en forma del período de revisión, que no estén relacionados con las actividades que siguen.
Explicación	El profesor explica explícitamente una idea o solución. Esto puede incluir la demostración, narración explicita o modelos pedagógicos de alto nivel de pensamiento. En estos casos, el profesor es el informante con poca o ninguna entrada de los estudiantes.
Participación	El profesor compromete explícitamente a los estudiantes en un proceso de intercambio público de ideas, soluciones o respuestas. Esto puede incluir debates de grupo clase en los que el papel del profesor es de gerente en vez de explícito informante.
Exploración	El profesor compromete explícitamente a los estudiantes en una actividad, que no está dirigida por él, de la que una nueva idea matemática sobrentiende aparecerse. Normalmente, esta actividad podría ser una investigación o una secuencia de los problemas estructurados, pero en todos casos se espera que los estudiantes articulen sus conclusiones.
Entrenamiento	El profesor explícitamente ofrece consejos, indicaciones o información para facilitar la comprensión de sus habilidades o para realizar tareas o para corregir errores o malentendidos.
Evaluación	El profesor evalúa explícitamente o evalúa las respuestas de los estudiantes para determinar el logro general de la clase.
Motivación	El profesor, a través de las acciones, más allá de la mera personalidad, reacciona explícitamente a las actitudes, creencias o respuestas emocionales de los estudiantes hacia las matemáticas.
Cuestionamiento	El profesor explícitamente utiliza una secuencia de preguntas, tal vez socráticas, que conducen a los estudiantes a crear nuevas ideas matemáticas o aclarar o definir mejor las existentes.
Diferenciación	El profesor explícitamente intenta tratar a los estudiantes en modo diferente en términos del tipo de tareas o actividades, el tipo de materiales suministrados, y/o el tipo de resultado esperado, con el fin de que la instrucción sea adoptada óptimamente a las características y necesidades de los estudiantes.

Cuadro 3 – Estrategias didácticas
Fuente: los autores

En las tareas propuestas por el profesor, distinguiremos los diferentes grados de complejidad de las mismas por el tipo de *procesos cognitivos* que se activan en los estudiantes para llevarlas a cabo y *situaciones* y *contextos* en los cuales se plantean. El Cuadro 4 recoge los descriptores de tareas que nos interesa estudiar.

Procesos cognitivos (según los tres grupos)	
Reproducción	Reproducción del material practicado y realización de las operaciones rutinarias.
Conexión	Integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
Reflexión	Razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.
Situaciones	
Personal	Son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos (p.ej. cuando se pide representar gráficamente la altura de los pies por encima del suelo mientras se columpia).
Educativa/ profesional	Son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo (p.ej. cuando se plantea calcular la nota media de los exámenes en una asignatura determinada).
Pública	Son las que se refieren a la comunidad local o otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno (p.ej. un problema donde se pide calcular el interés que ofrece una cuenta bancaria).
Científica	Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático (p.ej. calcular el aumento absoluto y relativo de las emisiones de CO_2 de varios países, representadas mediante dos diagramas en porcentaje y en millones de toneladas).
Contexto	
Auténtico	Es el que se dirige directamente a la resolución del problema, aunque las preguntas de matemáticas no sean necesariamente verdaderas y reales (p.ej. la situación pública que ejemplificamos puede resultar parte de la experiencia del estudiante, por tanto presenta un contexto autentico o cuando los estudiantes cortan los tres ángulos de un triangulo de papel y al juntarlos comprueban que se forma un ángulo llano).
Hipotético	Es el que se presenta como pretexto para hacer prácticas de operaciones matemáticas (son las que encontramos frecuentemente en los libros de texto, p.ej. se dan hipotéticas dimensiones de un campo para la práctica del cálculo del área del rectángulo).

Cuadro 4 – Descriptores de tareas
Fuente: los autores