Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho
Brasil

Callejo, María Luz; Zapatera, Alberto

Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria

Boletim de Educação Matemática, vol. 28, núm. 48, abril, 2014, pp. 64-88
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria

Secondary School Students' Flexibility when Solving Problems of Recognition of Lineal Patterns

María Luz Callejo[*]

Alberto Zapatera[**]

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar la flexibilidad, entendida como habilidad para modificar la estrategia de resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea, de estudiantes de educación secundaria (12-16 años) en problemas de reconocimiento de patrones con varios apartados. Se utiliza una metodología de tipo cualitativo analizando las respuestas de los estudiantes en base a dos criterios: corrección de las respuestas y estrategias de resolución, y agrupando las que presentan características semejantes. Los resultados indican tres perfiles de estudiantes en relación a la flexibilidad en el uso de estrategias y el éxito alcanzado. El primero agrupa a los estudiantes que usan sólo la estrategia recursiva; la mayor parte de ellos se bloquea al aumentar la demanda cognitiva de la tarea; predominan los estudiantes de 12-13 años. El segundo perfil corresponde a los que cambian de una estrategia recursiva a una aproximación proporcional dando un resultado incorrecto; es más frecuente en los estudiantes de 13-14 años. Finalmente, el tercer perfil agrupa a los estudiantes que al aumentar la demanda cognitiva de la tarea cambian con éxito de una estrategia recursiva a una funcional; su frecuencia aumenta con la edad. Se concluye que la flexibilidad necesaria para identificar patrones cuando se incrementa la demanda de la tarea está relacionada con los conocimientos de los estudiantes y con el control y la regulación del proceso de resolución. Por otra parte, los estudiantes más jóvenes manifestaron menor grado de flexibilidad que los más mayores.

Palabras-clave: Flexibilidad. Generalización. Patrones Lineales.

Abstract

The aim of this study is to characterize the flexibility of secondary school students (12-16 years old) in problems that involve the recognition of patterns. Flexibility is understood as the ability to modify the strategy used in solving a problem when the cognitive demand of the task is changed. The methodology used is qualitative analyzing students' answers taking into account two criteria: the correction of the answers and the strategies used and grouping those with similar characteristics. Results indicate three profiles of students in relation to flexibility in the use of strategies and success. The first group is characterized by students who use only a recursive strategy; most of them are blocked when the cognitive demand of the task increases. This group is composed predominantly of students of 12-13 years old. The second profile corresponds to students who change from a recursive strategy to a proportional approximation giving an incorrect result. This is more common in 13-14 year old students. Finally, the third profile is characterized by students who successfully change from a functional to a recursive strategy when the cognitive demand of the task increases. It is more common in older students. We conclude that flexibility to identify patterns is related to the knowledge of the students and to the control and

[*] Doctora en Didáctica de Las Disciplinas, opción Matemáticas, por la Universidad Paris 7. Profesora Titular de Didáctica de la Matemática, Universidad de Alicante (UA), San Vicente del Raspeig, Alicante, España. Dirección postal: Carretera San Vicente del Raspeig s/n – 03690, San Vicente del Raspeig, Alicante, España. *E-mail:* luz.callejo@ua.es.

[**] Diploma de Estudios Avanzados en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Alicante (UA). Profesor colaborador de Didáctica de la Matemática, Universidad CEU Cardenal Herrera (UCH), Elche, Alicante, España. Dirección postal: Carmelitas, 3 – 03203, Elche, Alicante, España. *E-mail:* alberto.zapatera@uch.ceu.es

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

regulation of the problem-solving process when the cognitive demand of the task increases. Furthermore, younger students showed less flexibility than the older ones.

Keywords: Flexibility. Generalization. Lineal Patterns.

1 Introducción

La resolución de problemas es el corazón de la actividad matemática, y aprender a resolver problemas se considera un objetivo importante de la educación matemática en todos los niveles educativos. Diversos estudios han puesto de manifiesto la complejidad del proceso de resolución de problemas, destacando los elementos que intervienen (base de conocimientos, estrategias heurísticas, control y sistemas de creencias (SCHOENFELD, 1992), la gestión de estos elementos y del proceso (GAROFALO; LESTER, 1985), la necesidad de usar, al mismo tiempo, la lógica y la creatividad (fluidez, flexibilidad de pensamiento y originalidad) (SILVER, 1997) y la relación entre todos estos aspectos.

La investigación que se expone se centra en la flexibilidad de los estudiantes en el uso de estrategias heurísticas cuando resuelven problemas de *generalización lineal*. El objetivo es caracterizar la flexibilidad, entendida como la modificación de las estrategias empleadas en la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea, en estudiantes de educación secundaria obligatoria (12-16 años).

1.1 Flexibilidad

La flexibilidad es un constructo que ha sido estudiado en el campo de la cognición, la psicología del desarrollo (DEMETRIOU, 2004; KREMS 1995) y la educación matemática (KRUTETSKII, 1976; HEINZE; STAR; VERSCHAFFEL, 2009) y que tiene diversas acepciones.

Demetriou (2004) entiende la flexibilidad como la cantidad de variaciones que puede introducir una persona en los conceptos y operaciones mentales. Krems (1995, p. 202) define la flexibilidad cognitiva como “la habilidad de una persona para modificar la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea”.

Krutetskii (1976) destaca como componentes importantes de la habilidad matemática de resolver problemas la capacidad de romper con métodos estereotipados de resolución y de mostrar flexibilidad en el pensamiento. Esta flexibilidad se puede expresar de diversas formas como cambiar de una operación mental a otra cualitativamente diferente o la diversidad de enfoques para resolver un problema.

Un término relacionado con el de flexibilidad es el de adaptatividad. Según Verschaffel et al. (2009) estos términos lo usan algunos autores como sinónimos, aunque el término *flexibilidad* se emplea, sobre todo, para referirse al hecho de usar múltiples estrategias y cambiar entre ellas, mientras el término *adaptatividad* enfatiza la habilidad para seleccionar, consciente o inconscientemente, la estrategia más apropiada. Otros autores distinguen entre *intra-flexibilidad* o flexibilidad de pensamiento dentro de un problema, e *inter-flexibilidad* o empleo de la flexibilidad entre diferentes problemas (ELIA; HEVEL-PANHUIZEN; KOLOVOU, 2009).

Otro aspecto importante del proceso de resolución de un problema es seleccionar la representación más adecuada y, en caso necesario, modificar dicha representación, ya sea dentro del mismo sistema de representación o cambiando a otro, lo que Duval (2006) denomina *tratamiento* y *conversión* respectivamente. Por ello se ha acuñado la expresión *flexibilidad representacional* (ACEVEDO et al., 2009).

En este trabajo adoptamos la definición de flexibilidad de Krems (1995) y la entendemos como habilidad para modificar la estrategia de resolución de un problema cuando se modifica su demanda cognitiva. En nuestro estudio se propone a los estudiantes cinco cuestiones acerca de una situación y, para responder a las dos últimas, es conveniente modificar la estrategia utilizada en las cuestiones anteriores.

1.2 El papel de la flexibilidad en la resolución de problemas

El término *problema* tiene diferentes usos y significados en la educación matemática (TÖRNER; SCHOENFELD; REISS, 2007). En nuestra investigación, entendemos por *problema* la situación que propone una o más cuestiones cuya solución no es inmediatamente accesible al resolutor, porque no conoce un algoritmo que relaciona los datos con la incógnita, por tanto debe buscar, investigar, relacionar etc., para alcanzar el objetivo (CALLEJO; VILA, 2009).

Diversas investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos han identificado diferentes categorías de esta actividad. Schoenfeld (1992, 2013) ha destacado las siguientes: (a) conocimientos del sujeto; (b) estrategias heurísticas; (c) regulación y control del proceso y (d) sistemas de creencias. Para este autor, estas cuatro categorías permiten explicar el éxito o el fracaso de un individuo resolviendo un problema. La primera de ellas es

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

claramente un factor determinante en el éxito o fracaso en matemáticas. A la segunda, las estrategias heurísticas, Schoenfeld ha prestado especial atención, pues considera que con una ayuda adecuada los estudiantes pueden aprender a aplicar las estrategias heurísticas descritas por Polya (1957) en su célebre libro *How To Solve It*.

Para Schoenfeld (1985) las estrategias descritas por Polya son *etiquetas* que designan familias de estrategias semejantes y, a diferencia de los algoritmos, no son prescriptivas sino descriptivas, pues describen de manera general un procedimiento de resolución. Una vez seleccionada una de ellas para resolver un problema, hay que decidir qué versión de la estrategia utilizar y cómo usarla y adaptarla a la situación concreta. Por otra parte si una estrategia parece que no funciona, es conveniente cambiarla. En ambos casos es importante la capacidad de trabajar de forma flexible y de modificar el procedimiento cuando lo exige la demanda de la tarea.

En cuanto a la regulación y control del proceso, diversas investigaciones han mostrado que la forma en que los resolutores gestionan los recursos de que disponen para abordar y resolver el problema es también un factor fundamental en el éxito o fracaso. En este sentido, ser un resolutor eficaz de problemas implica plantearse si aplicando la estrategia seleccionada se progresa o no hacia el objetivo y, en consecuencia, decidir si perseverar o cambiar de dirección. Sin embargo, los resolutores que no tienen éxito tienden a elegir de forma rápida una estrategia de resolución y a perseverar en ella, aunque progresen poco o nada hacia el objetivo (CARLSON; BLOOM, 2005; GAROFALO; LESTER, 1985).

Por último la influencia de los sistemas de creencias en el éxito o fracaso en la resolución de problemas ha sido ampliamente documentada (CALLEJO; VILA, 2009; LEDER; PEHKONEN; TÖRNER, 2002; VILA; CALLEJO, 2006). Algunas creencias inducen prácticas que no son adecuadas, por ejemplo la experiencia de los estudiantes resolviendo tareas rutinarias les puede conducir a pensar que *en la resolución de problemas se avanza directamente hacia el objetivo*, y como consecuencia no se plantearán cambiar de estrategia o abandonarán el problema si encuentran dificultades.

Por otra parte, el aprendizaje de las matemáticas exige enfrentarse a nuevas situaciones y nuevos problemas, lo que comporta no solo disponer de un buen bagaje de conocimientos donde se incluyen las estrategias, sino también ser flexibles para usarlos y adaptarlos (SILVER, 1997), pues lo que se ha aprendido en una situación o aplicado a un problema determinado, no siempre se puede aplicar a otros problemas, aunque aparentemente sean semejantes. Por ello un tema de investigación importante en educación matemática es la flexibilidad de pensamiento.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Estas investigaciones coinciden en afirmar que la flexibilidad está fuertemente relacionada con el proceso de resolución de problemas y con el éxito del mismo. Por una parte como hemos visto, el desarrollo de la capacidad de resolver problemas y de hacerlo de forma competente está vinculado a la flexibilidad en el uso de estrategias, es decir, a la capacidad de adaptar las heurísticas a situaciones concretas o de cambiar de estrategia si la elegida no es adecuada (SCHOENFELD, 1985, 1992). Por otra parte, las diferencias entre individuos de la misma edad se debe, a veces, al grado de flexibilidad para utilizar estrategias alternativas basadas en las condiciones de problemas particulares (DEMETRIOU, 2004). Y dado que la competencia en la resolución de problemas se mejora cuando los requisitos de la tarea y los métodos de resolución de problema se coordinan (KREMS, 1995), la flexibilidad en el uso de estrategias es un elemento que contribuye al éxito.

Elia, Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009) investigaron la flexibilidad en el uso de estrategias en estudiantes de 4º grado, de alta capacidad en la resolución de problemas no rutinarios. Los resultados indicaron que los estudiantes que mostraron flexibilidad en el uso de estrategias en diferentes problemas (inter-flexibilidad) tuvieron más éxito que aquellos que perseveraron en la misma estrategia para resolver distintos problemas. En cuanto a la flexibilidad dentro del mismo problema (intra-flexibilidad), la diferencia de éxito entre los estudiantes que usaron varias estrategias y los que usaron sólo una no fue significativa, pues algunos fallaron al considerar otra estrategia alternativa. Muir y Beswick (2005) observaron en estudiantes de 4º grado la tendencia a perseverar en la estrategia que habían seleccionado inicialmente, incluso cuando esta estrategia no era adecuada; otros estudiantes seleccionaron estrategias apropiadas, pero fallaron en su adaptación al problema concreto.

Por tanto los marcos teóricos y los resultados empíricos de las investigaciones sobre la resolución de problemas muestran la importancia de la flexibilidad en el éxito y fracaso en la resolución de problemas. Pero la flexibilidad no está siempre necesariamente ligada al éxito pues ha de estar regulada por la toma de decisiones acerca de qué estrategia utilizar, si cambiar o no de estrategia y como adaptarla en situaciones concretas.

1.3 Flexibilidad en el uso de estrategias en los problemas de generalización lineal

Algunos estudios sobre la flexibilidad en la resolución de problemas han usado problemas de generalización de patrones. Estos y otros problemas en los que el término general de la sucesión puede ser una función cualquiera (p.e. lineal, cuadrática, inversa etc.) se suelen utilizar para hacer la transición de la aritmética al álgebra, introduciendo, así, la idea

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

de generalización de un patrón para un número cualquiera *n* (DÖRFLER, 2008; LIN; YANG; CHEN, 2004; MASON, 1996). Este tipo de problemas tiene varios apartados de creciente complejidad. En particular, los *problemas de generalización lineal* presentan una situación mediante un dibujo o figura que proporciona los primeros términos f(1), f(2), f(3), … de una progresión aritmética y se pide calcular el valor f(n) para n *pequeño* y para n *grande*, y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín. Es decir, se pide realizar tres tipos de tareas: por una parte buscar el siguiente término u otros términos que se pueden obtener mediante conteo, haciendo un dibujo o una tabla (*generalización cercana*) (STACEY, 1989); por otra parte, buscar términos más lejanos para los que resulta laborioso continuar la sucesión y lo que se pretende es que el estudiante busque una regla (*generalización lejana*) (STACEY, 1989); por último, se pide expresar verbalmente y/o simbólicamente la regla general que permite encontrar el término enésimo de la sucesión, lo que requiere la identificación de un patrón. La generalización cercana demanda identificar un esquema numérico que es el patrón de crecimiento de la sucesión numérica, mientras que la generalización lejana o encontrar la regla general implica la coordinación de dos esquemas: el numérico y la posición de cada término de la sucesión, lo que supone una relación más compleja (RADFORD, 2011).

Stacey (1989) ha identificado en estudiantes de 9 a 13 años tres tipos de estrategias en la resolución de problemas de generalización lineal: (1) *aproximación recursiva*; (2) *aproximación funcional* relacionando dos variables: la posición de la figura y el número de elementos de ésta, obteniendo una expresión matemática; y (3) hacer un *razonamiento proporcional* incorrecto cuando se trata de una función afín, usando la relación $f(n)=dn$, siendo d la diferencia entre términos consecutivos, en lugar de la relación $f(n)=dn+b$ *(b≠0)*. En la aproximación recursiva se utiliza un método de conteo más o menos sofisticado, por ejemplo dibujando la figura correspondiente al término pedido y contando el número de elementos, ya sea uno a uno o agrupándolos, o utilizando la diferencia entre los términos de la sucesión, que responde al patrón $f(n)=f(1)+d+d+\ldots$, o haciendo una tabla calculando un término a partir del anterior $f(n+1)=f(n)+d$.

En este tipo de problemas se distinguen dos momentos en el proceso de abstracción (ROIG; LLINARES, 2008): (1) construir diferentes términos de la sucesión sin que se produzca la identificación del patrón y (2) abstraer el patrón y usarlo para anticipar el valor de nuevos términos de la sucesión. La identificación del patrón implica un salto cualitativo en la manera de pensar de los resolutores. Las investigaciones han constatado que la falta de

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

flexibilidad de los estudiantes dificulta este salto cualitativo. Así, Lee (1996) subrayó la importancia de la flexibilidad en la identificación de un patrón, pues la dificultad de algunos estudiantes para hacer una generalización reside, a menudo, en la fijación de un cierto patrón y en su resistencia a abandonarlo. En particular, Orton y Orton (1994) constataron que la fijación de enfoques recursivos, relacionando un término de la sucesión con el anterior, era un obstáculo para avanzar hacia la regla general, así como el uso de estrategias inadecuadas como la proporcionalidad directa. Asimismo, English y Warren (1998) encontraron que, una vez que los estudiantes percibían un patrón de una determinada manera, les costaba abandonar esta percepción inicial.

Nilsson y Juter (2011) estudiaron la flexibilidad y coordinación entre actos de visualización y análisis en un problema en que se pedía contar el número de elementos de una torre tridimensional de altura 12 y para un valor cualquiera. Los resultados mostraron que los estudiantes tuvieron flexibilidad para visualizar la torre de distintas formas, pero mantuvieron el tipo de razonamiento a lo largo del proceso y fueron incapaces de generalizar el procedimiento recursivo, lo que estos autores interpretan como un escaso control del proceso (SCHOENFELD, 1985) y dificultad para romper con métodos estereotipados de solución.

Estos trabajos han identificado la dificultad de los estudiantes para pasar de la generalización cercana a la lejana o para identificar la regla general debido a la falta de flexibilidad, entendida como las dificultades para modificar las estrategias apoyadas en el recuento cuando se pedía identificar una expresión general. Sin embargo, estos estudios aportan poca información acerca de la *secuencia de estrategias* que utilizan los alumnos a lo largo del proceso de resolución o de cómo varía esta secuencia en estudiantes de diferentes edades. Esta información es importante para identificar los obstáculos de los estudiantes en el proceso de generalización y el papel que desempeña la flexibilidad para favorecer los cambios cognitivos que implican identificar el patrón general a partir del recuento de casos particulares (SAMSON; SCHÄFER, 2011; RADFORD, 2010).

En este contexto, nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

- ¿Cuál es la relación entre la flexibilidad en el uso de estrategias en la resolución de problemas de generalización lineal y el éxito alcanzado en estudiantes de educación secundaria obligatoria (12-16 años)?
- ¿Cómo podemos caracterizar la flexibilidad en la resolución de problemas de generalización lineal a partir de la secuencia de estrategias utilizadas por estudiantes de educación secundaria?

2 Método

Se ha utilizado una metodología de tipo cualitativo, analizando las respuestas de los estudiantes con base a dos criterios: corrección de las respuestas y estrategias de resolución. Posteriormente se agruparon las respuestas que seguían una misma secuencia ordenada de estrategias para responder a las cinco cuestiones planteadas en el problema.

2.1 Participantes

La investigación se ha realizado con 96 alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12 a 16 años) (Tabla 1) de un Instituto de Educación Secundaria[1].

Tabla 1 – Alumnos participantes

Curso/edad	Nº de alumnos		
	Chicos	Chicas	Total
1º (12-13 años)	15	12	27
2º (13-14 años)	10	9	19
3º (14-15 años)	12	9	21
4º (15-16 años)	17	12	29
Total	54	41	**96**

Fonte: Desarrollado por los autores

Cuando se recogieron los datos, no se había introducido a los alumnos de 1er curso el lenguaje algebraico; los de 2º curso conocían el lenguaje algebraico y una introducción a las funciones y a los distintos lenguajes con los que se pueden representar.

2.2 Instrumento de recogida de datos

Se propusieron tres problemas cuyas situaciones respondían a un modelo de función lineal o afín. En uno de ellos se pedía completar una tabla correspondiente a ampliaciones y reducciones de una fotografía de dimensiones 10 x 15; otro era un problema de optimización donde un futbolista debía elegir entre dos ofertas en las que se fijaba una cantidad anual más un complemento proporcional al número de goles marcados; y el tercero consistía en un problema de generalización lineal en el que se mostraban dos sucesiones 2n+2 y 3n+1. Los alumnos dispusieron de una hora para responder al cuestionario y se les pidió que no borraran

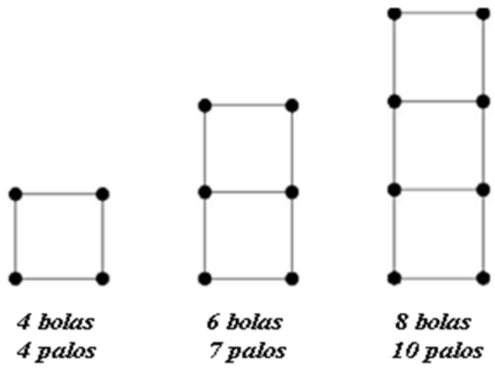
[1] Estos alumnos están en un curso bilingüe castellano-catalán. Las respuestas están en catalán y las que se incluyen en este artículo se han traducido al castellano.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

nada para conocer los pasos seguidos para la resolución de los diferentes problemas.

En este trabajo presentamos las respuestas al problema de generalización lineal (Figura 1) que es similar a uno propuesto en otras investigaciones (GARCÍA CRUZ, 1998; STACEY, 1989) ya que el análisis de la secuencias de estrategias usadas permite inferir características de la flexibilidad en la resolución de este tipo de problemas.

Observa las siguientes figuras:



Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadrado necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadrados necesita 6 bolas y 7 palos y la figura de tres cuadrados necesita 8 bolas y 10 palos.

1. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados?*
2. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadrados?*
3. *¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadrados?*
4. *Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de bolas.*
5. *Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el número de palos.*

Figura 1 – Problema propuesto
Fonte: Desarrollado por los autores

Las cuestiones 1 y 2 son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia recursiva mediante recuento, con o sin dibujo, añadiendo 3 palos o 2 bolas. La cuestión 3 de generalización lejana también se puede resolver con un método recursivo. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica (RADFORD, 2006).

Tabla 2 – Relación entre la posición de la figura y el número de bolas

Posición	1	2	3	4	5	….	n
Nº bolas	4	6	8	10	12	…	2n+2

Fonte: Desarrollado por los autores

Por ejemplo, la identificación del término general de las dos sucesiones de la Tabla 2 para responder a las dos últimas cuestiones supone un salto cualitativo en el proceso de abstracción. Para identificar y expresar la regla general (cuestiones 4 y 5) a partir de una estrategia recursiva el estudiante debe ser capaz de identificar la relación entre la cantidad de

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

bolas (y la cantidad de palos) cuando se pasa de una posición a otra. Por ejemplo, identificar que la sucesión 4, 7, 10, 13,… obtenida sumando 3 cada vez, está formada por números que son múltiplos de 3 más 1, y así poder llegar a escribir 3n+1. Pero establecer directamente la relación entre n (posición) y el nº de bolas (nº de palos) implica usar una estrategia funcional.

2.3 Análisis de datos

Las respuestas se analizaron con base a dos criterios: corrección de las respuestas y estrategias de resolución. Posteriormente, se agruparon las respuestas que seguían una misma secuencia ordenada de estrategias para responder a las cinco cuestiones planteadas.

Dos investigadores realizaron una lectura conjunta de las respuestas a cada cuestión con el objetivo de generar criterios en relación a la corrección de las respuestas y a la identificación de las estrategias. Posteriormente, se contrastó el análisis y se resolvieron las discrepancias.

La respuesta al problema se ha considerado correcta cuando la estrategia y la respuesta a las cinco cuestiones están correctas; en cualquier otro caso se ha considerado incorrecta. La regla general se podía expresar en forma verbal o algebraica.

Hemos codificado las estrategias empleadas en cada una de las cuestiones planteadas en tres categorías (ENGLISH; WARREN, 1998; GARCÍA CRUZ, 1998; STACEY, 1989): recursivas, funcionales y proporcionales:

- *Estrategias recursivas*: el estudiante relaciona términos consecutivos y observa que en cada paso aumenta una diferencia constante. Se apoya en relaciones escalares (aumentar una cantidad).

Por ejemplo: *si en 3 cuadrados hay 8 bolas, en 4 cuadrados hay 2 bolas más, 10 bolas; en 5 cuadrados 10+2=12 bolas; en 6 cuadrados 12+2=14 bolas*. La regla general se expresa diciendo: *el primer cuadrado tiene 4 bolas y los otros cuadrados dos bolas más cada uno, es decir 4 más el número de cuadrados menos uno multiplicado por 2.*

- *Estrategias funcionales*: se establece una relación entre la posición de la figura y el número de elementos de la misma.

Por ejemplo: *En 3 cuadrados hay 10 palos que es igual a 1 palo más 3 palos que se añaden por cada cuadrado (3 x 3), por tanto en 20 cuadrados hay 1 palo más 20 veces 3 palos que se añaden: 1+3×20=61 palos*. La regla general se puede expresar: *El número de palos es igual a 1 más 3 veces el número de cuadrados. Para n cuadrados sería 1+3n.*

- *Estrategias proporcionales* (Incorrectas*):* se establece una relación de

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

proporcionalidad entre las figuras y el número de elementos.

Por ejemplo: *Si la figura de 2 cuadrados tiene 6 bolas, la de 20 cuadrados tendrá 10 veces más, 60 bolas.*

Finalmente, se agruparon aquellas respuestas que seguían la misma secuencia ordenada de estrategias aplicadas, independientemente de la cuestión en que se produjera el cambio de estrategia. Por ejemplo, en la secuencia Recursiva-Funcional se puede cambiar de estrategia recursiva a funcional en la cuestión 2 o 3.

La agrupación de las respuestas considerando la secuencia de estrategias usadas permitió identificar tres perfiles de estudiantes, que fueron caracterizados considerando el orden de las estrategias usadas como manifestaciones de la idea de flexibilidad entendida como la modificación de las estrategias empleadas en la resolución de un problema de generalización lineal cuando se modifica su demanda.

3 Resultados

En primer lugar se proporciona una descripción general de las respuestas de los estudiantes y, a continuación, presentamos los tres perfiles identificados en relación a la flexibilidad en el uso de estrategias, el éxito alcanzado y la distribución por cursos.

3.1 Comportamiento general de los estudiantes

Sólo una estudiante de 4º curso identificó un modelo matemático subyacente a la situación (progresión aritmética) y aplicó directamente la fórmula para calcular el valor de un término particular o del término general.

25 estudiantes comenzaron con una estrategia recursiva para responder a las primeras cuestiones y encontraron el número de elementos de la figura con 20 cuadrados o de una figura cualquiera, identificando el patrón. De estos 25 estudiantes, 15 de ellos cambiaron con éxito de una estrategia recursiva a funcional para responder a cuestiones de generalización lejana. Por último, 70 estudiantes no fueron capaces de identificar el patrón.

Más de la mitad de los estudiantes (54 de 96) usaron una sola estrategia (recursiva en todos los casos menos en uno que usó la funcional) y el resto (42 estudiantes) utilizaron más de una estrategia. El porcentaje de éxito de los que usaron sólo una (11 de 54; 20.4%) fue inferior al de los que emplearon más de una (15 de 42; 35.7%). Esto significa que algunos de los 70 estudiantes que no identificaron ningún patrón generaron estrategias diferentes para

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

intentar resolver las cuestiones.

3.2 Identificación de perfiles

Se identificaron tres perfiles que agrupan a 88 estudiantes, que representan el 89.6% del total (Tabla 3).

- Perfil 1. Estudiantes que usaron una sola estrategia (recursiva) y la mayor parte no llegó a expresar correctamente la regla general.
- Perfil 2. Estudiantes que empezaron usando una estrategia recursiva y cambiaron a una estrategia proporcional; posteriormente algunos hicieron una tabla. No tuvieron éxito.
- Perfil 3. Estudiantes que empezaron usando una estrategia recursiva y cambiaron a una estrategia funcional con éxito.

Tabla 3 – Distribución de perfiles por cursos y éxito*

		Distribución por cursos				
Perfiles	Secuencia de estrategias	1º *(n=27)*	2º *(n=19)*	3º *(n=21)*	4º *(n=29)*	Total
1	Recursiva	22(4)	12(3)	7	12(3)	**53(10)**
2	Recursiva-Proporcional	4	5	6	5	**20**
3	Recursiva-Funcional	1(1)	2(2)	3(3)	9(9)	**15(15)**
Total		**27(5)**	**19(5)**	**16(3)**	**26(12)**	**88(25)**

* Entre paréntesis el número de estudiantes que responden correctamente.
Fonte: Desarrollado por los autores

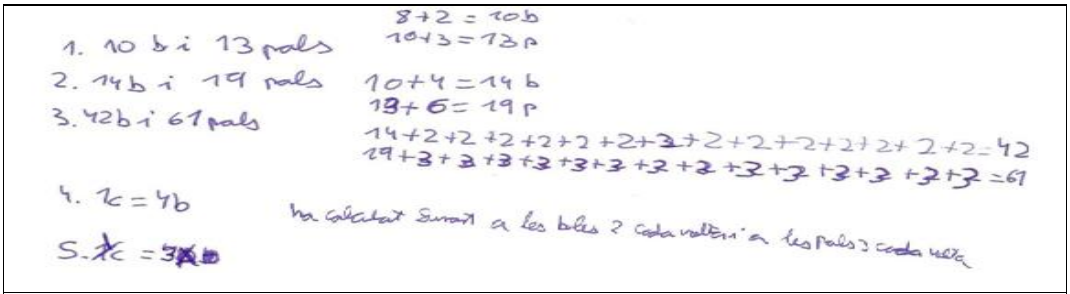
En el perfil 1 (uso de solo la estrategia recursiva) predominaron los estudiantes de 1er y 2º curso (22 de 27 y 12 de 19 respectivamente); en el perfil 2 (uso de estrategia recursiva y al aumentar la demanda de la tarea traslación a una aproximación proporcional errónea) los de 2º y 3er curso (5 de 19 y 6 de 21, respectivamente) y en el perfil 3 (uso de estrategia recursiva y al aumentar la demanda de la tarea traslación a una aproximación funcional) los de 4º curso (9 de 29).

Perfil 1 – Estrategia recursiva: este perfil agrupa a 53 estudiantes y su frecuencia es mayor en 1er y 2º curso. De estos estudiantes, 10 consiguieron dar una respuesta correcta a las cinco cuestiones, lo que puso de manifiesto que fueron capaces de identificar los dos patrones a partir del pensamiento recursivo. Dentro de este perfil encontramos tres tipologías de estudiantes en relación a la expresión de la regla general:

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

- Los que sólo identificaron el patrón *sumar 2 bolas* o *sumar 3 palos* (18 estudiantes).
- Los que además del patrón anterior, identificaron la constante inicial (10 estudiantes).
- Los que dejaron en blanco la expresión de la regla general o dieron respuestas sin sentido (25 estudiantes).

Presentamos ejemplos de las dos primeras tipologías.



Lo he calculado sumando a las bolas 2 cada vez y a los palos 3 cada vez

Figura 2 – Estudiante E3.19. Perfil recursivo
Fonte: datos de la investigación

El estudiante E3.19[2] (Figura 2) pertenece a la primera tipología. Aplicó una estrategia recursiva para responder a las tres primeras cuestiones apoyándose en el número de bolas y palos de una de las figuras dadas en el enunciado: para la de 4 cuadrados utilizó la figura de 3 cuadrados a la cual le sumó 2 bolas y 3 palos escribiendo: *8+2=10 bolas* y *10+3=13 palos*; para la figura de seis cuadrados utilizó la figura de 4 cuadrados calculada anteriormente, a la cual le sumó 4 bolas y 6 palos escribiendo: *10+4=14 bolas* y *13+6=19 palos*. Y, por último, para la figura de veinte cuadrados utilizó la figura de 6 cuadrados calculada en el apartado anterior a la cual le sumó 14 veces 2 bolas y 14 veces 3 palos, escribiendo:

$$14+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=42$$

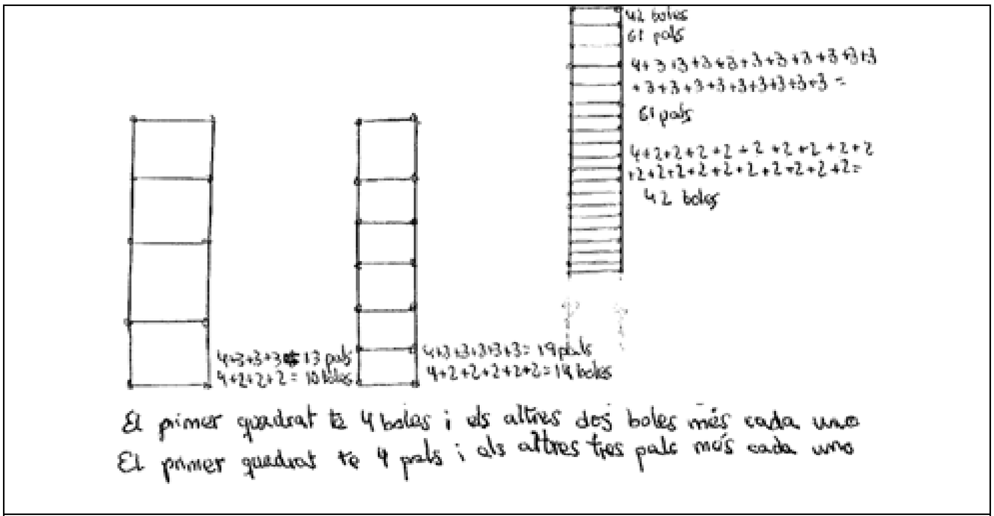
$$19+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=61$$

Lo expresó diciendo: *lo he calculado sumando a las bolas 2 cada vez y a los palos 3 cada vez*, sin hacer ninguna referencia al primer sumado.

Un caso representativo de la segunda tipología es el estudiante E1.17 (Figura 3).

[2] El código *En.m* significa estudiante *m* del curso *n*: E3.19 es el estudiante 19 de 3er curso.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04



El primer cuadrado tiene 4 bolas y los otros dos bolas más cada uno
El primer cuadrado tiene 4 palos y los otros tres palos más cada uno

Figura 3 – Estudiante E1.17. Perfil recursivo
Fonte: datos de la investigación

Este estudiante se ayudó de un dibujo para resolver el problema y aplicó una estrategia recursiva para responder a las tres primeras cuestiones, apoyándose en el número de bolas y palos del cuadrado inicial (4 bolas y 4 palos). Este estudiante identificó la constante inicial: *el primer cuadrado tiene 4 bolas* (o 4 palos) y el número de elementos que hay que añadir *y los otros cuadrados tienen dos bolas más cada uno* (o 3 palos).

De los 53 estudiantes agrupados en este perfil, sólo 10 de ellos consiguieron, a partir de la aproximación recursiva, identificar y describir el patrón de una manera general. Estos estudiantes usaron expresiones como: *el primer cuadrado está formado por 4 bolas y cada cuadrado que añades sumas 2 bolas* (o 3 palos) (estudiante E1.11).

Perfil 2 – De estrategia recursiva a proporcional: este perfil agrupa a 20 estudiantes y su frecuencia es mayor en 2º y 3er curso (Tabla 2). Corresponde a alumnos que comenzaron utilizando una estrategia recursiva y cuando aumentó la demanda cognitiva de la tarea se bloquearon y cambiaron a una estrategia proporcional. En este perfil encontramos dos tipologías: los que sólo cambiaron de recursiva a proporcional para responder a la tercera cuestión, es decir cuando se les preguntaba por el caso de 20 cuadrados (13 estudiantes) y los que después de usar la estrategia proporcional cambiaron de nuevo e hicieron una tabla para responder a las dos últimas cuestiones (7 estudiantes).

Un caso representativo de la primera tipología es el estudiante E2.16 (Figura 4) que resolvió los dos primeros apartados de generalización cercana de forma recursiva, partiendo de casos ya conocidos (apoyado en 3 cuadrados para contestar el caso de 4 cuadrados, y apoyado en 4 cuadrados para contestar el caso de 6 cuadrados) identificando las 2 bolas y los

3 palos que hay que añadir por cada nuevo cuadrado. Para responder a la cuestión sobre 20 cuadrados tomó como referencia la figura de 2 cuadrados e hizo una regla de tres porque según explicó: *más tarde he descubierto que con una regla de tres también se podía hacer*. Pero este estudiante no verificó que la regla de tres aplicada a los casos de 4 o 6 cuadrados no le daba el resultado obtenido anteriormente. Por tanto no reguló el proceso de resolución (SCHOENFELD, 1992) al no comprobar el patrón de proporcionalidad en otros casos.

Algunos estudiantes de 3er y 4º cambiaron de nuevo de estrategia e hicieron una tabla para responder a los apartados 4 y 5, que corresponden a la obtención de la regla general. Sin embargo, la tabla construida no reflejaba las respuestas de los apartados anteriores y en unos casos era correcta y en otros no.

Un caso representativo es el estudiante E3.10 (Figura 5), que tras hacer una regla de tres para responder a los apartados 2 y 3 construyó dos tablas relacionando cuadrados-bolas o cuadrados-palos, cometiendo algunos errores en los últimos valores. Los datos de estas tablas no coinciden con los obtenidos en los apartados anteriores mostrando la falta de regulación del proceso de resolución al no verificar los resultados obtenidos. Este estudiante dijo: *he hecho una regla de tres para calcular el número de bolas y palos porque no se me ocurre otra operación.*

Sólo un estudiante llegó a expresar correctamente la regla general para el caso de las bolas, pero no la aplicó a los apartados anteriores a los que había respondido usando una regla de tres.

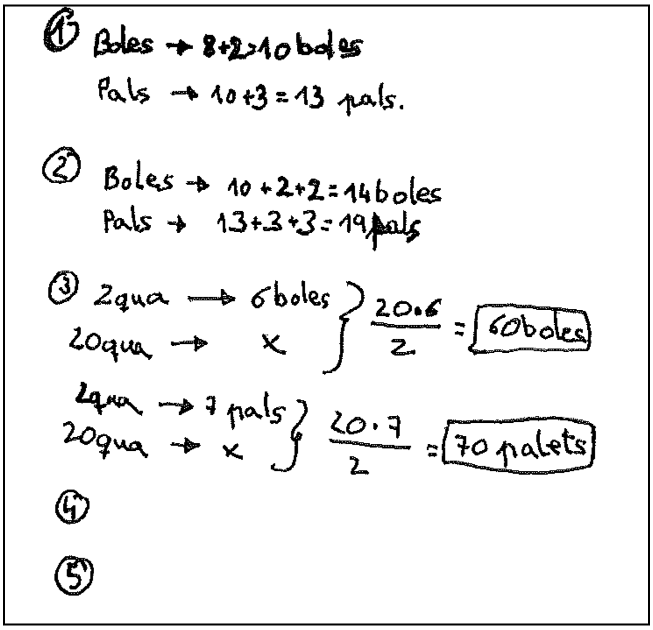


Figura 4 – Estudiante E2.16. Perfil Recursivo-proporcional
Fonte: datos de la investigación

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

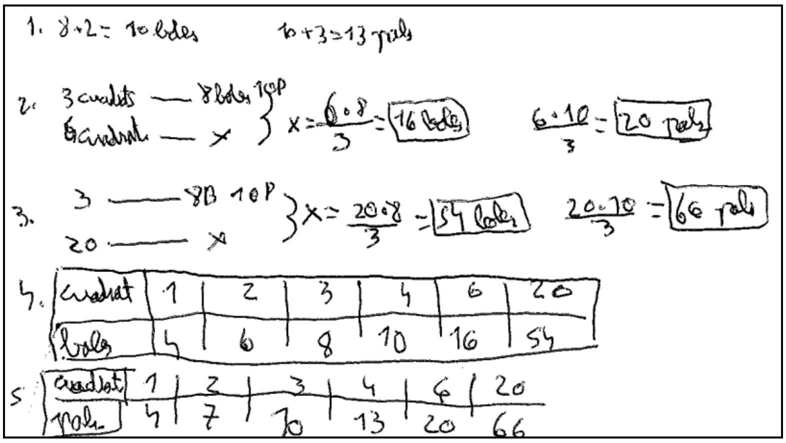
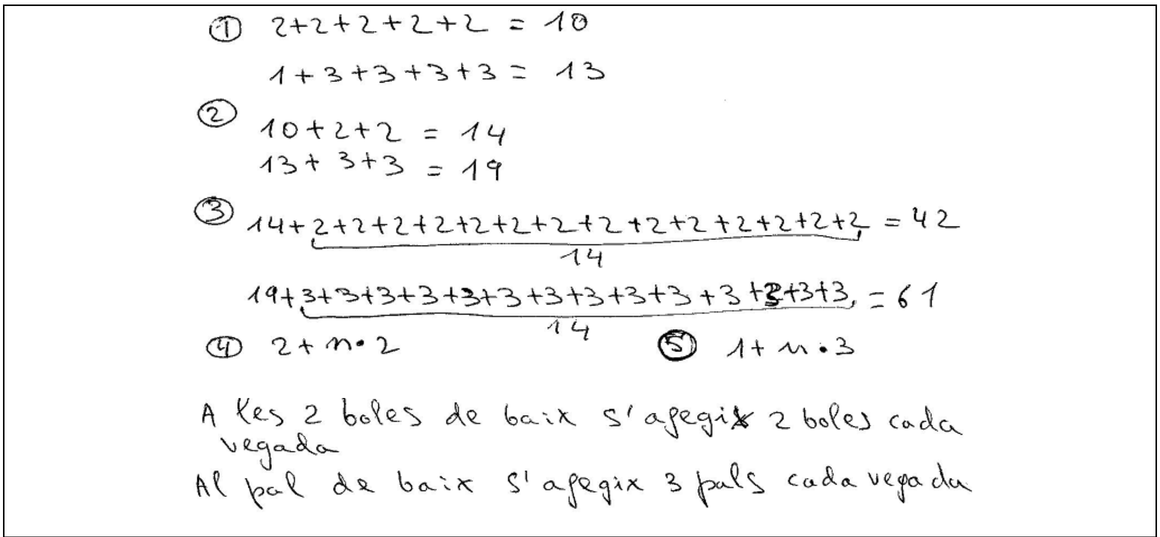


Figura 5 – Estudiante E3.10.Perfil Recursivo-proporcional
Fonte: datos de la investigación

Perfil 3 – De estrategia recursiva a funcional: este perfil agrupa a 15 estudiantes que resolvieron con éxito el problema cambiando de una estrategia recursiva a una funcional. Su frecuencia aumenta de 1º a 4º. El cambio de la estrategia recursiva a una aproximación funcional estaba vinculado al aumento de la demanda cognitiva de la tarea al pasar de la generalización cercana (cuestiones 1 y 2) a la generalización lejana (cuestión 3) y expresión del patrón (cuestiones 4 y 5).



A las 2 bolas de abajo se añaden 2 bolas cada vez
Al palo de abajo se añaden 3 palos cada vez

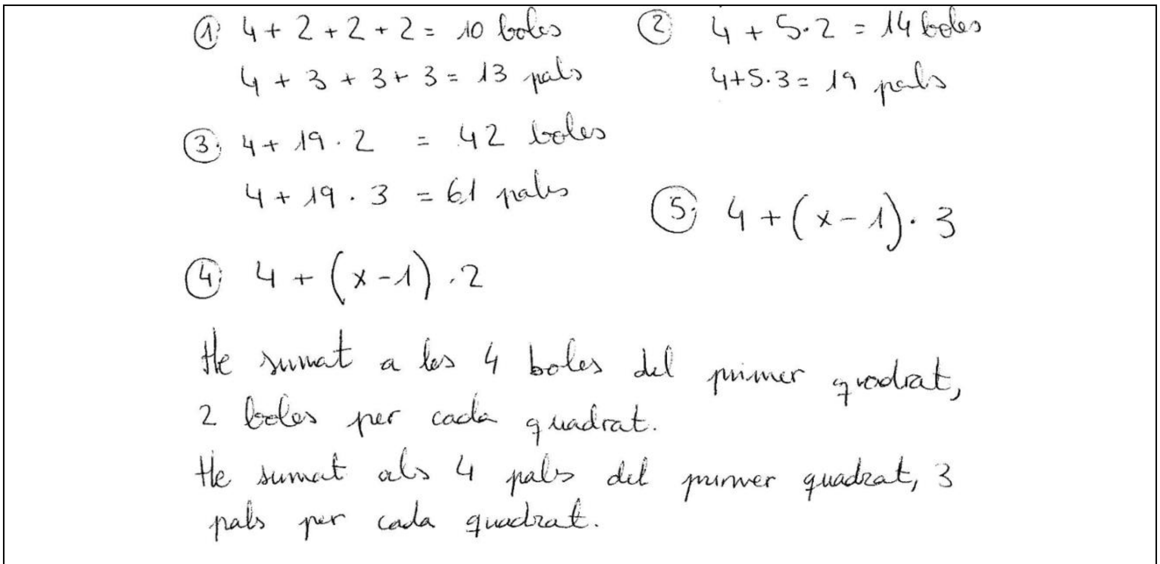
Figura 6 – Estudiante E3.7. Perfil Recursivo-Funcional
Fonte: datos de la investigación

El alumno E3.7 (Figura 6) utilizó una estrategia recursiva para responder a las tres primeras cuestiones, pero cambió a una funcional para expresar algebraicamente la regla general. De la misma manera que los estudiantes E3.19 del perfil 1 (Figura 2) y E2.16 del perfil 2 (Figura 4), este estudiante se apoyó en la figura de 4 cuadrados para obtener la respuesta a la cuestión 2 (6 cuadrados) y en la figura de 6 cuadrados para la de 20. Pero para

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

dar la respuesta a la cuestión relativa al número de bolas y palos en la sucesión de 20 cuadrados escribió, además, el número de veces que se sumaba 2 o 3, lo que parece indicar una transición de la estrategia recursiva a la funcional. Para expresar la regla general parece que se apoyó en la respuesta a la cuestión 1 en la que aparecen los elementos iniciales (*a las 2 bolas de abajo se añaden 2 bolas cada vez* o *al palo de abajo se añaden 3 palos cada vez*) y quizá en la observación de que para obtener los elementos de la figura con 20 cuadrados sumó 14 veces 2 (o 3) a la figura de 6 cuadrados.

Por otra parte, el estudiante E4.4 (Figura 7), a diferencia del anterior, sólo utilizó la estrategia recursiva en el primer apartado. Partió del primer cuadrado para calcular el número de elementos de 4 cuadrados identificando los elementos iniciales 4 *bolas del primer cuadrado* y *4 palos del primer cuadrado*. Cambió de estrategia recursiva a funcional para responder a las siguientes cuestiones, lo que parece mostrar que en la expresión *4+2+2+2* (o *4+3+3+3*) relacionó el número de cuadrados con el número de veces que se añaden 2 bolas (o 3 palos).



He sumado a las 4 bolas del primer cuadrado, 2 bolas por cada cuadrado.
He sumado a los 4 palos del primer cuadrado, 3 palos por cada cuadrado.

Figura 7 – Alumno E4.4. Perfil Recursivo-Funcional
Fonte: datos de la investigación

4 Discusión

En esta investigación se han formulado dos preguntas:

- ¿Cuál es la relación entre la flexibilidad en el uso de estrategias en la resolución de problemas de generalización lineal y el éxito alcanzado en estudiantes de educación secundaria obligatoria (12-16 años)?

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

- ¿Cómo podemos caracterizar la flexibilidad en la resolución de problemas de generalización lineal a partir de la secuencia de estrategias utilizadas por estudiantes de educación secundaria?

A continuación, discutimos los resultados obtenidos para tratar de responderlas.

4.1 Flexibilidad y nivel de éxito

En relación a la flexibilidad y nivel de éxito hemos identificado tres perfiles en el comportamiento de los estudiantes, que ponen de relieve diferentes manifestaciones de la flexibilidad entendida como la modificación de las estrategias empleadas en la resolución de un problema de generalización lineal cuando se modifica su demanda cognitiva. El primero agrupa a los estudiantes que usan sólo la estrategia recursiva; la mayor parte de ellos se bloquean al aumentar la demanda cognitiva de la tarea. El segundo perfil corresponde a los que cambian de una estrategia recursiva a una aproximación proporcional dando un resultado incorrecto. Finalmente, el tercer perfil agrupa a los estudiantes que al aumentar la demanda cognitiva de la tarea cambian con éxito de una estrategia recursiva a una estrategia funcional.

Al igual que otras investigaciones hemos constatado que la aproximación más común de los estudiantes fue la recursiva (ENGLISH; WARREN, 1998; LEE, 1996; STEELE, 2008) y que la mayoría no fue capaz de cambiar esta estrategia para encontrar la regla general (perfil 1). Otros dieron muestra de flexibilidad al cambiar el procedimiento cuando se modificaba la demanda de la tarea (perfiles 2 y 3) (ELIA; HEVEL-PANHUIZEN; KOLOVOU, 2009). De ellos, la mayoría recurrió a métodos estereotipados como el razonamiento proporcional (perfil 2) y no lograron resolver el problema. Una minoría de estudiantes cambió a una estrategia funcional (perfil 3) y resolvió con éxito el problema. Este cambio de una estrategia recursiva a una funcional implica un salto cualitativo: pasar de una relación escalar en un conjunto (por ejemplo, sumar palos a palos) a una relación funcional entre dos conjuntos relacionando la cantidad de cuadrados y la cantidad de palos (o la cantidad de bolas). Estos datos indican que la flexibilidad en el uso de estrategias es una condición necesaria, pero no suficiente, para resolver con éxito los problemas.

Este trabajo aporta como novedad sobre trabajos precedentes que han identificado las estrategias usadas por estudiantes de educación secundaria y las dificultades para cambiar de estrategia (ENGLISH; WARREN, 1998; LEE, 1996; ORTON; ORTON, 1994; STACEY, 1989), la descripción de tres perfiles que indican distintas manifestaciones de la flexibilidad en el uso de estrategias recursivas, funcionales y proporcionales en la resolución de problemas

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

de generalización lineal, entendida la flexibilidad como el cambio de estrategia cuando se modifica la demanda cognitiva. Asimismo, hemos descrito la evolución de estos perfiles según la edad de los estudiantes.

En relación a la flexibilidad en el uso de estrategias, Schoenfeld (1992) indica que el uso de estrategias implica, entre otras cosas, la toma de decisiones en cuanto a su elección y a la comprobación de si funciona en casos particulares o más sencillos. En nuestro caso, el cambio de una estrategia recursiva a una proporcional fue una elección ante un bloqueo cuando los estudiantes no sabían cómo continuar para responder a nuevas cuestiones y *no se les ocurría otra cosa*, pero estos estudiantes no analizaron las características de la situación (relación afín) ni la relacionaron con el significado de la relación de proporcionalidad (relación lineal). Se puede decir que hubo flexibilidad, pero no adaptatividad (VERSCHAFFEL et al., 2009), es decir, no seleccionaron consciente o inconscientemente la estrategia más apropiada. Estos resultados también muestran que la flexibilidad debe ir unida a la regulación del proceso para poder aumentar el nivel de éxito en la identificación y expresión general del patrón en los problemas de generalización.

4.2 Evolución del comportamiento de los estudiantes

Los estudiantes tuvieron unas pautas de comportamiento diferentes según la edad. Los de 1º y 2º emplearon con más frecuencia estrategias recursivas en todo el problema (perfil 1) y los de 4º cambiaron con más frecuencia de estrategia recursiva a funcional (perfil 3) al aumentar la demanda cognitiva de la tarea; los que cambiaron en mayor medida de recursiva a proporcional fueron los de 2º y 3º (perfil 2).

Los estudiantes de 1º y 2º comenzaron usando estrategias recursivas, 9 de ellos cambiaron a una estrategia proporcional, y 3 a una estrategia funcional. Este grupo de estudiantes fue el que predominó en el perfil 1 y el que mostró más rigidez en el uso de estrategias recursivas. Es lo que sucedió al alumno E1.17 (Figura 3), que se apoyó en casos ya conocidos y en el esquema numérico (sumar 2 o 3), lo que le permitió obtener la solución cuando se pedían casos particulares, pero que fue incapaz de encontrar la regla general. Ante esta dificultad, 9 estudiantes, por ejemplo E2.16 (Figura 4, perfil 2), recurrieron a procedimientos estereotipados como la regla de tres, sin espíritu crítico y sin regulación del proceso. Sólo 3 estudiantes de 1º y 2º (perfil 3) fueron capaces de pasar de un esquema, el numérico de la sucesión sumando palos o bolas, a la coordinación de dos esquemas, la posición de la figura (número de cuadrados) y el patrón numérico de crecimiento,

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

estableciendo, así, una relación funcional entre el número de cuadrados y el número de bolas (o palos) (RADFORD, 2011) lo que implica un salto cualitativo.

La dificultad mostrada por estos estudiantes para resolver el problema en el caso general muestra la necesidad de ayudarles a resolver problemas identificando regularidades e invariantes (DÖRFLER, 2008), para lo cual es necesario organizar datos para poder identificar patrones o reglas de formación, por ejemplo mediante tablas o escribiendo una sucesión numérica.

Los estudiantes de 3º y 4º comenzaron usando estrategias recursivas, pero fueron más flexibles que los de cursos inferiores para cambiar a una estrategia proporcional o funcional. La flexibilidad para cambiar de recursiva a funcional se puede explicar por la influencia del currículum, en particular por un conocimiento más profundo de las funciones o relaciones entre dos variables y las distintas formas de representar una función. También, puede explicarse por una mayor madurez intelectual para coordinar la información y captar la idea de variabilidad y por tanto de realizar generalizaciones y seleccionar consciente o inconscientemente la estrategia más apropiada, que Verschaffel et al. (2009) denominan adaptatividad.

El cambio de una estrategia recursiva a proporcional aumentó de 1º a 3º y decreció en 4º. Este resultado confirma el obtenido en la investigación de Fernández y Llinares (2012) con alumnos de 9-16 años, a los que se les propusieron situaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad (aditivos). En su trabajo identificaron distintos perfiles, entre ellos el *perfil proporcional* que agrupa a los estudiantes que dan respuestas proporcionales tanto a los problemas aditivos como a los de proporcionalidad, y que aumentó de manera clara de 4º de primaria (9-10 años) a 4º de secundaria (15-16 años) (de 0.0% a 55.0%). Este hecho lo explican por la influencia del currículo, pues aunque la idea de proporcionalidad se introduce en primaria, en secundaria se trabaja de manera más sistemática las magnitudes proporcionales (razón y proporción) y la aproximación algorítmica para resolver los problemas denominados *de regla de tres*. Como consecuencia, los estudiantes utilizaron esta relación, o la regla de tres, en situaciones que no eran adecuadas. Por ello es conveniente trabajar la relación de proporcionalidad en el marco de otras relaciones para que los alumnos aprendan a identificarla correctamente.

La diferencia de pautas de comportamiento de los estudiantes en función del nivel de estudios muestra que la elección y la modificación de estrategias han estado vinculadas a los conocimientos disponibles. Los participantes en esta investigación aplicaron conceptos como el de función o proporcionalidad, o procedimientos como hacer una tabla, cambiar de sistema

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

de representación o aplicar una regla de tres, según su nivel de conocimientos; estos conocimientos unas veces facilitaron y otras bloquearon el proceso de resolución. Porque ser competentes resolviendo problemas implica, por una parte, utilizar estrategias como las descritas por Stacey (1989) y otros autores para este tipo de problemas; por otra parte, también requiere estrategias metacognitivas como descomponer el problema, regular el proceso de resolución, verificar y evaluar resultados (como los obtenidos aplicando una relación de proporcionalidad). Estas estrategias metacognitivas juegan un papel crucial en el éxito en la resolución de problemas, como señalan algunas investigaciones (CARLSON; BLOOM, 2005; GAROFALO; LESTER, 1985; SCHOENFELD, 1992). Como en otros estudios el nuestro ha mostrado que los estudiantes tienen deficiencias aplicando estas estrategias metacognitivas en sus esfuerzos para encontrar la solución (SCHOENFELD, 1985, 1992), ya sea porque algunos quizá no se plantearon si continuar o no por el camino inicialmente emprendido mostrando, así, rigidez, ya sea porque no verificaron si la regla general que habían obtenido era válida en casos particulares.

Estas estrategias metacognitivas juegan un papel importante en problemas con varios apartados de creciente complejidad, donde continuar aplicando la estrategia seleccionada en las cuestiones más sencillas puede conducir a un bloqueo si no se vincula la forma de resolver la situación más sencilla con otras más complejas. Los problemas de generalización lineal, con varios apartados como el propuesto en esta investigación, implican la aplicación de la estrategia heurística *resolver primero un problema más sencillo* (los primeros apartados) y su resolución muestra cómo es preciso tomar decisiones a lo largo del proceso para resolver cuestiones más complejas apoyándose en las más sencillas, lo que Schoenfeld (1985) denominó *estrategia directiva*.

5 Conclusión

En conclusión, los resultados muestran diferentes manifestaciones de la flexibilidad en la resolución de problemas que implican reconocer patrones. Esta flexibilidad, necesaria cuando se incrementa la demanda de la tarea, está relacionada con los conocimientos de los estudiantes y el control y regulación del proceso (GAROFALO; LESTER, 1985; SCHOENFELD, 1992).

En cuanto a los conocimientos de los estudiantes, cabe destacar que unas veces han ayudado y otras veces han bloqueado el proceso de resolución. Por una parte, el conocimiento de las funciones y sus diferentes modos de representación ha podido ayudar a cambiar de una

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

estrategia recursiva a funcional identificando el patrón en el caso general (perfil 3). Por otra parte, los estudiantes han empleado sus conocimientos de las magnitudes proporcionales y sobre todo de la *regla de tres* en situaciones que no eran las adecuadas (perfil 2).

Se ha puesto de manifiesto que un buen uso de los conocimientos disponibles exige la regulación y control del proceso, pues algunos estudiantes identificaban el patrón en casos sencillos y cambiaban de una estrategia recursiva a proporcional para cuestiones de generalización lejana o encontrar la regla general (perfil 2), sin verificar si se cumplía o no esta relación en los casos más sencillos ya resueltos; también hemos constatado que ante un bloqueo utilizaban de forma irreflexiva una relación de proporcionalidad como *tabla de salvación*.

Por otro lado, los estudiantes más jóvenes (12-13 años) manifestaron menor grado de flexibilidad que los más mayores, ya que muchos de ellos no fueron capaces de cambiar la estrategia recursiva para encontrar la regla general (perfil 1). Esta falta de flexibilidad puede explicarse, además de por los conocimientos, por una menor madurez intelectual para coordinar la información y captar la idea de variabilidad y por tanto de realizar generalizaciones y seleccionar la estrategia más apropiada.

En trabajos posteriores sería interesante indagar en los sistemas de creencias de los estudiantes sobre la resolución de problemas, que también podrían explicar los comportamientos observados.

Por último destacamos la importancia de que los profesores lleguen a conocer esta información como parte del conocimiento necesario para enseñar (YESILDERE; AKKOÇ, 2012), concretamente para identificar los obstáculos de los estudiantes en el proceso de generalización y el papel que desempeña la flexibilidad para favorecer los cambios cognitivos, que implica identificar el patrón general a partir del recuento de casos particulares.

Referencias

ACEVEDO, A.; VAN DOOREN, W.; CLAREBOUT, G.; ELEN, J.; VERSCHAFFEL, L. Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 627-636, Oct. 2009.

CALLEJO, M. L; VILA, A. Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 72, n. 1, p. 11-126, 2009.

CARLSON, M.; BLOOM, I. The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 58, n. 1, p. 45-75, Sept. 2005.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

DEMETRIOU, A. Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence. In: DEMETRIOU, A.; RAFTOPOULOS, A. (Ed.). **Developmental change**: Theories, models and measurement. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 21-73.

DÖRFLER, W. En route from patterns to algebra: Comments and reflections. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 40, n. 1, p. 143-160, Jan. 2008.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problem of comprehension in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, Feb. 2006.

ELIA, I.; HEVEL-PANHUIZEN, M.; KOLOVOU, A. Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achieves in mathematics. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 605-618, Oct. 2009.

ENGLISH, L. D.;WARREN, E. A. Introducing the variable through pattern exploration. **Mathematics Teacher**, Reston, VA, v. 91, n. 2, p. 166-170, Feb. 1998.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación Primaria y Secundaria. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 30, n. 1, p. 129-142. 2012.

GARCÍA CRUZ, J. A. **El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal**. 1998. 131 f. Tesis (Doctor en Análisis Matemático) – Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, La Laguna, 1998.

GAROFALO, J.; LESTER, F. K. Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 16, n. 3, p. 163-176, 1985

HEINZE, A.; STAR, J.R.; VERSCHAFFEL, L. Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 41, n. 5, p. 535-540, Oct. 2009.

KREMS, J. F. Cognitive flexibility and complex problem solving. In: FRENSCH, P. A.; FUNKE, J. (Ed.). **Complex problem solving: The European Perspective**. Hillsdale, NJ: LEA, 1995. p. 201-218.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in school children**. Chicago: University of Chicago Press, 1976.

LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Ed.). **Beliefs**: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, 2002

LEE, L. An initation into algebra culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 87-106.

LIN, F.; YANG, K.; CHEN, C. The features and relationships of reasoning, proving and understanding proof in number patterns. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Dordrecht, v. 2, n. 2, p. 227-256, June 2004

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra**: perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 65-86.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

MUIR, T.; BESWICK, K. **Where dig I go wrong? Students' success at various stages of the problem-solving process**. 2005. Disponible en: <www.merga.net.au/documents/RP632005.pdf>. Acceso en: 26 abr. 2012.

NILSSON, P.; JUTER, K. Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, NJ, v. 30, n. 3, p. 194-205, Sept. 2011.

ORTON, A.; ORTON, J. Students' perception and use pattern and generalization. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 18th, 1994, Lisboa. **Proceedings…** Lisboa: University of Lisboa, 1994, v. 3, p. 407-414.

POLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1957.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28th, 2006, Mérida, México. **Proceedings...** Méjico: Universidad Pedagógica, 2006, v. 1, p. 2-21.

RADFORD, L. The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 30, n. 2, p. 2-7, Jul. 2010.

RADFORD, L. Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 35th, 2011, Ankara, Turquia. **Proceedings...** Turquia: Middle East Technical University, 2011, v. 4, p. 17-24.

ROIG, A. I.; LLINARES, S. Fases en la abstracción de patrones lineales. In: SIMPOSIO NACIONAL DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12th, 2008, Badajoz. **Proceedings…** Badajoz: Universidad de Extremadura, 2008, p. 195-204.

SAMSON, S.; SCHÄFER, M. Enactivism, figural apprehension and knowledge objectivation: an exploration of figural pattern generalization. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, Canada, v. 31, n. 1, p. 37-43, Mar. 2011.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992. p. 334-389.

SCHOENFELD, A. H. Reflections on problem solving theory and practice. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 10, n. 1-2, p. 9-34, 2013

SILVER, E. A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 29, n. 32, p. 147-164, Jun. 1997.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalizing problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 20, n. 2, p. 147-164, 1989.

STEELE, D. Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 40, n. 1, p. 97-110, Jan. 2008.

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

TÖRNER, G.; SCHOENFELD, A. H.; REISS, K. M. Problem solving around the world: Summing up the state of the art. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 39, n. 5-6, p. 353-473, Oct. 2007.

VERSCHAFFEL, L.; LUWEL, K.; TORBEYNS, J.; VAN DOOREN, W. Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. **European Journal of Psychology of Education**, v.24, n. 3, p. 335-359. 2009.

VILA, A.; CALLEJO, M.L. **Matemática para aprender a pensar**. O papel das crenças na resolução de problemas. São Paulo: Artmed, 2006.

YESILDERE, S.; AKKOÇ, H. Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, Netherland, v. 15, n. 3, p. 207-226, June 2012.

Submetido em Julho de 2012.
Aprovado em Fevereiro de 2013.