Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

Sierra Delgado, Tomás Ángel; Bosch Casabó, Marianna; Gascón Pérez, Josep
El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación
Boletim de Educação Matemática, vol. 27, núm. 47, diciembre, 2013, pp. 805-828
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 0103-636X

El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación*

Theoretical-technological Questioning of Mathematical Activity: the case of the multiplication algorithm

Tomás Ángel Sierra Delgado**
Marianna Bosch Casabó***
Josep Gascón Pérez****

Resumen

Este trabajo describe brevemente una dimensión de la actividad matemática, el *cuestionamiento tecnológico-teórico* de las técnicas matemáticas, que, a pesar de jugar un papel importante en la construcción del conocimiento matemático, está relativamente ausente en la matemática escolar. Esta dimensión contiene las cuestiones matemáticas que aparecen cuando se toman las propias técnicas como objeto de estudio. Lo utilizamos para evaluar la *economía, fiabilidad y dominio de validez* de algunas técnicas matemáticas escolares, lo que nos permite comparar su eficacia y flexibilizar su uso, centrándonos principalmente en el caso de dos algoritmos de la multiplicación. Proponemos el estudio de esta dimensión de la actividad matemática tanto en la matemática escolar como en el ámbito de la formación del profesorado.

---

* Investigación financiada por los proyectos EDU2012-39312-C03-01, EDU2012-39312-C03-02 y EDU2012-39312-C03-03 del Ministerio de Economía y Competitividad de España.
** Doctor por la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación en la UCM. Dirección postal: Facultad de Educación, c/Rector Royo Villanova, s/n, 28040 Madrid, España. *E-mail:* tomass@edu.ucm.es.
*** Doctora por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesora del Departamento de Estadística Aplicada de IQS School of Management de la Universidad Ramon Llull. Dirección postal: IQS School of Management, Via Augusta 390, 08017 Barcelona, España. *E-mail:* marianna.bosch@iqs.edu.
**** Doctor por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor del Departamento de Matemáticas de la UAB. Dirección postal: Facultad de Ciencias, Edificio C, Campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès, Barcelona), España. *E-mail:* gascon@mat.uab.cat.

Palabras Clave: Cuestionamiento Tecnológico-Teórico. Economía, Fiabilidad y Dominio de Validez de una Técnica. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Algoritmos de la Multiplicación.

Abstract

This papers briefly presents a dimension of mathematical activity, the *technological-theoretical* questioning of mathematical techniques, which plays an important role in the construction of mathematical knowledge, even if it is relatively absent from school mathematics. This dimension includes the mathematical questions that appear when techniques are taken as an object of study. We use it to evaluate the *economy, reliability* and *validity domain* of some mathematical techniques, especially two multiplication algorithms, in order to compare their efficiency and to make its use more flexible. We propose the study of this dimension of mathematical activity both in school mathematics and teachers' training.

Keywords: Technological-Theoretical Questioning. Economy, Reliability and Validity Domain of a Technique. Anthropological Theory of the Didactic. Multiplication Algorithms.

1 El cuestionamiento tecnológico-teórico de las técnicas matemáticas

La teoría antropológica de lo didáctico (en adelante, TAD) en la que se enmarca este trabajo se sustenta en un modelo epistemológico explícito de las matemáticas. En este modelo el saber matemático aparece organizado en dos niveles:

- El primero remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer* que, a su vez, se describe mediante dos componentes: los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian, y las *técnicas* o maneras de hacer sistemáticas y compartidas que se utilizan para abordarlos.
- El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamamos el *logos* (discurso razonado) o simplemente *saber,* y contiene el discurso matemático sobre la citada práctica. Este segundo nivel se estructura, de nuevo, en dos componentes: la *tecnología* o discurso matemático directamente relacionado con la práctica, encargado de hacer inteligibles las técnicas, describirlas, interpretarlas, justificar su funcionamiento y, en última instancia, fundamentar la producción de nuevas técnicas; y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados y permite fundamentar e

interpretar las descripciones y justificaciones tecnológicas a modo de justificación de segundo grado.

El hecho de descomponer la dimensión descriptiva, interpretativa y justificativa de la actividad en dos grados, la tecnología y la teoría, es un rasgo característico del modelo que propone la TAD. En cierto sentido, la teoría puede interpretarse como una *tecnología de la tecnología*. Aunque, obviamente, podrían introducirse un tercer o cuarto grados de justificación, la TAD postula que, en primera instancia, basta con dos para dar razón de los fenómenos didácticos, por lo menos en el estado actual de la ciencia didáctica. En esta modelización, el nivel de la teoría contiene un gran número de elementos implícitos que se suelen dar por sentado durante el desarrollo mismo de la actividad. Al unir los dos niveles de la actividad (*praxis* + *logos*) aparece la noción de *praxeología* matemática (en adelante PM), que constituye la noción básica del modelo epistemológico que propone la TAD. Los *tipos de tareas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teorías* son pues las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología matemática (CHEVALLARD, 1999).

La TAD postula que toda actividad matemática puede interpretarse como una actividad de estudio y producción de praxeologías con el objetivo de responder a ciertas cuestiones problemáticas. Esta actividad requiere que el estudiante (sea este un alumno, un profesor o un investigador) tenga acceso o, en su caso, construya ciertas técnicas matemáticas adecuadas y pueda utilizar, cuando lo requiera, un discurso matemático para interpretar, dar sentido y hacer evolucionar la práctica matemática. La actividad de *resolución de problemas* queda así integrada en el resto de los componentes de la praxeología y no puede separarse ni de las técnicas matemáticas de las que se dispone en una institución determinada ni del discurso tecnológico-teórico existente.

Esta integración de los componentes de una praxeología se refleja en el tipo de actividad de *estudio* y de *ayuda al estudio* de las matemáticas que propone la TAD (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997). En dicho modelo didáctico, tanto el *desarrollo de las técnicas* matemáticas como la *construcción del discurso matemático* que las justifica y permite construir nuevas técnicas se consideran actividades genuinamente matemáticas e inseparables de la actividad de *resolución de problemas*, por lo que deben formar parte de las responsabilidades compartidas entre todos los miembros de la comunidad de estudio.

En resumen, el modelo epistemológico-didáctico que propone la TAD, sin dejar de señalar el papel central de la actividad de resolución de tipos de problemas, enfatiza que dicha actividad no se lleva a cabo, necesariamente, a partir de unas técnicas matemáticas *dadas* y en el ámbito de una teoría matemática *predeterminada*. Por el contrario, la construcción de dichas técnicas y su desarrollo progresivo, así como la elaboración y utilización adecuada de un discurso *teórico* justificativo e interpretativo de la práctica matemática, forman parte esencial del trabajo de resolución de problemas. Incluso el *planteamiento* de nuevos problemas matemáticos depende en muchas ocasiones del cuestionamiento de las técnicas y del desarrollo de ciertos aspectos del discurso teórico[1]. En efecto, el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y a resolverlos, sino que pretende, además, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en *tipos* o *campos de problemas*. Para avanzar en su trabajo, el matemático necesita construir, desarrollar y caracterizar las *técnicas* que utiliza hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso, por lo que debe establecer las condiciones bajo las cuales las técnicas funcionan o dejan de ser aplicables y, en última instancia, construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder.

Resaltando esta importancia de las técnicas, Marianna Bosch y Josep Gascón (1994), en un trabajo sobre el papel del trabajo de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, afirman:

> Lo que es específico de la actividad matemática no es la mera resolución de problemas sino, como ya hemos dicho, la *producción de técnicas* de estudio de campos de problemas. Las técnicas a las que nos referimos son "técnicas" en el sentido general de "maneras de hacer" algo, abarcando desde las más algorítmicas y visibles (como el algoritmo de resolución de las ecuaciones de segundo grado) hasta las menos conscientes y explicitables (como las que se utilizan para modelizar matemáticamente cierto sistema dado o para demostrar cierta proposición). (BOSCH; GASCÓN, 1994, p. 315).

Aparece, así, una dimensión de la actividad matemática bastante desconocida en la matemática escolar (incluyendo la matemática universitaria), que denominamos *cuestionamiento tecnológico-teórico* de las técnicas

[1] Una descripción más detallada de este modelo se encuentra en (CHEVALLARD, 1999), (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997), (GASCON, 1998) y (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

matemáticas que se utilizan y que contiene todas las cuestiones problemáticas que aparecen cuando se toman las técnicas matemáticas como *objetos de estudio en sí mismas* en lugar de tratarlas como si estuvieran dadas de antemano, como si fueran transparentes y, por lo tanto, incuestionables, y como si la única actividad que pudiese llevarse a cabo con ellas fuera la de resolver problemas.

Actualmente, la *matemática escolar* se caracteriza porque el discurso matemático que explica, justifica e interpreta las técnicas, sean estas algorítmicas o no, no está integrado en la práctica matemática de los alumnos con el objetivo de hacerla más eficaz. A lo sumo, pueden aparecer (en determinados niveles educativos) justificaciones más o menos formales de las técnicas matemáticas, pero las cuestiones relativas a la interpretación de los resultados obtenidos, a las limitaciones de las técnicas, al alcance o ámbito de aplicabilidad de las mismas, y a su fiabilidad y economía están prácticamente ausentes en la matemática escolar. De hecho, *problematizar las técnicas* no forma parte de las responsabilidades matemáticas que el contrato didáctico asigna a los alumnos. Incluso podemos afirmar que esta responsabilidad matemática tampoco está asignada al profesor como tal profesor. En la actividad matemática escolar lo habitual es que todo esté preparado para que las técnicas *funcionen* siempre que se las requiera y para que no exista ningún conflicto entre las técnicas disponibles y las tareas matemáticas propuestas (FONSECA; BOSCH; GASCÓN, 2010).

El *cuestionamiento tecnológico-teórico*, al tomar las propias técnicas como objeto de estudio, transforma esta situación y, así, la resolución de problemas deja de ser el objetivo único de la actividad matemática. En efecto, cuando las cuestiones que constituyen dicho estudio se integran en la actividad matemática, los problemas matemáticos pueden tomarse como un *medio* para analizar la *economía*, la *eficacia*, la *fiabilidad* y el *ámbito de aplicabilidad* de las técnicas matemáticas (cuyo estudio pasa, así, a constituir un objetivo importante de la actividad matemática). Además, pueden utilizarse problemas cuya solución es ya conocida porque, en este caso, el objetivo es indagar las características de las técnicas matemáticas objeto de estudio.

2 El cuestionamiento tecnológico-teórico y la rigidez de las matemáticas escolares

En múltiples trabajos desarrollados en el ámbito de la TAD se ha puesto de manifiesto la relación entre la ausencia de diferentes elementos del cuestionamiento tecnológico-teórico y ciertos aspectos de la rigidez, la atomización y la desarticulación de las organizaciones matemáticas escolares (BOSCH; GASCÓN, 1994; FONSECA; GASCÓN, 2003; BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004; BOSCH et al., 2006; FONSECA; BOSCH; GASCÓN, 2010). En este apartado mostramos y analizamos, de forma breve, dos ejemplos de dicha relación.

2.1 La matemática escolar en torno a la derivación de funciones en Secundaria

En el trabajo de Fonseca y Gascón (2003) se muestra que la matemática escolar en torno a la derivación de funciones, tal como aparece en la enseñanza secundaria española, no puede considerarse como una única praxeología matemática *puntual*, estructurada en torno a un único tipo de problemas, aunque las técnicas y tareas que la componen suelan describirse mediante un enunciado formalmente común: *calcular la derivada de una función*. Además, dado que las diferentes técnicas de derivación que contiene se presentan bastante independientes entre sí y, sobre todo, no existe un discurso tecnológico-teórico unificador que tenga una incidencia efectiva sobre el desarrollo de la práctica matemática, esta praxeología tampoco puede considerarse como *local*. Podríamos decir que se trata más bien de una *amalgama de praxeologías puntuales no integradas y poco desarrolladas*.

Mostraremos a continuación, en la línea del trabajo citado, algunos de los aspectos de la rigidez y atomización de dicha praxeología y la relación entre dicha rigidez y la ausencia de determinados elementos del cuestionamiento tecnológico-teórico que vive actualmente en la enseñanza secundaria española.

En primer lugar, dado que en la enseñanza secundaria no se cuestiona la *interpretación del resultado* que se obtiene al aplicar una técnica de derivación ni, mucho menos, el *proceso* mediante el cual se obtiene dicho resultado, suele disponerse únicamente de una interpretación muy rígida (y puntual) de la derivada como la *pendiente de la recta tangente*. Muy raramente se interpreta la derivada como la *variación de la función* y, en consecuencia, no se suele plantear la posibilidad de utilizar ecuaciones en las que intervenga la derivada de una función para modelizar globalmente situaciones matemáticas o extramatemáticas. En particular, no se trabaja sistemáticamente la interpretación de la derivada como límite de la *tasa de variación media* (en situaciones mucho más generales que la clásica del paso de la velocidad media a la velocidad instantánea).

En segundo lugar, debido a que nunca se cuestiona ni la *economía* ni la *fiabilidad* de las técnicas de derivación, aparece una fuerte rigidez en el uso de las técnicas de derivación incluso en aquellos casos en que los estudiantes disponen, efectivamente, de técnicas alternativas más económicas y más fiables. Así, cuando una función se expresa en forma de fracción como, por ejemplo: $f(x) = 5/x$ y $g(x) = x/7$, la inmensa mayoría de alumnos de Secundaria tienden a utilizar la técnica de derivación de un cociente de funciones a pesar de disponer, en cada caso, de técnicas más económicas (la técnica de derivación de una función potencial en el primer caso y la regla de derivación del producto de una constante por una función en el segundo caso). Esta rigidez (y las consecuencias didácticas que comporta) puede ser interpretada como una consecuencia de la *ausencia de un cuestionamiento tecnológico-teórico*, es decir, de una falta de estudio y comparación de la *eficacia*, la *pertinencia* y el *coste* de diferentes técnicas útiles para llevar a cabo una tarea matemática concreta.

Finalmente, uno de los aspectos del cuestionamiento tecnológico-teórico más claramente ausente en las organizaciones matemáticas escolares es el que hace referencia a la posibilidad de intercambiar los datos y las incógnitas de un problema y la correspondiente *inversión de la técnica matemática*. En el caso de las técnicas de derivación, la ausencia escolar de este aspecto del cuestionamiento comporta que se separen las técnicas de derivación de las técnicas útiles para *calcular primitivas*. El hecho de que no se utilice la práctica en las técnicas del cálculo de primitivas para flexibilizar y relacionar entre sí las técnicas de derivación, contribuye a que la actividad matemática en torno a la derivación de funciones en Secundaria se mantenga *rígida* (poco flexible) y *atomizada* en tareas y técnicas relativamente puntuales y aisladas.

2.2 La matemática escolar en torno a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

En la enseñanza secundaria, las técnicas más habituales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales no suelen tomarse como objeto de estudio en sí mismas, por lo que suelen utilizarse de modo *rígido* y *aislado*. En particular, no se analizan las *limitaciones* que presentan a medida que aumenta el número de ecuaciones e incógnitas y a medida que los coeficientes del sistema dejan de ser números enteros de valor absoluto *pequeño*. Nunca se comparan dos técnicas alternativas en base a su economía, ni se relacionan con otras técnicas para dar origen a técnicas compuestas con un *mayor dominio de aplicabilidad,* y tampoco se propone, de manera sistemática, realizar la tarea inversa de una tarea dada (por ejemplo para hallar un sistema de ecuaciones que tenga un conjunto dado de soluciones). Al igual que en el caso de la derivación, la matemática escolar en torno a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se estructura en una *amalgama de praxeologías puntuales no integradas y poco desarrolladas*.

Se puede mostrar que, en general, la posibilidad de flexibilizar e integrar, al menos parcialmente, estas praxeologías en torno a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no requiere un gran cambio conceptual o teórico que alejaría las condiciones de desarrollo de la actividad del nivel de enseñanza considerado. Por ejemplo, el uso de la conocida como *regla del pivote* y sus potenciales desarrollos como técnica básica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales permite mejorar tanto la economía como la fiabilidad de la técnica de resolución de ecuaciones, por lo menos cuando esta se resuelve *a mano* (COMPTA et al., 1990; XAMBÓ, 1994). En el caso en que el sistema de ecuaciones tenga más de tres ecuaciones con tres incógnitas, y los coeficientes sean números con varios decimales, lo que es habitual en problemas elementales de modelización, como cuando se modeliza un sistema económico con más de tres industrias mediante el *modelo de Leontiev***,** el método de Gauss, técnica dominante en los libros de texto basada en la triangulación de la matriz del sistema mediante transformaciones elementales, presenta limitaciones prácticas importantes. Dichas limitaciones se superan, en gran medida, mediante la utilización de la citada regla del pivote con ayuda de una simple calculadora numérica. Además, si tomamos la regla del pivote como objeto de estudio, esto es, si analizamos cómo se construye con dicha técnica el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales dado (o, en su caso, cómo se determina que es incompatible), veremos que es posible utilizarla también para definir el rango de una matriz de forma muy económica (COMPTA et al., 1990, p. 29) e incluso para realizar la tarea inversa que consiste en partir del conjunto de soluciones de un sistema para buscar dicho sistema. Así, por ejemplo, si se trata de buscar un sistema de ecuaciones cuyas soluciones vienen dadas mediante la ecuación vectorial $(x, y, z, t) = (2, 0, 3, 0) + m\,(3, 1, 2, 0) + n\,(1, 0, 2, 1)$, basta con expresar este conjunto de soluciones como un sistema de ecuaciones lineales cuyas variables sean los parámetros m y n, y aplicar la regla del pivote para eliminar dichos parámetros (COMPTA et al., 1990, p. 32-35).

3 Comparación de dos algoritmos de la multiplicación

Postulamos que, más allá de los ejemplos presentados, la integración explícita del cuestionamiento tecnológico-teórico permite flexibilizar la actividad matemática que es posible llevar a cabo en las instituciones escolares y, en consecuencia, puede incidir favorablemente sobre determinados fenómenos didácticos no deseados.

En este apartado vamos a responder con cierto detalle al cuestionamiento tecnológico-teórico de dos algoritmos de la multiplicación de números naturales. Este análisis debería completarse con el cuestionamiento de los tipos de tareas problemáticas que forman parte de la organización matemática escolar en torno a los números naturales (CARPENTER; MOSER, 1982; PUIG; CERDÁN, 1988; VERGNAUD, 1990; 1991; ERMEL, 1995; 1997; MAZA, 1989; 1991a; 1991b; 1991c).

Nos planteamos la siguiente cuestión *tecnológica* general:

Dadas dos técnicas algorítmicas de cálculo correspondientes a una misma operación aritmética, ¿qué criterios podemos utilizar para determinar cuál de las dos es más eficaz, económica y fiable?

Nos ceñiremos al caso de la multiplicación de números naturales, y nos limitaremos a describir, justificar y evaluar dos técnicas algorítmicas concretas: la más empleada en la institución de Enseñanza Primaria (la técnica *clásica*) y la técnica *per gelosia*, denominada así por las ventanas de celosía o de enrejado, a través de las cuales la luz pasa en diagonal y permiten ver sin ser visto. La expresión proviene de Leonardo de Pisa (también llamado Fibonacci) que la enseñó en Europa entre los siglos XII y XIII, habiéndola tomado de los árabes que, a su vez, la habían adquirido posiblemente de los hindúes. Dado que fue utilizada por los antiguos matemáticos griegos, también se conoce como la *multiplicación a la griega*.

3.1 El algoritmo clásico de la multiplicación

Recordemos rápidamente este algoritmo, que es muy habitual en la enseñanza primaria. Queremos, por ejemplo, realizar el cálculo de 2745 × 389. Para ello, se colocan los dos factores uno debajo del otro alineados a la derecha. Se llama al primer número (en este caso, 2745) multiplicando y al segundo (en este caso, 389) multiplicador. Una vez obtenidos los productos parciales de cada cifra del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando, se suman y se obtiene el resultado final tal como indica el esquema de la figura 1.

```
          2  7  4  5
  ×          3  8  9
--------------------
       2  4  7  0  5
    2 1  9  6  0
    8 2  3  5
--------------------
  1 0 6  7  8  0  5
```

Figura 1- Técnica clásica

3.2 La técnica per gelosia

Si queremos realizar el mismo cálculo con la técnica *per gelosia*, se construye una tabla con tantas columnas como cifras tenga el multiplicando y tantas filas como cifras tenga el multiplicador. Se coloca el multiplicando en la parte superior del cuadro (ver figura 2), de modo que la cifra de las unidades coincida con la primera columna de la derecha, la cifra de las decenas con la segunda columna y así sucesivamente. El multiplicador se coloca en el lateral derecho de modo que la cifra de las unidades coincida con la última fila, la cifra de las decenas con la penúltima fila, y así sucesivamente. A continuación, se multiplica cada cifra de un factor por cada cifra del otro factor y el resultado se coloca en el lugar de la fila y columna correspondientes. Cada celda de la matriz está dividida en dos, la de la izquierda-arriba para las decenas y la de la derecha-abajo para las unidades. Una vez relleno todo el cuadro se obtiene el resultado de la multiplicación sumando los números de cada diagonal, ya que cada diagonal corresponde a una cierta potencia de la base $n = 10$. Así, la primera diagonal de la derecha corresponde a las unidades, la siguiente a las decenas, y así sucesivamente.

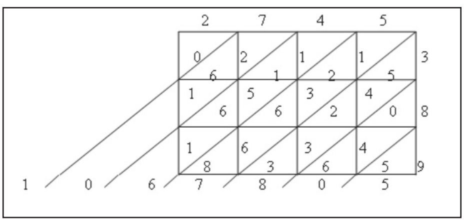

Figura 2 - Técnica *per gelosia*

Vemos que esta técnica de multiplicar permite realizar los productos parciales en cualquier orden, desembocando siempre en una matriz que estructura la organización de los cálculos, lo que reduce enormemente el peligro de cometer errores. En un estudio realizado por la asociación francesa de profesores de matemáticas (APMEP, 1976), se señala que hay cuatro razones por las que esta técnica es importante: no se impone ningún orden en la realización de los cálculos parciales; la memoria interviene poco, el ejecutante se puede parar en el transcurso de su realización y posteriormente continuar los cálculos sin tener que volver a empezar; los errores son muy fáciles de detectar; al contrario de lo que ocurre con la técnica clásica, no hay *llevadas* que memorizar (salvo en la suma final), lo que disminuye la probabilidad de cometer errores.

3.3 Justificación de ambas técnicas

Los dos algoritmos propuestos están basados en la escritura decimal de los factores, su descomposición aditiva y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Así, si queremos efectuar el producto 2745 x 389, el algoritmo clásico se basa en el uso implícito las descomposiciones siguientes, aunque la disposición de los cálculos no permita dar cuenta de esta justificación:

$2745 \times 389 = (2000 + 700 + 40 + 5) \times (300 + 80 + 9) =$

$= [9 \times (2000 + 700 + 40 + 5)] + [80 \times (2000 + 700 + 40 + 5)] + [300 \times (2000 + 700 + 40 +5)]=$

$= 24705 + 219600 + 823500 = 1067805.$

Notemos, aquí, que los pasos intermedios del algoritmo requieren la efectuación de operaciones que combinan a la vez la multiplicación y las sumas *con llevada*. Esto no sucede en el caso del algoritmo *per gelosia*, dado que los pasos realizados suponen mantener explícito un paso más de la descomposición:

$2745 \times 389 = (2000 + 700 + 40 + 5) \times(300 + 80 + 9) =$

$= [2000 \times (300 + 80 + 9)] + [700 \times (300 + 80 + 9)] + [40 \times (300 + 80 + 9)] + [5 \times (300 + 80 + +9)]$

$= 600000 + 160000 + 18000 + 210000 + 56000 + 6300 + 12000 + 3200 + 360 + 1500 + 400 + +45$

$= 600000 + (160000 + 210000) + (18000 + 56000 + 12000) + (6300 + 3200 + 1500) + (360 + +400) + 45 = 1067805.$

2000	700	40	5	
600000	210000	12000	1500	300
160000	56000	3200	400	80
18000	6300	360	45	9

Figura 3 - Tabla de doble entrada

Esta segunda descomposición puede dar lugar a la disposición en tabla de doble entrada de la Figura 3.

En la disposición del algoritmo *per gelosia* (Figura 2), las cifras significativas de cada subproducto son las únicas que aparecen dentro de cada celda que, a su vez, está dividida en dos, para poder poner en la parte derecha la cifra o coeficiente que multiplica a la potencia de menor valor y en la parte izquierda la cifra o coeficiente que multiplica a la potencia de mayor valor. De este modo, en cada una de las celdillas en que está descompuesta cada celda de la Figura 2, aparece una cifra que es el coeficiente de una potencia de 10. Así, las cifras que aparecen en cada una de las diagonales secundarias son los coeficientes que multiplican a la misma potencia de 10 que, por tanto, deben sumarse. Notemos que, si los subproductos se escriben todos para evitar las *llevadas*, al igual que en caso del algoritmo clásico, la suma final del algoritmo *per gelosia* también es una suma *con llevada*.

4 Economía, la fiabilidad y el dominio de validez de los algoritmos

Cuando nos planteamos inicialmente la cuestión de la economía, fiabilidad y dominio de validez de los dos algoritmos considerados, no encontramos apenas referencias bibliográficas sobre el tema. En Campbell, Rowan y Suárez (1998) se hace una propuesta de criterios para evaluar algoritmos inventados por los alumnos. Estos autores proponen tomar los siguientes criterios:

- La *eficiencia*, indicando que un algoritmo es más eficiente si es más económico en símbolos utilizados y en tiempo de ejecución.
- La *validez matemática*, es decir, si el resultado que permite obtener al aplicarlo a una tarea determinada es matemáticamente válido.
- Si el algoritmo es *generalizable* o no a todos los problemas del mismo tipo que se han resuelto. Aquí, creemos que los autores se refieren a lo

que nosotros llamamos *dominio de validez o alcance* del algoritmo, esto es al ámbito o tipo de problemas al que dicho algoritmo puede aplicarse de manera efectiva.

Por otro lado, Guy Brousseau (2007) propone analizar las propiedades *ergonómicas* de las técnicas algorítmicas tradicionales y considera que:

> El carácter esencial es la *fiabilidad* del resultado. El papel de un cálculo es asegurar su resultado y permitir su control. El objetivo del aprendizaje es permitir al ejecutante tener confianza suficiente en su trabajo. La velocidad de ejecución es solo un factor subalterno. La fiabilidad depende de diferentes factores, algunos dependen del que lleva a cabo la técnica (*el aprendizaje*, *la habilidad*, *la fatiga*, etc.), otros dependen del mismo procedimiento (*la complejidad del algoritmo*, *el número de valores que mantienen en memoria a corto plazo simultáneamente*, *la importancia y disponibilidad de los repertorios exigidos*, *las posibilidades de control*) y otros, por fin, de varios a la vez: la *dificultad* de un trabajo hace referencia a la adaptación de la tarea a las posibilidades del ejecutante (BROUSSEAU, 2007, p. 3).

Según Brousseau este estudio ergonómico puede ser realizado de modo empírico y de modo teórico. En Brousseau (1973) encontramos un estudio experimental sobre las técnicas *clásica* y *per gelosia* de la multiplicación y en Brousseau (2007, 2010) se completa este estudio con un análisis teórico de ambas técnicas. Estos análisis persiguen el establecimiento de técnicas ergonómicas que permitan disminuir las dificultades de ejecución, maximizar la fiabilidad del cálculo y, al mismo tiempo, aliviar el coste del aprendizaje disminuyendo los repertorios y suavizando las condiciones de adquisición.

El objetivo de nuestro trabajo es completar los análisis llevados a cabo por G. Brousseau mediante la elaboración de *criterios explícitos que cuantifiquen el coste y la fiabilidad de cada algoritmo,* lo que nos permitirá compararlos de manera objetiva. Más allá del ejemplo que desarrollaremos, pretendemos mostrar que los citados criterios de comparación constituyen un aspecto básico del cuestionamiento tecnológico-teórico de las técnicas, especialmente las algorítmicas.

En general, el papel del cuestionamiento tecnológico-teórico consiste en posibilitar el *desarrollo de las técnicas* mediante el estudio de sus limitaciones y de la explicitación de las modificaciones que requieren para resolver problemas parecidos, aunque distintos, de los prototípicos. Este desarrollo de las técnicas origina, así, la ampliación del tipo de problemas que pueden plantearse y abordarse y provoca la emergencia de nuevas necesidades tecnológico-teóricas para justificar e interpretar las nuevas técnicas, por lo que puede decirse que el cuestionamiento tecnológico-teórico es uno de los motores de la *flexibilización de la práctica matemática* y de la construcción progresiva de nuevas praxeologías matemáticas.

En lo que sigue nos limitamos a responder a las cuestiones que forman parte del aspecto más básico del cuestionamiento tecnológico-teórico de cualquier técnica matemática, sea esta algorítmica o no. Se trata del establecimiento de criterios para analizar su *economía,* su *fiabilidad* y su *alcance o dominio de validez*. Es evidente que en el caso de técnicas matemáticas no algorítmicas, el establecimiento de los citados criterios, así como su puesta en marcha, será más compleja y menos *objetiva*.

Nosotros nos centramos, aquí, en los dos algoritmos de la multiplicación descritos anteriormente y utilizamos los criterios que diseñamos para *comparar ambos algoritmos*. Para la elaboración de estos criterios, hemos tomado como referencia, además de los artículos citados de Brousseau (1973, 2007, 2010) y de Campbell, Rowan y Suárez (1998), los análisis de algoritmos que se proponen en Horowitz, Sahni y Rajasecaran (1998) y en Duch (2007).

4.1 Criterios de economía, fiabilidad y dominio de validez de un algoritmo

Proponemos considerar los siguientes criterios:

(a) Economía en escrituras: número de símbolos escritos necesarios para realizar dicho algoritmo en el peor caso posible.

(b) Fiabilidad: se compone de cuatro criterios:

- número de operaciones mentales internas que es necesario realizar en el peor caso posible;
- número de operaciones que es necesario memorizar en ese caso;
- robustez de la técnica frente a posibles paradas en su ejecución (independencia, no encadenamiento, entre los pasos a seguir para poner en práctica el algoritmo);
- grado en que la justificación de la técnica interviene explícitamente en la propia técnica (claridad conceptual del algoritmo).

(c) *Dominio de validez:* se compone de tres criterios

- facilidad para adaptarlo a sistemas numéricos cada vez más amplios (decimales finitos, racionales y reales);

- facilidad para adaptarlo a problemas en las que aparezcan números *grandes*;
- posibilidad de adaptarlo, con *pequeñas* modificaciones, a otros tipos de problemas.

Con el fin de mostrar la validez y utilidad de los criterios anteriores vamos a aplicarlos a los dos algoritmos descritos de la multiplicación.

4.2 Aplicación de los criterios a la técnica *clásica*

Supongamos que queremos multiplicar dos números naturales $a=a_1a_2\ldots a_p$ y $b = b_1b_2\ldots b_q$ utilizando para ello el algoritmo *clásico*.

Si aplicamos el *criterio de economía*, diremos que necesitaremos escribir: primero los p símbolos de a y los q símbolos de b, seguido de un segmento de recta para separar los factores de los productos parciales. A continuación escribiremos: en la primera fila debajo del segmento, en el peor de los casos, $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_q por cada una de las cifras de a; en la segunda fila, también escribiremos $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_{q-1} por cada una de las cifras de a, y así hasta la fila q donde escribiremos los $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_1 por cada una de las cifras de a. Para terminar se vuelve a trazar otro segmento de recta para separar los productos parciales del resultado final, y se escriben, en el peor de los casos, $(p + q)$ símbolos o cifras. Por tanto, si hacemos el recuento, tendremos que en total es necesario escribir, en el peor de los casos, $(p + 1) \times q + 2\,(p + q)$ símbolos o cifras y dos segmentos de recta.

Aplicando el *primer criterio de fiabilidad*, diremos que para el cálculo $a_1a_2\ldots a_p \times b_1b_2\ldots b_q$ necesitaremos, en el peor de los casos, realizar $q \times (p - 1)$ memorizaciones y $q \times (p - 1)$ sumas internas, ya que cada producto $a_i \times b_j$ puede tener *llevadas* y, por ello, es necesario realizar mentalmente el cálculo de sumar las llevadas, salvo para la última cifra de a, ya que en este caso la llevada se escribe. Por tanto, necesitamos realizar $2 \times q \times (p - 1)$ operaciones mentales internas. Además al realizar todos los productos $a_i \times b_j$ se colocan en q filas (una por cada cifra de b). Cada fila es el resultado de multiplicar cada b_j por cada una de las cifras de a. Para obtener el producto de $a \times b$ necesitamos sumar todos los resultados parciales que aparecen en las q filas. En la adición de dichos productos parciales podemos considerar que, en el peor de los casos, se pueden presentar las llevadas en $(p + q - 2)$ casos, ya que el producto total $a \times b$ tendrá como máximo $(p + q)$ cifras y no puede haber llevadas ni en la cifra de las unidades, porque sólo hay una cifra, ni en la cifra de las unidades de mayor valor, porque sólo hay una cifra o porque coincide con las llevadas. Con lo que en este caso tendríamos que realizar $2 \times q \times (p - 1) + p + q - 2$ operaciones mentales internas.

Con respecto al *segundo criterio* será necesario memorizar los resultados de las tablas de sumar y multiplicar.

En referencia al *tercer criterio*, hay que señalar que en este algoritmo la realización de los productos $a_i \times b_j$ está encadenada y ligada para todos los productos $(a_i \times b_j)$ con j fijo e $i = 1, 2,\ldots, p$. Esto obliga a no perder el hilo de los cálculos de cada b_j por todos los a_i para $i = 1, 2,\ldots, p$.

Con respecto al *cuarto criterio*, podemos decir que, en la puesta en práctica de la técnica clásica no aparecen, de forma explícita, elementos tecnológico-teóricos que la justifiquen.

En relación al *alcance o dominio de validez*, podemos decir que la técnica clásica puede adaptarse fácilmente a los números reales en su expresión decimal, pues solo es necesario tener en cuenta el número total de cifras decimales que tienen ambos números porque la suma del número de cifras decimales de los factores será igual al número de cifras decimales del producto. Y en lo que respecta al uso de números *grandes*, el *dominio de validez* de la técnica clásica vendrá condicionada por el material disponible para llevar a cabo el algoritmo.

4.3 Aplicación de los criterios a la técnica *per gelosia*

Queremos multiplicar dos números naturales $a = a_1a_2\ldots a_p$ y $b = b_1b_2\ldots b_q$ utilizando para ello el algoritmo *per gelosia*.

Si aplicamos el *criterio de economía*, diremos que necesitaremos escribir primero los p símbolos de a y los q símbolos de b. En segundo lugar, trazaremos una tabla con $(p + 1)$ segmentos de recta paralelos y $(q + 1)$ segmentos de recta perpendiculares a los anteriores. En total $(p + q + 2)$ segmentos de recta. A continuación trazaremos $(p \times q)$ segmentos que son las diagonales de cada celda y rellenaremos la tabla con $2(p \times q)$ símbolos o cifras. Para terminar escribiremos, en el peor de los casos, los $(p + q)$ símbolos del resultado final. En resumen, si hacemos un recuento, necesitaremos escribir $2 (p \times q) + 2(p + q)$ símbolos o cifras y $(p + q + 2) + (p \times q)$ segmentos de recta.

Para aplicar el *primer criterio de fiabilidad*, diremos que tendremos que fabricar una tabla de p columnas y q filas e ir colocando cada uno de los productos $a_i \times b_j$ en la celda correspondiente a la fila j y la columna i. Después de realizar todos estos productos parciales en el orden que se desee, se pasa a sumar, en el peor de los casos, las $p + q$ diagonales. Entonces se pueden presentar en el peor de los casos $p + q - 2$ llevadas, pues la cifra de las unidades es única y lo mismo ocurre con la cifra de las unidades de mayor valor, ya que ésta o es única o es la misma llevada. Por tanto en este algoritmo se puede presentar a lo sumo $p + q - 2$ operaciones mentales internas.

El número de resultados que hay que memorizar (*segundo criterio*) es el mismo que en el caso del algoritmo *clásico*.

En lo que se refiere al *tercer criterio*, una característica importante de este algoritmo es que los productos parciales $a_i \times b_j$ pueden realizarse en cualquier orden, ya que no están encadenados unos con otros.

Con respecto al *cuarto criterio*, G. Brousseau (2007, p. 13) afirma que "permite conservar el sentido de la operación durante bastante tiempo, en el curso del aprendizaje inicial". Además, apoyándonos en las investigaciones realizadas por su equipo en la escuela Michelet (IREM DE BORDEAUX, 1985), diremos que aunque los elementos que la justifiquen no aparecen de forma explícita, se trata de un algoritmo que puede ser construido por alumnos, con sentido, como resultado de un cuestionamiento tecnológico-teórico de la práctica matemática.

En cuanto a los criterios de *alcance o dominio de validez,* la técnica *per gelosia* puede ser fácilmente utilizada en la multiplicación de expresiones decimales de números reales, pues, como se ve en la figura 4, la posición de la coma puede deducirse de forma automática a partir de su posición en los dos números que se multiplican. Así, por ejemplo, si queremos multiplicar 27,45 por 38,9 obtenemos lo siguiente:

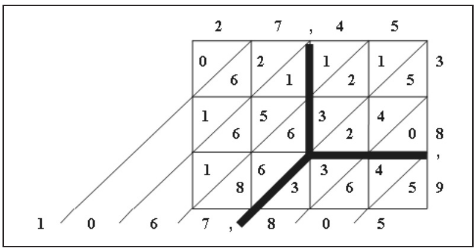

Figura 4 -Técnica *per gelosia* con números decimales.

En cuanto a las posibilidades de esta técnica para adaptarse al caso de números *grandes* o *muy grandes*, bastará dibujar un cuadro con tantas columnas como tiene uno de los dos factores y con tantas filas como tiene el otro factor. Pero, también podemos realizar una *modificación de la técnica* (a modo de desarrollo) con el objetivo de realizar la tarea de modo más económico. Veámoslo en el ejemplo siguiente:

$$34279205468597 \times 5967408$$

Para ello, separamos las cifras de tres en tres empezando por la derecha en ambos números. Así tendremos 34.279.205.468.597 × 5.967.408 y lo colocamos como en la siguiente figura:

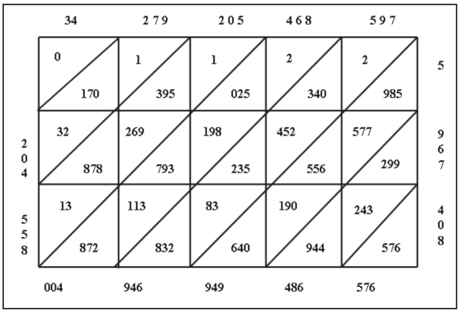

Figura 5 -Variación de la técnica *per gelosia* con números muy grandes

Llegando así al resultado:

$$34.279.205.468.597 \times 5.967.408 = 204.558.004.946.949.486.576$$

Una nueva ampliación del dominio de validez de la técnica, que también existe para la técnica clásica, aunque con *mayor coste*, es su uso para *multiplicar dos polinomios*, como se indica en la figura 6 para el caso del producto de $P(x) = -5x^4 + x^3 - 4x^2 - 7$ y $Q(x) = 3x^2 - 5x - 2$:

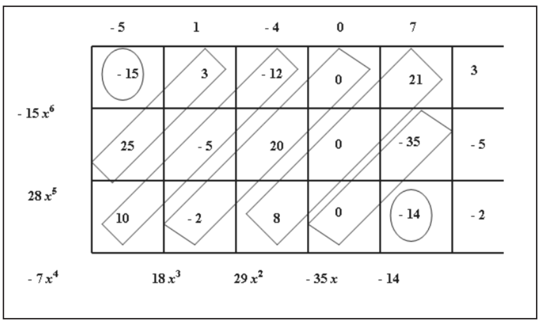

Figura 6 - Técnica *per gelosía* con polinomios

Se obtiene así el resultado $P(x) \times Q(x) = -15\,x^6 + 28\,x^5 - 7\,x^4 + 18\,x^3 + 29\,x^2 - 35\,x - 14$.

4.4 Balance de la aplicación de los criterios

En lo que se refiere a la *economía*, comparando el número de símbolos utilizados en ambas técnicas, en el peor de los casos, cuando disponemos de dos factores uno con p cifras y otro con q cifras, y donde EG = el número de símbolos utilizados en la técnica *per gelosia* y EC = el número de símbolos utilizados en la técnica *clásica*,

$$EG - EC = 2(p \times q + p + q) - [(p + 1) \times q + 2(p + q)] =$$
$$= 2pq + 2p + 2q - pq - q - 2p - 2q = pq - q = q\,(p - 1)$$

podemos decir entonces que la técnica *per gelosia* emplea $q(p - 1)$ símbolos más que la técnica *clásica*.

Por otro lado, en lo referente a la *fiabilidad*, comparando el número de operaciones mentales internas en ambas técnicas, en el peor de los casos, donde FC = número de operaciones mentales internas en la técnica *clásica* y FG = número de operaciones mentales internas en la técnica *per gelosia*

$$FC - FG = 2qp + p - q - 2 - (p + q - 2) =$$
$$= 2qp + p - q - 2 - p - q + 2 = 2qp + 2q = 2qp - 2q = 2\,q\,(p - 1)$$

entonces la técnica *clásica* emplea $2q(p - 1)$ operaciones mentales internas más que la técnica *per gelosia*.

Por lo tanto, estamos en condiciones de afirmar que, en el peor de los casos, la técnica *per gelosia* es más *fiable* que la técnica *clásica*, mientras que esta es más *económica* que aquella, siendo la diferencia en fiabilidad a favor de la técnica *per gelosia* mucho mayor que la diferencia de economía a favor de la técnica *clásica*. Además, la técnica *per gelosia* posee un *dominio de validez o alcance* mayor ya que permite adaptarse fácilmente tanto al cálculo con números *muy grandes* y con expresiones decimales como al producto de polinomios.

Podemos concluir, dada la importancia fundamental de la *fiabilidad*, que el algoritmo *per gelosia* es el más adecuado para ser utilizado como algoritmo estándar de cálculo escrito para la multiplicación por los alumnos de la Escuela Primaria. Este breve estudio justifica que, en la *Conferencia nacional francesa sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria obligatoria*, celebrada el día 13 de marzo de 2012, en Lyon (Francia), Guy Brousseau haya propuesto que se haga oficial la adopción de métodos de cálculo escrito *ergonómicos* para la escuela, proponiendo remplazar el método *clásico* por el *per gelosia* (BROUSSEAU, 2012, p. 83).

5 El papel del cuestionamiento tecnológico-teórico en la formación del profesorado

Asumiendo la importancia del *cuestionamiento tecnológico-teórico* como uno de los motores del desarrollo de la práctica matemática, consideramos que el análisis de la *economía, fiabilidad y alcance* (o *dominio de validez*) de las técnicas matemáticas constituyen una primera etapa de dicho cuestionamiento. Para finalizar, queremos enfatizar la importancia del estudio de dicha dimensión en la formación del profesorado de matemáticas y, más concretamente, como herramienta fundamental en manos de los profesores para llevar a cabo un *análisis matemático* (con intención didáctica) de los contenidos matemáticos a enseñar.

Postulamos que la formación matemático-didáctica del profesorado de matemáticas ha de incluir, más allá de las matemáticas a enseñar, los conocimientos matemáticos necesarios para *delimitar* adecuadamente, *interpretar*, *relacionar* los contenidos de la matemática a enseñar y, lo que es más importante, *explicitar su razón de ser*, esto es, las cuestiones que generan la necesidad de construir y estudiar dichos contenidos matemáticos y que, en consecuencia, le dan sentido (BOSCH; GASCÓN, 2009; 2010; RUIZ OLARRÍA; SIERRA, 2011; SIERRA; BOSCH; GASCÓN, 2011). Dichos conocimientos forman parte de las *matemáticas necesarias para la enseñanza de las matemáticas,* que no pueden separarse completamente de los conocimientos *didácticos* necesarios para la enseñanza. Entre estos conocimientos queremos destacar, aquí, los que forman parte de la dimensión de la actividad matemática que hemos denominado *cuestionamiento tecnológico-teórico de las técnicas matemáticas,* porque, como hemos dicho, se trata de conocimientos institucionalmente bastante *nuevos,* puesto que están relativamente ausentes tanto en el sistema de enseñanza en el que el profesor deberá ejercer su profesión como en las instituciones en las que los futuros profesores han recibido su formación matemático-didáctica previa.

Son cuestiones que, generalmente, no se formulan porque corresponden a prácticas matemáticas *transparentes*, que *siempre se han hecho así*. Además, como afectan directamente la dimensión técnica y menos valorada de la actividad, tampoco suelen ser objeto de grandes controversias. ¿Por qué se enseña el algoritmo clásico de la multiplicación a pesar de poderse demostrar, objetivamente, que el algoritmo *per gelosia* es mucho más fiable, mientras que el clásico es totalmente críptico para la mayoría de alumnos de primaria (e incluso algunos profesores)? ¿Cómo depende esta economía y fiabilidad del sistema de numeración utilizado? ¿Hasta qué punto se plantea la cuestión de decidir cuál es la mejor técnica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales a medida que aumenta la dimensión del sistema y se hacen más complejos los coeficientes? ¿Cómo varía la respuesta a esta pregunta cuando se integran las calculadoras y ordenadores al instrumental de trabajo?

Las respuestas a dichas cuestiones requieren, de manera imprescindible, de un estudio de las prácticas matemáticas que permitan cuestionar el discurso que justifica las técnicas habituales, explicitar la interpretación de los resultados que se obtienen con dichas técnicas, proponer prácticas alternativas y, en definitiva, integrar de forma sistemática en la actividad matemática escolar lo que hemos denominado el *cuestionamiento tecnológico-teórico.* La forma concreta de llevar a cabo dicha integración, tanto en la formación del profesorado como en la propia matemática escolar, es una cuestión que requiere de más investigaciones y que no podemos tratar en este trabajo.

Referencias

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC (APMEP). **Elem Math II. nº 16** : La multiplication des naturels à l'école élémentaire. 2.éd. París: APMEP, 1976.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage, v.19, n.1, p.77-124, 1999.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En: BRONNER, A.; et al. (Ed.). **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. Montpellier, Francia: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En: GONZÁLEZ, M. J.; et al. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática XIII.** Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2009. p. 89-113.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. **Enseñanza de las Ciencias,** Barcelona, v. 12, n. 3, p. 314-332, 1994.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCON, J. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 24, n. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOSCH, M.; GARCIA, F.J.; GASCON, J.; RUIZ HIGUERAS, L. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. **Educación Matemática**, México, v. 18, n. 2, p. 37-74, ago. 2006.

BROUSSEAU, G. Suggestions d'un didacticien au CS de la conférence. En: MERCIER, A.; JOST, R. (Eds.). **Actes des auditions du Comité Scientifique de la Conference nationale sur l'enseignement des mathematiques a l'ecole primaire et au college**. Lyon: Educmath, mar. 2012. p. 81-86. Disponible en: <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/manifestations/dossier-manifestations/conference-nationale>. Acceso en: 12 nov. 2012.

BROUSSEAU, G. Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. **Grand N,** Grenoble, v. 85, p.13-41, 2010.

BROUSSEAU, G. **Le calcul « a la plume » des multiplications et des divisions elementaires**. Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, 2007. Disponible en: <http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf >. Acceso en: 17 mar. 2012.

BROUSSEAU, G. Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels ? **Cahier de l'enseignement élémentaire**, Bordeaux, IREM de Bordeaux, v. 13, p. 195-237, 1973. Disponible en: <http://math.unipa.it/~grim/brousseau_xnaturali_03.pdf >. Acceso en: 17 mar. 2012.

CAMPBELL, P.; ROWAN, T.; SUÁREZ, A. What Criteria for Student-Invented Algorithms? In: MORROW, L. J.; KENNEY, M. J. (Eds.). **The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics**, Reston, VA: NCTM, 1998. p. 49-55.

CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M. The development of addition and subtraction problem solving. In CARPENTER, T. P. et al. (Eds.). **Addition and Subtraction:** A cognitive perspective, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1982. p. 10-24.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. ; BOSCH, M.; GASCON, J. **Estudiar matemáticas.** El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE UB-Horsori, 1997.

COMPTA, A.; GASCÓN, J.; LAMARCA, J. M.; PETIT, M.; REVENTÓS, A. **Matemàtiques I (COU)**. Barcelona: Barcanova, 1990.

DUCH, A. **Análisis de Algoritmos**. Barcelona, Universidad Politécnica de Barcelona, 2007. Disponible en: <http://www.lsi.upc.edu/~duch/home/duch/analisis.pdf>. Acceso en: 19 oct. 2012.

EQUIPE DE RECHERCHE MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE (ERMEL). **Apprentissages numériques CE2**. París: Hatier, 1995.

EQUIPE DE RECHERCHE MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE (ERMEL). **Apprentissages numériques CM1**. París: Hatier, 1997.

FONSECA, C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. **Educación Matemática**, México, v. 22, n.2, p. 5-34, ago. 2010.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria. En: MURILLO, J.; et al. (Ed.). **Actas del Sexto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Logroño: Universidad de La Rioja, 2003. p. 205-244.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 18, n. 1, p. 7-34, 1998.

HOROWITZ, E.; SAHNI, S.; RAJASECARAN, S. **Computer algorithms**. New York: Computer Science Press, 1998.

IREM DE BORDEAUX. **La multiplication au $\mathbf{CE_1}$**. Bordeaux: IREM de Bordeaux, 1985.

MAZA, C. **Multiplicar y dividir**. Madrid: Visor, 1991a.

MAZA, C. **Enseñanza de la suma y la resta**. Madrid: Síntesis, 1991b.

MAZA, C. **Enseñanza de la multiplicación y división**. Madrid: Síntesis, 1991c.

MAZA, C. **Sumar y restar**. Madrid: Visor, 1989.

PUIG, L.; CERDÁN, F. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1988.

RUIZ OLARRÍA, A.; SIERRA DELGADO, T. A. La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. En: BOSCH, M. et al. (Ed.). **Un panorama de la TAD.** Barcelona: CRM Documents, 2011. p. 465-483, v. 10.

SIERRA DELGADO T. A.; BOSCH CASABÓ, M.; GASCÓN PÉREZ J. La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». **Revista de Educación**, Madrid, v.357, p. 231-256, ene-abr. 2011.

VERGNAUD, G. **El niño, la matemática y la realidad**. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage, v.10, n.2-3, p. 133-170, 1990.

XAMBÓ, S. **Álgebra lineal y geometrías lineales**. Barcelona: Eunibar, 1994.

Submetido em Maio de 2012.
Aprovado em Outubro de 2012.