



Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

bolema@rc.unesp.br

Universidade Estadual Paulista Júlio de

Mesquita Filho

Brasil

Aroca, Armando

Diseños Prehispánicos, Movimientos y Transformaciones en el Círculo y Formación  
Inicial de Profesores

Boletim de Educação Matemática, vol. 29, núm. 52, agosto, 2015, pp. 528-548  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Rio Claro, Brasil

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291241073007>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Diseños Prehispánicos, Movimientos y Transformaciones en el Círculo y Formación Inicial de Profesores

## Prehispanic Designs, Movements and Transformations in the Circle and Initial Teacher Training

Armando Aroca\*

### Resumen

Inicialmente, se hizo un análisis de la lógica del diseño empleada en los platos o copas de las culturas prehispánicas de los Pastos o Quillacinges ubicadas al sur de Colombia. Los resultados de este acercamiento conllevaron a la construcción de algunas actividades en clases bajo el título de movimientos y transformaciones en el círculo. El objetivo principal fue plantear una propuesta metodológica de adaptación de diseños prehispánicos en un ambiente escolar, indistintamente del contexto regional de los diseños, así como también la presentación de una nueva propuesta de trabajo en regiones circulares de los movimientos, la homotecia y los frisos, diferente a la presentada tradicionalmente en los libros de textos escolares. En general, se parte de una investigación etnomatemática para terminar en una experiencia de aula con profesores en formación de matemáticas ubicados al norte de Colombia.

**Palabras-clave:** Diseños Prehispánicos. Lógica de Construcción. Actividades en el Círculo. Educación Geométrica. Obstáculos.

### Abstract

Initially, an analysis of the logic design was used on plates or cups of pre-Hispanic cultures of the Grass, or Quillacinges, located south of Colombia. The results of this approach led to the construction of some activities to classes under the heading of movements and transformations in the circle. The main objective was to raise a methodological proposal to adapt a pre-Hispanic designs school environment, regardless of the regional context of the designs, as well as the presentation of a new work proposal in circular regions of the movements, dilation and the friezes, different from traditionally presented in school textbooks. In general, it is part of a ethnomathematics research to finish in a classroom experience with math teachers in training located north of Colombia.

**Keywords:** Pre-Hispanic Designs. Logic Construction. Activities in the Circle. Geometric Education. Obstacles.

\* Estudiante de Doctorado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Cundinamarca, Colombia. Profesor Tiempo Completo Universidad del Atlántico (Uniatlántico), Barranquilla, Atlántico, Colombia. Dirección postal: Calle 74, n° 38-100, Bloque 3, Apartamento 901, Conjunto Residencial Altos de Betania, Barranquilla, Colombia. E-mail: armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co

## 1 Introducción

La naturaleza de la investigación es el análisis de una etnomatemática congelada en el diseño de copas y platos prehispánicos cuya muestra está en la Ceramoteca del Museo de Arqueología de la Universidad del Cauca, ubicado al sur de Colombia, y su respectiva incorporación en contextos escolares.

La justificación de la investigación se debió a la complejidad de los diseños, la potencialidad educativa que se percibe en ellos y porque son parte del patrimonio cultural de Colombia. Estos resultados se presentarán en la primera parte del artículo, posteriormente se hizo una especie de *transposición* con los resultados en una situación didáctica que involucró estudiantes de una Licenciatura en Matemáticas ubicada al norte del mismo país. Hacer dichas adaptaciones en contextos culturales diferentes, demostró que bajo estas condiciones no necesariamente deben estar sujetas al mismo contexto regional de origen, pero sí al contexto nacional por la implicaciones mismas de la identidad cultural. Los resultados en clases, al final, fueron significativamente importantes y desarrollados por medio de cinco actividades provenientes de los mismos diseños encontrados en los platos y copas, esto permitió conocer con mayor profundidad los conceptos y propiedades asociadas a los movimientos y transformaciones en el plano y la mismas culturas Pastos y Quillacincas.

### 1.1 Las culturas Pastos o Quillacincas y la lógica de diseño en los Platos o Copas

Se conocen como las culturas de Nariño a las culturas prehispánicas de los Pastos y los Quillacincas. Según Santacruz (2009), ellas habitaron la franja andina de lo que, actualmente, es el departamento de Nariño, al sur<sup>2</sup> de Colombia, y la provincia del Carchi al norte de Ecuador. Estas culturas se caracterizaron, entre otros aspectos, por su gran desarrollo pictográfico<sup>3</sup> en las superficies cóncavas de los platos o copas ceremoniales o de uso doméstico que fueron hechos en arcilla. Las muestras que se analizaron fueron tomadas del Museo de Arqueología de la Universidad del Cauca y su Ceramoteca. Además, se consideraron algunas imágenes del libro *El Arte de la Tierra – Nariño* del Fondo de Promoción de la Cultura (1992).

<sup>2</sup> Para una mejor comprensión de la ubicación espacio-temporal de estas culturas se puede consultar a Moreno (1971).

<sup>3</sup> Sin embargo, según Robles (2011), lo pictográfico, hace referencia a los gráficos por incisión sobre piedra, está más relacionado con lo escultórico, que con el dibujo mismo. En consecuencia, una expresión adecuada podría ser un gran desarrollo geométrico (gráfico).

La lógica de diseño en dichos objetos se expresa en cuatro momentos: la delimitación de la superficie puede ser toda la superficie cóncava del recipiente o aquella que es delimitada por las franjas de separación. Las formas, son las figuras que se pintan: triángulo, círculos, figuras irregulares que podrían ser zoomorfas o antropomorfas etc. Las configuraciones son los movimientos que se hacen con las formas, como giros, reflexión cóncava<sup>4</sup>, entre otros. El diseño es el resultado de una configuración o la combinación de varias de ellas<sup>5</sup>, ver Figura 1.



**Figura 1** - Visualización de las dimensiones secuenciales de la lógica de diseño. Pastos y Quillacings.

Las franjas de separación (FS), son los trazos que se pintan en el sentido del giro, 1) circulares, 2) en diagonal o 3) perpendicularmente a él, esto se hace con el propósito de delimitar la superficie cóncava y tener mayor control sobre ella para darles paso a las formas, configuración y al diseño. Los platos A, B y C de la Figura 2, muestran lo anterior.

A. FS circulares o en el sentido del giro



B. FS perpendicular al giro



C. FS en diagonal al giro



**Figura 2** - Los tres tipos de franjas de separación en la superficie cóncava de los platos.

## 1.2 Tipología

Da la impresión que los diseños responden a una tipología. Ver Cuadro 1.

<sup>4</sup> Se dirá que es una reflexión cóncava, y no un giro, cuando una figura de un sector le sirve a un pintor para hacer otra en la superficie interna y opuesta de la vasija. La forma para generar la simetría, no es mostrando la sensación de movimiento, sino de una clase de reflexión, la cual se hace sobre una superficie cóncava. En Lévi-Strauss (1995), quien introduce la teoría de Franz Boas sobre el *desdoblamiento de la representación*, tal vez se pueda encontrar cierta similitud con lo aquí propuesto. Conceptos como *perfíles adyacentes* o *decorados dobles*, podrían merecer un nuevo análisis a la luz de los diseños en los platos nariñenses, pues dicha teoría sería parcial o incompleta para la interpretación de estas culturas.

<sup>5</sup> Se precisa que, en algunos diseños, las cuatro dimensiones descritas no siempre se evidencian.

Tipología		Característica
<b>Tipo I.</b>		Diseños que solo involucran figuras zoomoforjas, antropoformas o abstracciones de objetos reales o imaginarios.
<b>Tipo II.</b>		Diseños que involucran la intención de mostrar sólo movimiento circular.
<b>Tipo III.</b>		Diseños que involucran rotaciones perpendiculares y traslación circular.
<b>Tipo IV</b>	<b>Tipo IV-1.</b>	Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación continua en la banda cóncava).
	<b>Tipo IV-2.</b>	Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación discontinua en la banda cóncava).
<b>Tipo V</b>	<b>Tipo V-1.</b>	Diseño con los opuestos directamente. Flecos.
	<b>Tipo V-2.</b>	Reflexión cóncava rotada.
<b>Tipo VI.</b>		Con formas que se contraen sucesivamente.
<b>Tipo VII.</b>		Diseños que se combinan entre los Tipos.

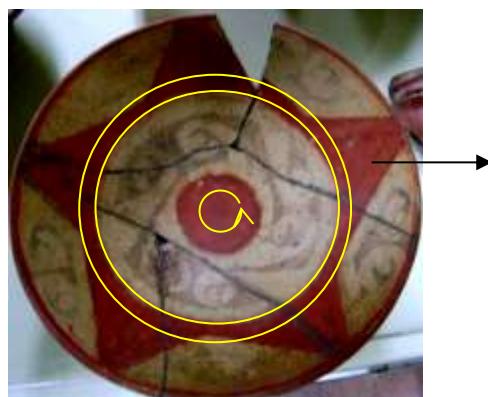
**Cuadro 1** - Tipología de la configuración en los diseños.

Esta tipología, descrita en el Cuadro 1, se muestra a continuación. Figura 3 hasta la Figura 10.



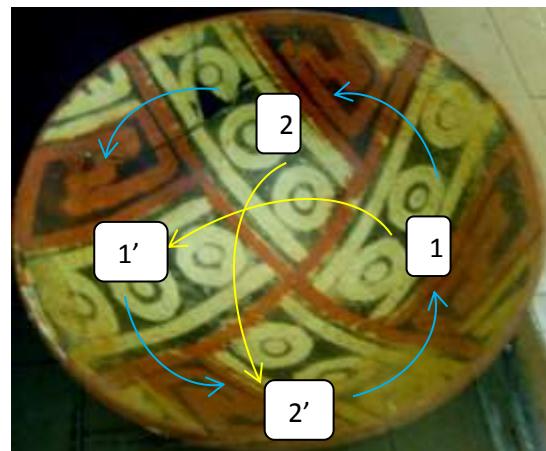
**Figura 3** - Tipo I. Diseños que solo involucran figuras zoomoforjas, antropoformas o abstracciones de objetos reales o imaginarios.

Además de la inclusión de una franja de separación circular o en el sentido del giro; en la Figura 4 todas las formas pintadas son impares y, por ende, no hay una relación uno-uno con algún opuesto para establecer una reflexión cóncava.



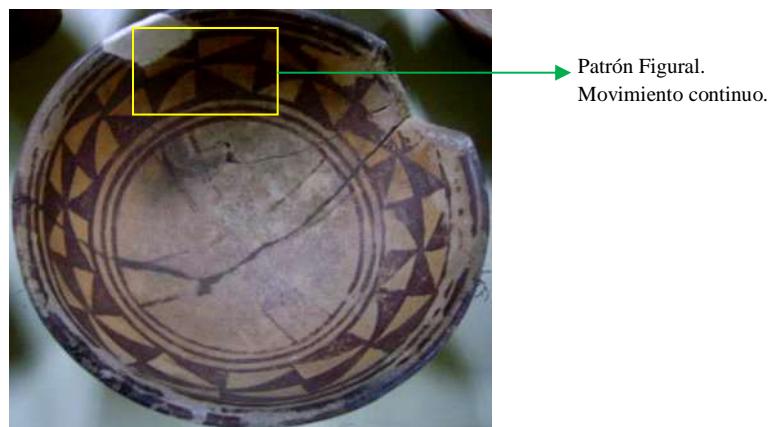
**Figura 4** - Tipo II. Diseños que involucran la intención de mostrar sólo movimiento circular.

Al analizar la Figura 5, se encuentra una diferencia significativa entre la tipología III y IV, pues en el diseño de dicha figura era claro que el pintor hizo primero los sectores [1] y [2] ó [1'] y [2'] ó [1] y [2'] ó [1'] y [2].



**Figura 5** - Tipo III. Diseños que involucran rotaciones de 90° y traslación circular.

Si partimos de la primera dupla, entre otras posibles secuencias de desarrollo del diseño, y suponiendo que primero se hizo el sector [1] entonces el artesano giró éste sector para obtener a [2] y luego haría la reflexión cóncava, de cada uno de los dos sectores en los respectivos [1'] y [2']. Para el siguiente tipo, hay dos clases de movimientos, uno donde el patrón figural hace el movimiento con trazos contiguos o comunes; y el otro donde se hace de manera discontinua. El primer caso lo muestra la Figura 6-a y el segundo la Figura 6-b.



**Figura 6a** - Tipo IV-1. Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación continua en la banda cóncava).

El segundo caso es cuando el patrón figural no tiene trazos contiguos en común.



**Figura 6b** - Tipo IV-2. Diseños que solo implican movimientos circulares (traslación discontinua en la banda cóncava).

Para el Tipo V, los diseños se realizan con los opuestos. Reflexión cóncava directa o rotada. En este tipo de diseños se encuentran al parecer dos clases, una que toma la misma posición del lado opuesto. Como se muestra en la siguiente figura.



**Figura 7** - Tipo V-1. Diseño con los opuestos directamente.

Dicho diseño tiene opuestos directos, porque no se ve la intención de mostrar la sensación de movimiento circular, sino la de una reflexión cóncava. El otro caso, es donde el opuesto es diseñado aparentemente a partir de un movimiento circular.



**Figura 8** - Tipo V-2. Reflexión cóncava rotada.

Este Tipo V-2, es una de las combinaciones más complejas, porque el pintor partió solo en dos la superficie cóncava de la copa y por lo tanto su intención no era mostrar movimiento. Como se podrá notar el color rojo se aplicó al final, incluso eclipsando algunas formas. En este caso, el rojo tomó el papel de forma-ornamental.



**Figura 9** - Tipo VI. Con formas que se contraen sucesivamente.

La Figura 9, muestra un círculo vicioso en cuanto a la contracción sucesiva de una forma (zoomorfa); este tipo de figura es el que se podría considerar como uno que carece de regularidad, pues no es muy común encontrarlo, sin embargo, el aporte pedagógico que tiene es bien interesante y valdría la pena auscultarlo más.



**Figura 10** - Tipo VII. Diseños que combinan los Tipos.

En la parte central del plato a la izquierda de la Figura 10, hay una configuración cuyo movimiento no es circular como el que sí se observa cerca del labio del recipiente. En el plato a la derecha de la misma figura, hay en el centro una forma zoomorfa y al alrededor otras formas con movimiento circular, lo que evidencia combinación de los Tipos descritos.

## **2 La diferencia entre los diseños artísticos y los complejos en configuración, y el paso a lo escolar**

Contrario a lo que se puede pensar, los diseños más complejos en configuración no siempre son los de mayor valor artístico, pues las formas y configuración involucradas pueden llegar a ser pocas. Comparemos el plato de las arañas y el que le sigue en descenso, ver Figura 11. El primero, tiene franjas de separación que se van duplicando, en una sucesión de 1-2-4 franjas y las franjas de 4 son cruzadas continuamente en la dirección del giro por dos franjas oblicuas más. Pero la única forma empleada es zoomorfa, una araña, la cual implica mucho trabajo y cuidado para su reproducción, la configuración es basada en solo giros que son tres en total. Una araña que gira sobre su propio eje (el centro de vasija), luego se cuadriplica la araña y éstas, a su vez, se duplican para conformar ocho arañas. Todas muestran la sensación de movimiento girando en sentido de las manecillas del reloj. En consecuencia, entre mayor sea la repetición de formas, más belleza se le confiere al diseño, pero no tanto complejidad a la configuración. Después de analizar los diseños ¿qué podríamos hacer con ellos?, ¿solo apreciar su valor artístico – geométrico y su valor cultural?, No. La Figura 11 muestra una

alternativa, y es pasar estos diseños al plano y explorar el potencial que tendrían al crear un nuevo ambiente de configuración.



**Figura 11** - El paso de diseños prehispánicos cóncavos al plano

Otro aspecto a valorar en las posibilidades escolares, es que el espacio de trabajo está delimitado por una circunferencia y esto trajo consigo un ambiente nuevo y diferente (nuevas propiedades y movimientos). Esto se mostrará, más adelante, con la adaptación de la tipología de los diseños en el ambiente universitario.

### 3 Investigaciones de referencia

No es la primera vez que, en Colombia, se toman objetos o diseños prehispánicos o de culturas indígenas para tenerlos como referencia en el salón de clases de matemáticas escolares o de matemáticas en la universidad. Se pueden destacar los trabajos de Higuera (1994) en torno a las posibilidades pedagógicas de la Yupana, los trabajos de *Organización*

*Indígena de Antioquia* (2000) y sus esfuerzos por mejorar el currículo matemático con unas prácticas, lenguajes y saberes más acordes con su cultura.

Los análisis de Trejos (2002) en diseños sobre piedra; la propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural en Aroca (2009) basada en el análisis de 16 Figuras Tradicionales que se tejen en las mochilas arhuacas en la Sierra Nevada de Santa Marta. En Albis (1995, 1986, 1987, 1990), hay incluso investigaciones que tomaron como objeto de estudio la orfebrería de los Pastos y Quillacinges, pero interpretada desde las matemáticas puras y en Albis y Valencia (1990) se analizó la cerámica de la región central de Panamá. Hay una diversidad significativa de tesis en niveles de pregrado, maestría o doctorado que se han enfocado en este mismo sentido<sup>6</sup>.

En cuanto al ámbito internacional, el panorama también es significativo, pues hay experiencias de aula similares a esta como Massarwe et al. (2010), pero sin un análisis detallado del objeto o pensamiento a incorporar. Sin embargo, uno de los autores, tal vez más representativo en el ámbito internacional, es Paulus Gerdes. Sus investigaciones, como Gerdes (1988a, 1988b, 1990, 1994, 1995a, 1995, 1996, 2003, 2006), muestran relaciones entre etnomatemáticas y educación matemática y la puesta en escena, en el ámbito escolar, de prácticas, lenguajes y saberes matemáticos de culturas africanas. A Gerdes incluso se le reconoce por su posición política de reivindicar pensamientos ancestrales que también han desarrollado pensamientos numéricos, espaciales, estadísticos, entre otros, que no tienen por qué supeditarse a una sola forma de pensamiento matemático que Emmánuel Lizcano llamó las matemáticas de la tribu europea.

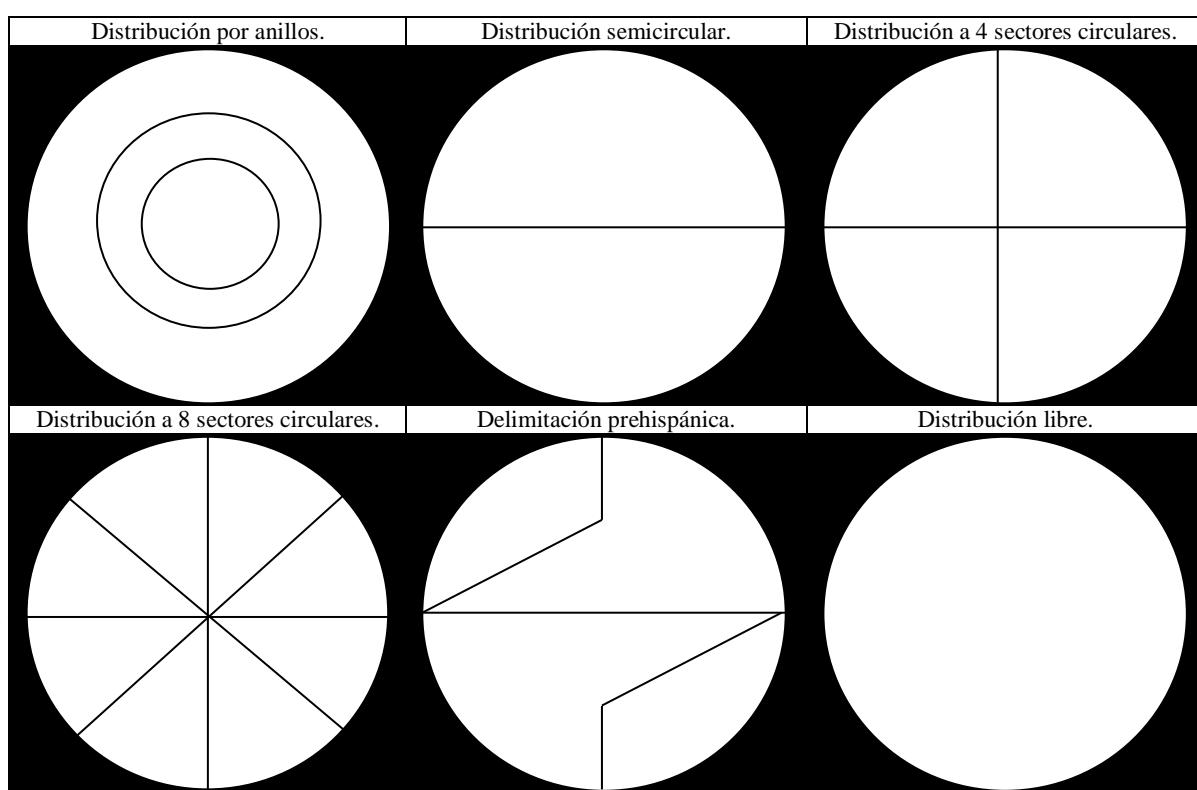
#### **4 Aspectos problemáticos, metodológicos, actividades e indicaciones**

¿Existe otra forma de enseñar los movimientos, frisos y homotecias en el plano? Normalmente, los libros de textos escolares presentan una sola alternativa de enseñar dichos conceptos, los problemas existentes en el aprendizaje de estos temas están relacionados a la trayectoria de objetos, la clasificación misma de los movimientos, transformaciones o tipos de simetrías, entre otros, cuyos errores y dificultades se encuentran detallados en trabajos como los de Moyer (1974) y Schultz (1977). Consideramos que al delimitar el plano, en este caso por una región circular, se presenta otra alternativa que los estudiantes entran a explorar con mayor interés, convirtiéndose, así, en un campo de trabajo aún por explorar.

<sup>6</sup> Para una mejor ilustración se puede consultar la página de la Red Latinoamericana de Etnomatemáticas, en el link [www.etnomatematicas.org](http://www.etnomatematicas.org)

Las actividades en clases se realizaron en dos sesiones, cada una de dos horas con estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, tanto de la jornada diurna como nocturna, y el método empleado fue la observación participante. A todos los estudiantes se les pidió que llevaran colores e instrumentos geométricos para el desarrollo de las actividades. El reto era introducir a una nueva forma de trabajo en el salón de clases basada en la tipología de los diseños ya descrita. Pero esta nueva forma no podía ser totalmente libre o espontánea, pues desde algún referente debían familiarizar los estudiantes. No se trataba solo de imponer o validar el pensamiento geométrico de las culturas prehispánicas de Nariño por medio de la matemática escolar o la de ellas, sino de buscar similitudes; así como también la construcción de una situación didáctica que permitiera que los estudiantes comprendieran los conceptos geométricos escolares desde otra alternativa. Lo interesante de la experiencia fueron las sorpresas que se encontraron y que, aún hoy, siguen siendo motivo de análisis. A los estudiantes se les pidió que escribieran tanto por qué habían fracasado en el diseño y cómo podían superar el obstáculo.

Se decidió, entonces, trabajar varias configuraciones, teniendo presente que lo importante es delimitar internamente el círculo para generar la simetría en el diseño. Fue así como se plantearon las siguientes delimitaciones que muestra la Figura 12.



**Figura 12** - Delimitaciones o franjas de separación establecidas en clases.

Establecidas las delimitaciones, el paso era determinar cuáles actividades se iban a desarrollar, teniendo en cuenta la tipología descrita y que ellas no podían superar las dos horas de clase, más las actividades extra clases.

## 5 Las actividades en clase

### 5.1 La primera sesión. Movimientos en el plano, homotecias y frisos

Había que determinar cuáles conceptos de la geometría escolar podían tener cierta similitud con los conceptos que los Pastos y Quillacings desarrollaron en sus diseños, teniendo en cuenta el tema de las similitudes que plantea Bishop (1999); fue así como en la primera sesión se hizo un repaso de los movimientos en el plano, homotecias y los siete frisos. Se escogieron estos tres temas porque, a juicio del autor, eran los que tenían cierta familiaridad con los previamente analizados.

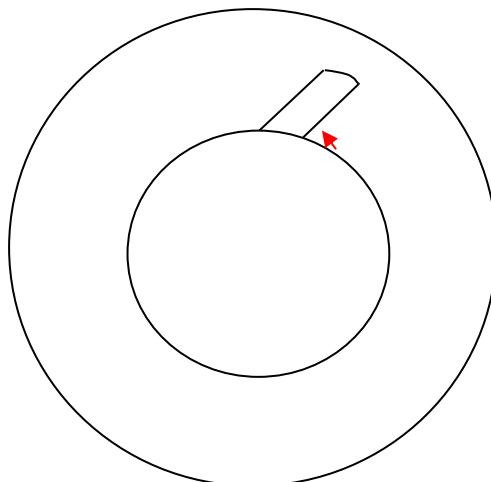
### 5.2 Segunda sesión. Movimientos y transformaciones en el círculo

¿Por qué el círculo y no una taza o una superficie cóncava? Se trataba de definir cuáles procesos de transformación o movimientos se iban a desarrollar más qué se emplearía en el salón de clases, es decir, con cuáles materiales y técnicas se iba a trabajar, a sabiendas que no podíamos trabajar con arcilla, un horno y la reproducción de las técnicas y empleos de tintas prehispánicas. Lo que se decidió, para efectos prácticos, fue trabajar tanto en el plano (con lápiz, papel e instrumentos geométricos) delimitado por una circunferencia de radio finito y pequeño, así como en una superficie que se acercara a la forma de un plato o una taza y cuyo material fuese económico, por ello se escogió el plato de poliestireno expandido.

Fueron, entonces, cinco actividades desarrolladas en esta segunda sesión, y cuyos resúmenes se presentan a continuación. En ellas se evidenciaron algunos problemas u obstáculos que emergieron al hacer construcciones geométricas o movimientos sobre la curva, haciendo homotecias en sectores circulares o en anillos concéntricos, tomando ejes de reflexión oblicuos, haciendo reflexiones cóncavas o rotadas, elaborando o adaptando algunos frisos sobre una curva o circunferencia.

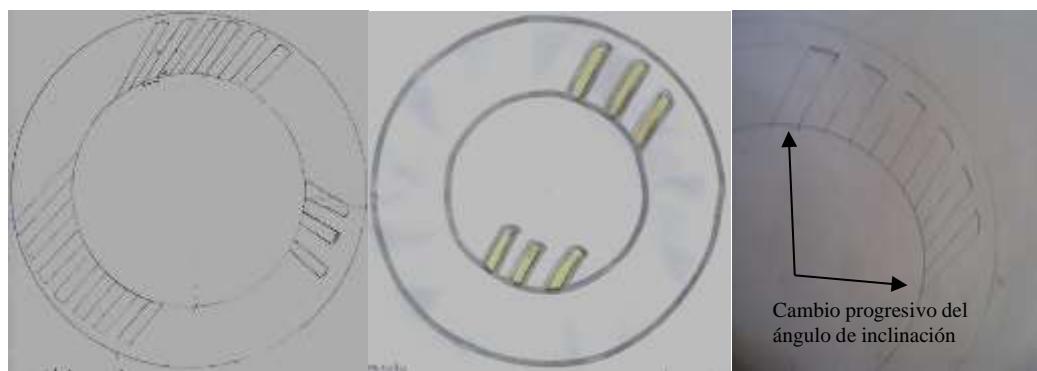
#### 5.2.1 El Poste (La actividad que aparentemente sería la más fácil de todas)

Se les pidió a los estudiantes que hicieran dos circunferencias concéntricas de radios distintos, y que esto ocupara la mayor cantidad posible de la hoja A4 (la idea era hacer algo similar al diseño Tipo II). Luego sobre la curva de esta segunda circunferencia se pidió que se hiciera el poste. Tal como se muestra en la Figura 13.



**Figura 13** - Descripción de la actividad 1. El poste.

Posteriormente, se pidió que se *trasladara* el poste sobre la circunferencia interna, bajo unas condiciones: Que los movimientos fuesen isométricos, esto implicaba algo esencial en la actividad y era mantener el ángulo de inclinación del poste. Se advirtió que, probablemente, al hacer el cierre la distancia de separación no se mantendría, porque para este primer evento dicha distancia no se había considerado con respecto a los 360°. Para la primera reproducción, varios estudiantes pidieron que el ángulo de inclinación del Poste fuese de 90° lo cual facilitaría la reproducción y el movimiento circular, pero esto se negó. Al cabo de unos minutos, sucedió algo sorprendente, y fue que la mayoría, sino todos, comenzaron a notar que el poste, en vez de continuar su inclinación inicial, comenzaba a inclinarse hacia adentro, es decir, el ángulo agudo que está marcado en la Figura anterior, poco a poco comenzaba a convertirse en obtuso, y por ende el poste comenzaba a *levantarse*. Veamos, por ejemplo, lo que argumentó Ronald, uno de los estudiantes: *En este método no tuve en cuenta el grado de inclinación de cada poste, procedí a hacerlos paralelos al primero, luego me di cuenta que era un error, ya que las partes de abajo quedarían dentro de la circunferencia.* (Imagen izquierda de la Figura 14, que muestra dos primeros intentos).



**Figura 14** - Primeros intentos de tres estudiantes para hacer el Poste.

De los 23 informes que se presentaron, a pesar de disponer de ocho días para corregir la actividad, cuatro estudiantes decidieron no entregarla, nueve estudiantes cambiaron la forma del Poste y de estos seis estudiantes decidieron mantener los lados paralelos y los unieron con la curva de la circunferencia externa. Esta unión, sin duda, facilitaba la actividad. Otros estudiantes decidieron quitar el ángulo agudo de inclinación y convertirlo en uno recto, pues según ellos no podían hacerlo con dicho ángulo.

Con la actividad que describe Cindy se muestra un primer intento y la Figura que se esperaba que todos los estudiantes pudieran hacer en clases. Lo expresado por ella fue lo siguiente: *No resultó debido a la dificultad que había al momento de mantener la secuencia y la misma distancia entre las figuras, a su vez noté que a medida que avanzaba se iba disminuyendo el tamaño de la figura donde se hizo notorio el fracaso en esta. Para lograr obtener la figura correcta fue necesario utilizar materiales geométricos, métricos y tener disposición.*

### 5.2.2 El Banderín

Hacer el Banderín era hacer un radio y hacerle una banderita al final, reproducirlo 13 veces y que quedarán simétricamente distribuidas. Para iniciar, se esperaba que los estudiantes dividieran  $360^\circ$  entre trece e hicieran los Banderines, pero esto no pasó en la inmensa mayoría. En esta actividad, el color se empleaba como forma, esto se puede evidenciar en la Figura 16, donde los diseños se observan distintos y los estudiantes veían características del diseño y surgían las primeras abstracciones y generalizaciones.



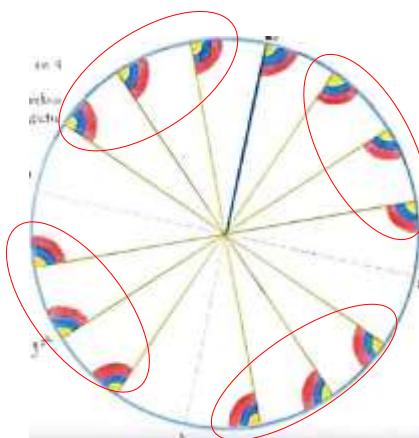
**Figura 15** - Algunos diseños corregidos del Banderín.

Para esta actividad se comenzaba a notar otro fenómeno, y era la superposición de la percepción sobre el empleo de los instrumentos geométricos o el inadecuado empleo de los mismos, como pasó para el Poste. Es decir, la aproximación o estimación vía observación eran los métodos de construcción geométrica más empleados que los analíticos. Pero para la corrección de la misma, se recurrió a los analíticos. Algunos de estos procesos de construcción intuitivos se pueden leer a continuación. Mariela, por ejemplo, delegó la división solo al empleo del compás: *El método utilizado fue la aproximación por medio del compás, tomé una medida para dividir, quedando la última bandera un poco más pequeña.* Yuli, por su parte, escribió lo siguiente: *Utilicé una medida de 4 cm entre banderín y banderín. Pero al final tenía más de 13.* Este método fue empleado también por algunos estudiantes de la jornada nocturna y que se visualiza en la Figura 17.



**Figura 16** - Actividad en clase y distribución asimétrica del Banderín empleando lápiz y regla.

El caso de Juan merece un poco de más atención: *Divido el círculo en 4 cuadrantes de 90°. Luego trazo un banderín guía, que será el neutro ubicado en 0°. Despues los 12 banderines restantes los dividiré en 4 cuadrantes (3 en cada cuadrante). Por último ubico los Banderines del primer y segundo cuadrante y los del 3<sup>er</sup> y 4<sup>to</sup> serán reflejados por el 1<sup>er</sup> y 2<sup>do</sup>.* Lo que Juan propuso se visualiza en la Figura 17.

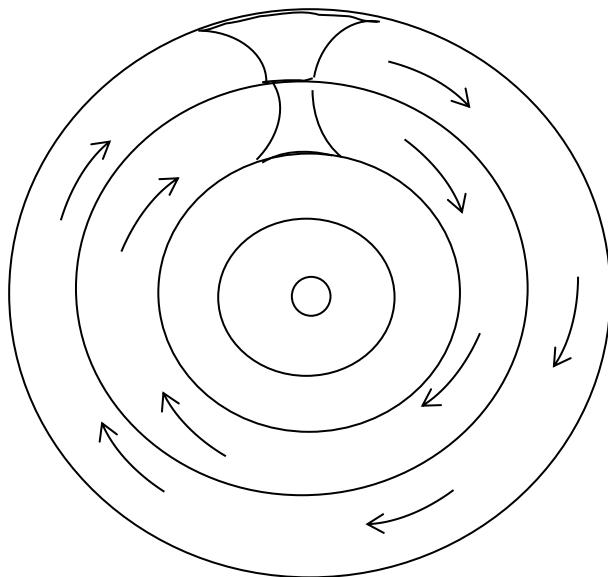


**Figura 17** - Diseño elaborado por Juan.

Este diseño, sin duda, evidenció lo que algunas investigaciones ya han tratado sobre el empleo de algunas palabras y lo que entienden los estudiantes por ellas, es decir, por distribución simétrica.

### 5.2.3 La Tanga

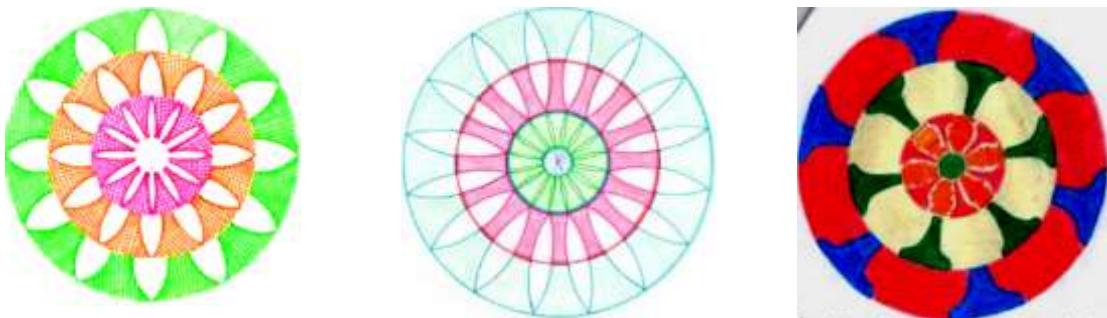
Uno de los propósitos, en esta actividad, era comenzar a aumentar el grado de complejidad en el diseño, haciendo adaptaciones del Friso de las Traslaciones y la Homotecia, ver Figura 18. Se pidió que se hiciera la reproducción de una Tanga en el anillo externo y luego esto mismo se hizo en los anillos que estaban hacia adentro pero con la condición que la Tanga se fuera invirtiendo y que se mantuviera en cada anillo el número de reproducciones.



**Figura 18** -La actividad de la Tanga. Adaptación del Frisos de las Traslaciones y Homotecias.

En esta actividad se volvió a verificar que un alto porcentaje de estudiantes cambia las condiciones iniciales de trabajo, esto con el propósito de poder cumplir con la actividad. Se

podrá notar que solo el diseño del medio de la Figura 19, era “el que se esperaba”. Sin embargo, este cambio de condiciones por parte de ellos condujo a tanto a la aplicación de conceptos geométricos como a la construcción de diseños artísticos.



**Figura 19** - Algunos diseños de la Tanga, hechos por estudiantes.

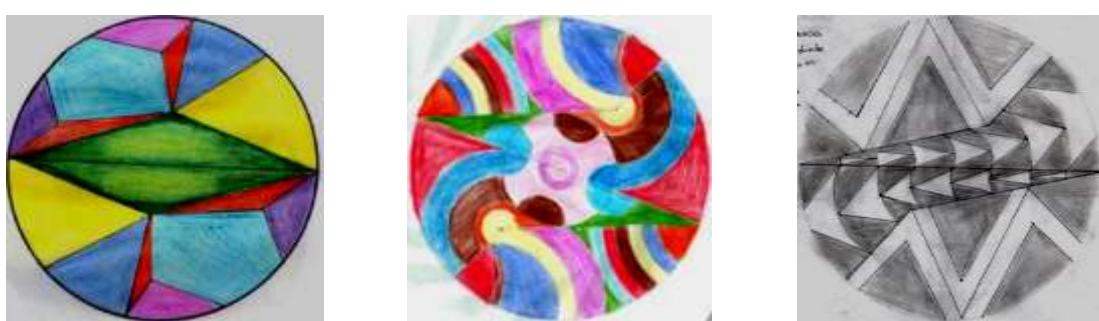
#### 5.2.4 Delimitación prehispánica, adaptación del diseño Tipo V-2

La imagen de la izquierda de la Figura 20, muestra la delimitación de esta nueva actividad que se llamó *Delimitación Prehispánica*. Se trataba de hacer un diseño en el sector 1 y reproducirlo en 1', lo mismo era para 2 en 2'. Pero se puso como condición adaptar algún movimiento, homotecia o frisos en los sectores iniciales, 1 y 2.



**Figura 20** - Delimitación prehispánica. Presentación y desarrollo en clases.

En lado derecho de la Figura 20 se muestra, también, las adaptaciones que una estudiante hizo de la homotecia y giro en los sectores 1 y 1'. Otros diseños completos hechos en esta actividad son los que se muestran en la Figura 21.

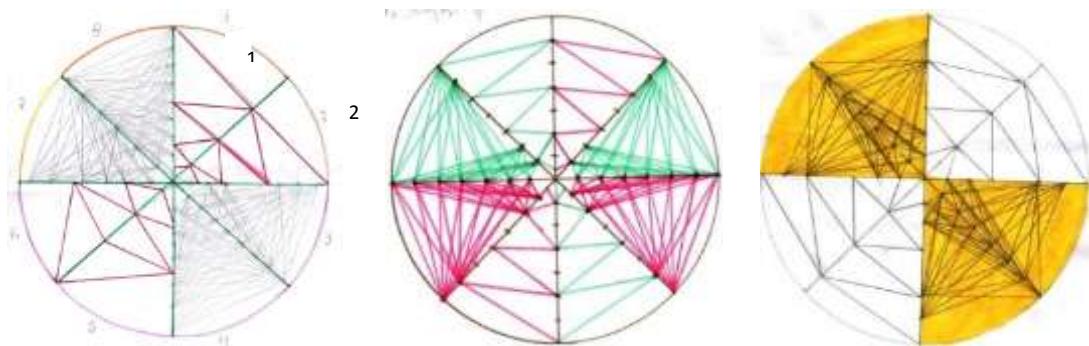


**Figura 21** - Algunos diseños terminados con Delimitación prehispánicas.

Puesto que para el desarrollo de esta actividad, los estudiantes no tenían la presión del tiempo, pudieron realizar diseños con un alto valor artístico y complejidad geométrica.

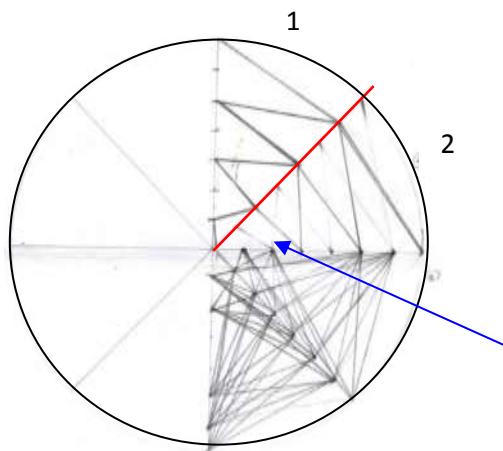
### 5.2.5 La Pizza

Se llamó así porque un estudiante le puso dicho nombre al dividir el círculo en partes iguales. Algunos diseños elaborados fuera de clase se muestran en la Figura 22.



**Figura 22** - La Pizza. Algunos diseños corregidos ocho días después de la actividad en clases.

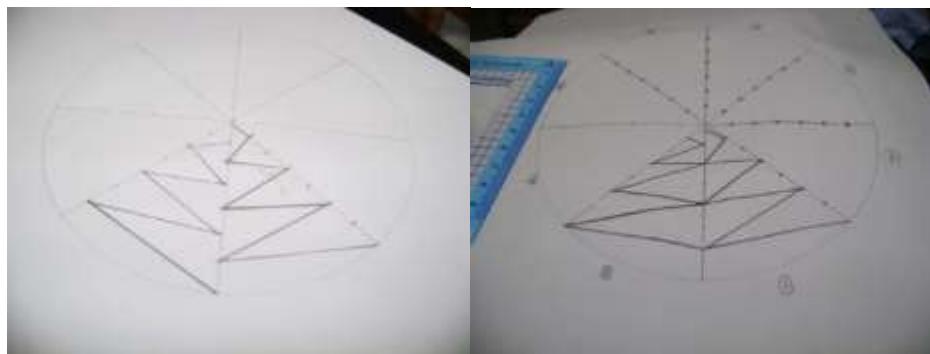
Se tenía planeado ver qué sucedería cuando el eje de reflexión no fuera ni horizontal ni vertical, sino oblicuo, pero además que la actividad estuviera delimitada por una región circular. Entonces, se les pidió a los estudiantes que hicieran los trazos que se muestran en el sector 1 y que los reflejaran en el sector 2, tomando como referencia el radio que había entre ellos, ver Figura 23. Los estudiantes podían simplemente girar la hoja y tener entonces el eje de reflexión vertical, pero en vez de hacer esto, la mayoría lo que hizo fue girar el cuello o el tronco de sus cuerpos.



Fueron varios los intentos que los estudiantes hicieron en clases, para llegar a un diseño simétrico. Algunos desistieron de la actividad y por ello, se les pidió que en la próxima clase trajeran el diseño completo, lo cual fue exitoso.

**Figura 23** - Un diseño en clases.

Este problema con eje de reflexión oblicuo, más la *caída* que había por ser la construcción dentro de un círculo, implicaron errores en las construcciones como se puede notar en la Figura 24.



**Figura 24** - Algunos diseños errados en un primer intento.

La mayoría de los estudiantes manifestaron que siempre habían hecho reflexiones con ejes verticales u horizontales, pero que nunca con uno oblicuo, por lo que se les dificultó hacer los movimientos. La conclusión a la cual se llegó sobre este problema, con eje de reflexión oblicuo más una región plana circular de trabajo, es que los puntos de referencia para hacer la reflexión no son los mismos cuando se hace la tradicional reflexión vertical u horizontal. Da la impresión que el eje no es tenido en cuenta y por ello la referencia de la reflexión se pierde. No obstante, falta aún por explorar las ventajas o desventajas de la Pizza para explorar la homotecia. El potencial es enorme.

### 5.2.6 La tarea en el plato de poliestireno expandido o de icopor

El plato de poliestireno expandido es el mismo que emplean en la Cafetería de nuestra Universidad para servir el almuerzo, tiene un diámetro de 26 cm y una altura de escasos 4 cm y, debido a su bajo costo, fui a la Plaza de Mercado para adquirir el número suficiente para mis estudiantes. La tarea consistió en hacer el mejor de los diseños a partir de los que se había aprendido en clases. La mayoría de estos trabajos tuvieron un valor artístico y complejidad geométrica admirable. Aquí el color jugaba un papel esencial, ver la Figura 25.





Figura 25 - Algunos diseños en el plato de icopor.

El papel que se le confiere al color no es solo ornamental ni simbólico, pues dependiendo su aplicación se puede ver otro diseño, menos el que se esperaba. Según Velandia (1994), el color es forma y también es estructura (diseño). Cuando el color se mira como forma se descubre configuración y estructura lo cual evidencia un proceso de abstracción y modelamiento del objeto físico o mental que ha sido representado. El color también tiene su propia configuración simbólica que, a la vez, construye el simbolismo de la forma que él hace visible. En síntesis, el color tiene su propio lenguaje tanto en su estructura como en su simbolismo, vincular el color como forma en las clases de geometría crea una exploración sin límites.

## 6 Algunas conclusiones

1. Los profesores en formación vieron como novedosas las actividades realizadas en el salón de clases, se interesaron por conocer sobre las culturas Pastos y Quillacingas y pudieron construir una noción sobre la lógica que dichas culturas emplearon en los diseños decorativos de los platos y copas. El llevar las transformaciones, movimientos, homotecias y frisos a superficies delimitadas circularmente, lo cual fue inspirado en los diseños de los Pastos y Quillacingas, implicó que los estudiantes pudieran determinar mejor las propiedades de dichos conceptos geométricos y se construyeron otras ideas y regularidades que no están presentes en los libros de textos escolares.

2. Hacer movimientos de la unidad de trabajo, la figura, sobre una curva, genera un problema en la comprensión de éste movimiento específico, pues la geometría escolar ha privilegiado solo aquellos movimientos que se realizan horizontal, vertical u oblicuamente. Hacerlos sobre la curva, es cambiar una costumbre metodológica escolar.

3. Los colores, al aplicarse, pueden superar la expectativa que tienen el estudiante y el profesor en torno a la configuración. Aplicar colores, incluso uno solo, puede generar una

nueva configuración o diseño. Dota a la configuración geométrica de una perspectiva artística que antes no tenía con fuerza, incluso el color entra como forma en la configuración y hace que se supere la mirada ornamental que se le confiere normalmente a los artefactos artesanales.

4. Adaptar los movimientos en el plano, la homotecia y los frisos en regiones planas que no sean abiertas como una región circular de radio  $n$ , puede conllevar a explorar una geometría que, hasta el momento, empieza a develar sus propiedades y características y puede resultar interesante en la formación inicial de maestros y en diversos procesos de investigación.

5. Se mostró *una* alternativa de investigación de campo y trabajo en el aula de clases del Programa Etnomatemática.

## Referencias

ALBIS, V. Arte prehispánico y matemáticas. **Revista de la Universidad Nacional de Colombia**, Bogotá, Segunda Época, v. 2, n. 7, p. 29-34, jun. 1986.

ALBIS, V. Las proporciones del sol de los pastos. **Boletín de Matemáticas**, Bogotá. v. 21, n. 2-3, p. 110-134, jun. 1987.

ALBIS, V. La división ritual de la circunferencia. Una hipótesis fascinante. **Matemáticas: Enseñanza Universitaria**, Cali, v.1, n. 1, p.13-28, jun. 1990.

ALBIS, V. Los grupos de simetría y la arqueología. **Revista de ciencia y tecnología de Colombia**, Bogotá, v. 13, n. 2, p. 9-13, jun. 1995.

ALBIS, V.; VALENCIA, J. Una aplicación de los grupos de simetría a la conformación de períodos y subperiodos estilísticos en la cerámica de la región central de Panamá. **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, Bogotá, v. 17, n. 67, p. 703-714, jun. 1990.

AROCA, A. **Geometría en las mochilas arhuacas**. Por una enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva cultural. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle, 2009.

BISHOP, A. **Enculturación matemática**. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Buenos Aires: Ed. Ibérica S.A./ Paídos, SAICF, 1999.

FONDO DE PROMOCIÓN DE LA CULTURA. **Arte de la Tierra – Nariño**. Colección Tesoros Precolombinos. Santafé de Bogotá: Banco Popular, 1992.

GERDES, P. On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 19, n. 1, p. 3-22, mar. 1988a.

GERDES, P. On culture, geometrical thinking and mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 19, n. 3, p. 137-162, mar. 1988b.

GERDES, P. **Vivendo a matemática**: Desenhos da África. Sao Paulo, Brazil: Editora Scipione, 1990.

GERDES, P. **Sona geometry:** reflections on the sand drawing traditions of peoples of Africa south of the equator. Maputo, Mozambique: Universidade Pedagógica, 1994.

GERDES, P. **Women and Geometry in Southern Africa.** Maputo: Globo, 1995.

GERDES, P. **Ethnomathematics and education in Africa.** Stockholm: University of Stockholm Centre of International Education, 1995a.

GERDES, P. Ethnomathematics and mathematics education. In: Bishop, et al. (Org.). **International handbook of mathematics education.** Dordrecht: Kluwer, 1996, p. 909-943.

GERDES, P. **Awakening of Geometrical Thought in Early Culture.** Estados Unidos: MEP Publications, 2003.

GERDES, P. **Sona Geometry from Angola:** mathematics of an African tradition. Milan: Polimetrica International Scientific Publisher, 2006.

HIGUERA, C. La Yupana: un ejemplo de lo histórico como elemento pedagógico. **Lecturas Matemáticas**, Bogotá, v. 15, n. 1, junio. p. 63-78, sep. 1994.

MASSARWE, K. et al. An Ethnomathematics Exercise in Analyzing and Constructing Ornaments in a Geometry Class. **Journal of Mathematics and Culture**, Toledo, v. 5, n. 1, p. 1-20, agos. 2010.

LÉVI-STRAUSS, C. **Antropología estructural.** España: Ediciones Paidos, 1995.

MORENO, E. Noticias sobre los primeros asentamientos españoles en el sur de Colombia. **Revista Española de Antropología Americana**, España, v. 6, n. 1, p. 423-438, oct. 1971.

MOYER, J. C. **An investigation into the cognitive development of euclidean transformations in young children.** Ann Arbor, EE.UU.: Univ. Microfilms, 1974.

ORGANIZACIÓN INDÍGENA DE ANTIOQUIA. **Curriculum Dule.** Antioquia: Asociación de Cabildos Indígenas de Antioquia, 2000.

ROBLES, R. **Sensibilidad estética entre saberes científicos y artísticos.** Cali: Editorial Universidad Santiago de Cali, 2011.

SANTACRUZ, H. **Cómo se poblaron los territorios pasto.** 2009. Disponible en: <<http://www.monografias.com/trabajos-pdf2/como-poblaron-territorios-pasto/como-poblaron-territorios-pasto.pdf>>. Acceso el: 20 de enero de 2014.

SCHULTZ, K. A. **Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development.** Ann Arbor, EE.UU.: Univ. Microfilms, 1977.

TREJOS, H. **Matemática en la roca:** la piedra y la mente precolombina en el alto magdalena, Colombia. Fondo mixto de cultura y las artes FOMCULTURA Huila. Red Latinoamericana de Etnomatemática. 2002 Disponible en: <<http://etnomatematica.org/articulos/trejos1.pdf>> . Acceso el: 17 de enero de 2014.

VELANDIA, C. **San Agustín. Arte, estructura y arqueología.** Santafé de Bogotá: Presencia, 1994.

**Submetido em Maio de 2014.**  
**Aprovado em Julho de 2014.**