Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

Gómez Alfonso, Bernardo; Sanz García, María Teresa; Huerta Gabarda, Irene
Problemas Descriptivos de Fracciones
Boletim de Educação Matemática, vol. 30, núm. 55, agosto, 2016, pp. 586-604
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

Problemas Descriptivos de Fracciones*

Descriptive Problems of Fractions

Bernardo Gómez Alfonso**

María Teresa Sanz García***

Irene Huerta Gabarda****

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre los problemas verbales de fracciones que ha transmitido la tradición escolar. Se trata de problemas descriptivos, porque su contexto es una historieta o narración pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica. Mediante el análisis didáctico e histórico-epistemológico se aporta claridad metodológica sobre estos problemas de fracciones, al identificar sus distintos tipos, sus estructuras, sus lecturas analíticas, sus reglas, fórmulas y métodos de resolución.

Palabras-clave: Historia y Educación Matemática. Análisis Didáctico e Histórico-Epistemológico. Resolución de Problemas. Problemas Descriptivos de Fracciones.

Abstract

This paper presents a study about fractions word problems, which the school tradition has transmitted. They are descriptive problems because their context is a story or a pseudorealistic narrative not intended to address any truly practical situation. Through the rational and historical-epistemological analysis of these issues, methodological clarity is provided on these fractions issues, identifying their types, structure, analytical reading and methods of resolution.

Keywords: History and Mathematics, Didactical Analysis and Historical-Epistemological Analysis. Problem Solving. Descriptive problems of fractions.

1 Introducción

En los libros de textos hay una gran variedad de problemas verbales de fracciones que son descriptivos, ya que en su enunciado se describe una situación o se narra una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica.

* Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, referencias: EDU2012-35638 y EDU2011-27168.

** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Valencia (UV). Catedrático del Departamento de didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. Dirección postal: Aptdo. 22.045. 40671 Valencia, España. *E-mail*: bernardo.gomez@uv.es

*** Doctora en Matemáticas por la Universidad de Valencia (UV). Profesora Asociada de la Universidad de Valencia (UV), Valencia, España. Dirección postal: Aptdo. 22.045. 40671 Valencia, España. *E-mail*: m.teresa.sanz@uv.es

**** Ingeniera de Caminos por la Universidad Politécnica de Valencia (UV). Alumna de la Universidad de Valencia, Valencia, España. Dirección postal: Aptdo. 22.045. 40671 Valencia, España. *E-mail*: irehuegab@gmail.com

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

Son problemas de fracciones cuyos antecedentes se remontan a las antiguas culturas matemáticas, mesopotámicas, egipcia, china e hindú, anteriores a la era Cristiana. Los enunciados de estos problemas han evolucionado, a lo largo del tiempo, al adaptarse a los cambios sociales, a los desarrollos matemáticos y a las teorías pedagógicas dominantes en cada momento, pero conservando su contenido matemático y estandarizándose bajo la forma de problema tipo (o estereotipo). Este fenómeno ha dado lugar a lo que Meavilla (2015) denomina familias de problemas que aparecen repetidamente en la Historia de las Matemáticas, en textos de diferentes épocas y culturas, a menudo resolviéndose de diferente forma.

Hasta recientemente, estos problemas se usaban como una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, según fue cambiando el modelo educativo y el diseño de los libros de texto de matemáticas, fue disminuyendo la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos han desaparecido de los textos actuales, o han quedado reducidos a mero entretenimiento.

En la actualidad, los problemas descriptivos emergen con renovado interés en las propuestas curriculares que consideran que la resolución de problemas es una competencia básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico, y para ello los aspectos históricos son esenciales en la configuración de las actuales tendencias que se muestran en la resolución de problemas (DE LA ROSA; GOMES, 2011). En este contexto adquiere particular importancia su estudio, por sí mismos y como testimonio histórico del desarrollo de las ideas y métodos matemáticos.

Con esta intención, se aborda en este trabajo el estudio conjunto de los problemas descriptivos de fracciones, no solo con el propósito de transmitir conocimiento, sino especialmente con el de prestar atención a aquellos aspectos de la resolución de problemas que tienen que ver con la producción de conocimientos significativos para el que aprende (PUIG; CERDÁN, 1988).

2 Marco teórico y metodológico

Cuando se quiere indagar cómo se han configurado las matemáticas de enseñanza, en diferentes momentos de la historia, hay que acudir al análisis de los libros de texto del pasado como medio de instrucción, ya que solo éstos pueden aportar información sobre su planificación y puesta en práctica, al ser las únicas fuentes documentales primarias y los únicos registros disponibles.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

Para ese análisis es útil servirse de las metodologías del análisis histórico y epistemológico (ver GÓMEZ, 2003), y del análisis didáctico (ver RICO; LUPIÁÑEZ; MOLINA, 2013, p. 12) propias de la Didáctica de las Matemáticas. Para el análisis histórico y epistemológico, en tanto análisis de la formación de los objetos matemáticos a lo largo de su historia, se necesita de una aproximación global, ya que estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos de una misma época entre sí, es insuficiente, ya que no se consideran las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, ni las particularidades propias del sistema educativo de la época. Es por esto que se considera necesario revisar una buena selección de libros de texto representativos de las grandes etapas en que se puede dividir la historia de las ideas matemáticas que son el objeto de estudio[1].

Para el análisis didáctico de un determinado objeto o contenido matemático se necesita delimitar unidades y subunidades de análisis que den cuenta de los aspectos conceptuales, estructurales, procedimentales, metodológicos, contextuales y representacionales. En el caso particular de que el objeto de estudio sea una determinada familia de problemas, son unidades básicas para su análisis los tipos de problemas, las lecturas analíticas y los métodos de resolución que los autores más relevantes han dejado reflejados en sus textos.

Para realizar el análisis de los métodos de resolución se ha utilizado la lectura analítica que es el comienzo del método cartesiano donde a las cantidades que se buscan se les asignan letras llamadas incógnitas, y de ella se obtienen las ecuaciones de cuya transformación se siguen las fórmulas. Con carácter general, no debe entenderse que la lectura analítica del enunciado de un problema es simplemente traducirlo al lenguaje algebraico, sino que es más bien reducirlo a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, de modo que puede dar lugar a una ecuación o a una fórmula.

La ecuación se obtiene como resultado de igualar dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad, obtenidas al describir la relación aritmética, que unas cantidades representadas con expresiones algebraicas tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica (PUIG, 2003). La fórmula se obtiene al hallar el valor de la incógnita expresada en términos generales, o lo que es lo mismo, la lista operaciones que se han de efectuar con los datos. Las fórmulas, traducidas al lenguaje usual dan las reglas generales de resolución.

[1] A saber: el periodo antiguo, el anterior a la imprenta, el de las aritméticas comerciales, el de los grandes libros de autor anteriores al sistema escolar, el de los comienzos del libro escolar, y el de la enseñanza graduada en sus diversos planes de estudio (ver GÓMEZ, 2011).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

A los efectos de este trabajo dentro de las lecturas aritméticas se diferencia entre reglada y razonada. La primera corresponde a cuando el autor no da razones que expliquen o sustenten los pasos del proceso de resolución. La segunda es el caso en el que el autor sí que da esas razones.

3 Los problemas descriptivos de fracciones

En la inmensa lista de problemas que ha transmitido la tradición de enseñanza hay un tipo de problemas de fracciones en los que se describe una situación donde una cantidad, conocida o desconocida, se descompone en partes que están expresadas mediante fracciones. Ejemplos de estos problemas son[2]:

> *La tela.* Un hombre compra 4 piezas de tela por 80 bezantes. Compra la primera por un precio, y otra por 2/3 del precio de la primera. Compra la tercera por ¾ del precio de la segunda. Además la cuarta, la compra por 4/5 del precio de la tercera. ¿Cuánto vale cada pieza? (FIBONACCI, 1202/2002, p. 274-275).
>
> *El moribundo*. Un moribundo dejó 6000 escudos para distribuir de esta forma; “Quiero”, dijo, “que la mitad se dé al monasterio de los Jacobitas; la tercera parte, al convento de San Agustín; la cuarta parte, al cenobio de los hermanos menores; y la quinta parte, a la orden de los carmelitas”. Pregunta: si el total es de 6000 escudos, ¿cuánto corresponde a cada orden? (SILÍCEO 1513/1996, p. 266).
>
> *La lanza.* Aquí hay una lanza, que la ½ está en el fango y 1/3 está en el agua y fuera del agua tiene 7 palmos y ¼. Pide cuanto es de largo la lanza (SANTCLIMENT, 1482/1998, p. 311-312).
>
> *La piedra.* Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle 1⁄7 y luego 1⁄13 [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 manna. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Mesopotamia, en KATZ 2003, 27).

A primera vista los problemas son similares, ya que son de fracciones, pero mirándolos con más detenimiento se observan diferencias que tienen que ver con el *todo*, que es conocido o desconocido, o con la relación entre las cantidades. En los problemas de *la tela* y *el moribundo* el todo es conocido, pero en un caso no hay relación entre las partes y en el otro sí. En los problemas de *la lanza* y *la piedra*, el todo es desconocido, pero igual que antes, en un caso no hay relación entre las partes y en el otro sí. Además, en el problema de la piedra la relación entre las partes es de encadenamiento, a través del *complemento aditivo*[3], una se aplica al complemento de otra que le antecede.

En los libros de texto, estos problemas aparecen desperdigados, desorganizados y desagrupados. Unas veces se hallan en el capítulo dedicado a las fracciones, otras veces al

[2] Se incorpora al enunciado de estos problemas un título o encabezamiento con el fin de poder referirnos a ellos a lo largo del documento.
[3] Se llama complemento aditivo de un quebrado propio a lo que le falta para valer la unidad.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

comienzo del álgebra, antiguamente en un capítulo final de la aritmética, que como cajón de sastre contenía métodos particulares (regla de tres, regla de la cadena, aligación, compañías, falsa posición etc.).

Como tentativa, para organizarlos se presenta, a continuación (Figura 1), un esquema que utiliza como criterio de agrupamiento las diferencias entre los problemas señaladas en el epígrafe anterior.

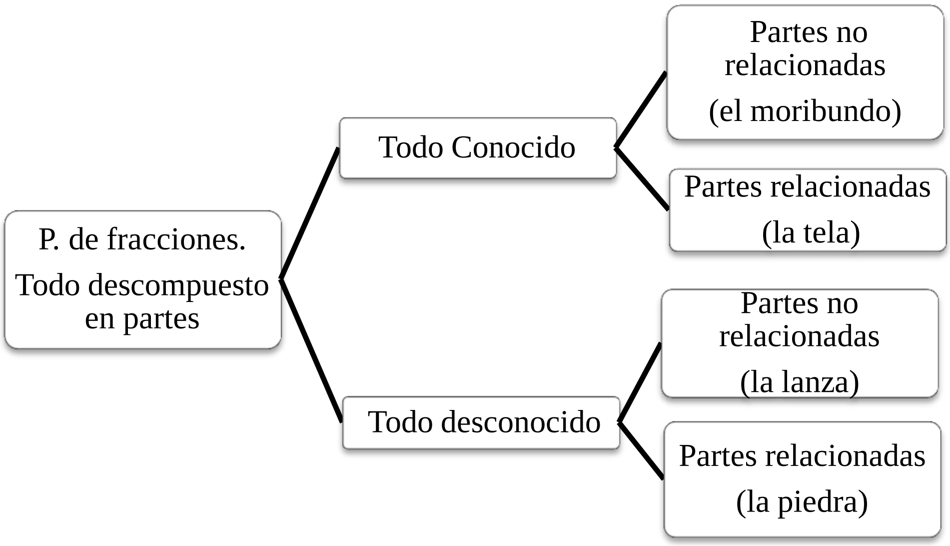

Figura 1- Clasificación de los problemas descriptivos de fracciones

A continuación se aborda el análisis histórico-epistemológico de estos problemas, siguiendo el orden determinado por el esquema de la figura 1.

4 Tipos de problemas

4.1 Todo conocido

4.1.1 Partes no relacionadas

Son problemas que se han titulado como *Problemas de partes no relacionadas entre sí donde el todo es conocido*. En ellos un todo conocido se descompone en partes dadas por fracciones, iguales o desiguales, que también son conocidas. Los problemas de este tipo que no son triviales son aquellos en el que las fracciones suman más que el todo, por lo que es

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

necesario hacer un prorrateo o reparto proporcional para ajustar las cantidades al todo conocido. Un ejemplo es el el problema del moribundo.

a) Lectura aritmética.

> *El moribundo*. Un moribundo dejó 6000 escudos para distribuir de esta forma; "Quiero", dijo, "que la mitad se dé al monasterio de los Jacobitas; la tercera parte, al convento de San Agustín; la cuarta parte, al cenobio de los hermanos menores; y la quinta parte, a la orden de los carmelitas". Pregunta: si el total es de 6000 escudos, ¿cuánto corresponde a cada orden?
> Hay que tomar en primer lugar para cada una de aquellas órdenes cuatro partes distintas; para los jacobitas la mitad de 6000 escudos; para los de S. Agustín, la tercera parte de los 6000 escudos, es decir, 2000; para los hermanos menores, la cuarta parte, es decir, 1500; y para los carmelitas la quinta parte, es decir, 1200. Todas estas partes suman 7700, que es el divisor, el multiplicador es el dinero que hay que repartir, es decir. 6000; se multiplica, pues, cada una de las partes por el multiplicador y el producto se divide por el divisor; el cociente dará la solución. Por ende, si se multiplica la primera parte de los Jacobitas, que es de 3000, por el multiplicador, tendremos 18.000.000; y si se divide esto por el divisor, tendremos como cociente 2337 escudos[4], con 23 duodenos, con 2 turonos y 1400/7700, de turonos; esta es la cantidad que le corresponde al monasterio de los Jacobitas de los 6000 escudos. En los demás casos se procede igual y tendremos la cantidad que corresponde a cada orden (SILÍCEO, 1513/1996, p. 266).

El autor calcula por separado cada una de las partes, a partir de la relación que estas tienen con el todo, y obtiene 3000, 2000, 1500 y 1200; las suma y obtiene 7700. Como en realidad el todo es 6000, plantea las proporciones: si 3000, 2000, 1500 y 1200 vienen de 7700 que vendrá de 6000 respectivamente. Resuelve y halla el verdadero valor de cada parte.

b) Lectura algebraica

> *120 ducados.* Tres quieren partir 120 ducados; el primero quiere la ½; el segundo el 1/3; y el tercero el ¼.
> Busca un número que tenga las dichas partes, que juntas hagan 120. Pon que el número sea x: cuya ½, 1/3 y ¼ será ½ x, 1/3 x y ¼ x, juntos hacen 13/12 x estos serán iguales a 120. Reduce la igualación a enteros y serán 13x iguales a 1440. Parte, y será 1x vale $1440\frac{1}{13}$. Este es el número demandado: cuyo ½ es $55\frac{5}{13}$, tanto viene al primero, y el 1/3 es $36\frac{12}{13}$, tanto viene al 2º, y su ¼ es $27\frac{9}{13}$, tanto viene al tercero. Y todo junto es 120 (AUREL, 1552, fo. 87 dha.)[5].

Aurel asigna la letra x[6] a la cantidad desconocida y trabaja con ella como si fuera una cantidad conocida. Esto le lleva a una ecuación aritmética (ya que no opera la incógnita). Resuelve la ecuación y obtiene el valor de las partes.

Una lectura más cartesiana de este método es la de Vallejo:

> *El gavilán*. Encontró un gavilán a una bandada de palomas, y las saludó diciendo: bienvenida sea la bandada de las cien palomas, y una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tú, gavilán componemos ciento cabal. Se pregunta cuántas palomas iban.
> Sol. x + x + ½ x + ¼ x + 1 = 100; x=36 (VALLEJO, 1841, p. 283).

---

[4] Notar que 1escudo=35duodenos; 1duodeno=12turonos.
[5] En la transcripción se ha sustituido el carácter cósico que usa Aurel por la x que se usa hoy.
[6] En realidad el carácter cósico equivalente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

4.1.2 Partes relacionadas

Son problemas en los que un todo conocido se descompone en partes iguales o desiguales, que vienen dadas por enteros y fracciones de las que se conoce su relación mutua y se han llamado como *Problemas de partes relacionadas entre sí donde el todo es conocido*.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas: Falsa posición[7].

> *La tela.* Un hombre compra 4 piezas de ropa por 80 bezantes. Compra la primera por un cierto precio, y otra por 2/3 el precio de la primera. Compra la tercera por ¾ el precio de la segunda. Además la cuarta, la compra por 4/5 del precio de la tercera. ¿Cuánto vale cada pieza?
> Pones que la primera pieza vale 60 bezantes, porque 60 es el mínimo común múltiplo del 5 y 4 y 3. Por lo tanto, si la primera vale 60 bezantes, luego la segunda vale 2/3 de ella, 40 bezantes y la tercera vale 30 bezantes, es decir 3/4 del precio de la segunda. El cuarto vale 24 bezantes, es decir 4/5 de 30. Después hay que añadir el 60 y el 40, y el 30 y el 24, es decir, los precios de venta de las cuatro piezas; son 154 y debe ser 80; dice, puse 60 por el precio de la primera pieza y 154 bezantes resultado que la suma de las cuatro piezas; ¿Cuánto voy a poner para que la suma de las piezas es de 80 bezantes? Multiplicar el 60 por el 80; y habrá 4.800 que se divide con la regla por 154, es decir 1/2 0/7 0/11; el cociente será 6/7 1/1131 bezantes. Y este es el valor de la primera pieza. También con el fin de tener el precio de la segunda, se multiplica el 40 por el 80, y se divide de nuevo por 1/2 0/7 0/11; el cociente será 4/7 8/11 20 por el precio de la segunda pieza. También para saber el precio de la tercera, se multiplica el 30 por el 80, y se divide por 1/2 0/7 0/11; el cociente será 3/7 6/11 15 bezantes por el precio; al final, el precio de la cuarta, se multiplica el 24 por el 80, y se divide por 1/2 0/7 0/11; el cociente será 1/7 5/11 12 bezantes por el precio, y te das cuenta de que en cada uno de los cuatro productos se cancela 1/2 (FIBONACCI, 1202/2002, p. 274-275).

Fibonacci toma como valor supuesto de la primera pieza el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones, que es 60. Con este valor calcula cuál sería el de las otras piezas de acuerdo con las condiciones del problema, obteniendo 40, 30, 24. Sumando el valor de todas ellas obtiene 154 como falso coste de las 4 piezas juntas. Para enmendar el error aplica las proporciones: si 154 viene de 60 qué vendrá de 80, 40, 30 y 24 respectivamente, y obtiene que el precio de las piezas es de $\frac{60\times 80}{154}, \frac{40\times 80}{154}, \frac{30\times 80}{154}, \frac{24\times 80}{154}$.

Una versión más moderna de esta forma de abordar este tipo de problemas es la que ofrece el siguiente ejemplo, donde todavía se usa la falsa posición.

[7] El nombre *falsa posición* está asociado al proceso algorítmico que encierra, ya que para obtener la solución hay que tomar un valor supuesto, y por lo tanto falso, en el lugar de la incógnita. Con él se hacen los cálculos que se señalan en el enunciado del problema para obtener un resultado erróneo. Con este dato, el supuesto y el erróneo, la aplicación de una regla de tres permite obtener el resultado correcto. El fundamento de la regla de una falsa posición liga las nociones proporcionalidad, ecuaciones de primer grado y función lineal. Las condiciones del enunciado se pueden modelizar con una ecuación de primer grado con una incógnita: $b = ax$. La regla manda que se resuelva la ecuación dando un valor supuesto a $x = x_1$, que da lugar al error b_1, $b_1 = ax_1$. De estas dos igualdades: $b = ax$ y $b_1 = ax_1$, se obtiene la proporción $\frac{b}{x} = \frac{b_1}{x_1}$, de la cual se sigue el valor de x.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

> *Las pesetas.* Repártanse 180 ptas. Entre dos personas, de modo que la parte de la primera sea los 4/5 de la segunda.
> Tomando un número arbitrario que satisfaga las condiciones del problema, esto es, un número divisible por 5, por ejemplo, 5 tendremos que, si la parte de la segunda persona fuese 5, la parte de la 1ª, sería $\frac{5\times4}{5}=4$
> Repartiendo, pues, 180 ptas en partes proporcionales a 5 y 4, tendremos: 5+4=9. Luego:
> Para la 1ª persona $9:180::4:x \quad x=80$ ptas
> Para la 1ª persona $9:180::5:x \quad x=100$ ptas (DALMAU, 1943, p. 254).

b) Lectura aritmética razonada

> *Los toneles.* En dos toneles existen 520 litros de vino y uno de ellos contiene la cuarta parte que el otro. ¿Cuántos litros hay en cada tonel?
> Habiendo en el tonel primero la cuarta parte de lo que contiene el segundo, resulta que la cantidad contenida en aquél será la quinta parte de la cantidad total de vino o sea: 520:5=104 litros. En el segundo habrá 104:4=416 litros (SABRÁS; AGUAYO, 1922, p. 9).

El autor determina a qué número de partes del todo equivale la relación entre las partes dadas, para hacer así un reparto proporcional. Para ello deshace la fracción. Teniendo en cuenta que un tonel contiene una cuarto del otro, se puede entender que, en total, hay cinco partes y que en un tonel hay $\frac{4}{5}$ y den el otro $\frac{1}{5}$ $(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5})$. Ahora hay varias alternativas, una es aplicar estas fracciones a la cantidad dada 520 para hallar la solución, pero en este ejemplo, el autor prefiere hallar la fracción unitaria $\frac{1}{5}$ de 520 y multiplicarla por 4 y por 1.

c) Lectura algebraica

> *100 ducados.* Tres quieren partir 100 ducados, los que vienen al primero son tantos como los 2/5 de los del segundo; y partiendo los del tercero, por los del primero, vendrá en la partición 4 5/6. Demando, cuantos ducados vienen a cada uno?
> Pongo que al segundo vienen 1x ducados al primero vendrá $\frac{2}{5}$ x; y por fuerza al tercero la resta, que es $100-1\,\frac{2}{5}$ x. Estos parte por los del primero, que es $\frac{2}{5}$, y vendrá $100-1\,\frac{2}{5}$ x, partidas por $\frac{2}{5}$x, igual a $4\frac{5}{6}$. Reduce la igualación a entero, y vendrá $100\ -1\,\frac{2}{5}$ x, iguales a $\frac{29}{15}$x. Iguala, y parte, y vendrá 1x a valer 30 : tantos ducados tomo el segundo, el primero 12: y el tercero, 58 ducados (AUREL, 1552, fo 102 dcha.).

Aurel asigna la letra x a la parte del segundo individuo, para así poder trabajar con ella como si fuera una cantidad conocida. Tras esto escribe las relaciones aritméticas entre las cantidades dadas por el enunciado y plantea la ecuación teniendo en cuenta que la tercera parte es igual a 100 menos la primera y la segunda parte, y que la tercera parte divida por la primera es $4\frac{5}{6}$. O sea:

$$\frac{100-\frac{2}{5}x-x}{\frac{2}{5}x}=\frac{100-1\frac{2}{5}x}{\frac{2}{5}x}=4\,\frac{5}{6}\leftrightarrow 100-1\,\frac{2}{5}x=\frac{29}{15}x$$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

4.2 Todo desconocido

4.2.1 Partes no relacionadas

Son problemas que se han llamado *Problemas de partes no relacionadas entre sí donde el todo es desconocido*, cuya característica es que un todo desconocido se descompone en partes, que no guardan ninguna relación entre sí y que vienen dadas por fracciones y enteros, o fracciones más enteros.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas: Falsa posición.

> *La lanza.* Aquí hay una lanza, que la ½ está en el fango y 1/3 está en el agua y fuera del agua tiene 7 palmos y ¼. Pide cuanto es de largo la lanza.
> Puesto que ½ y 1/3 se encuentran en 6, supón que esa lanza es de 6 palmos de largo. Ahora toma en tu entendimiento que ½ y 1/3 de 6 son 5. Digo 3 por el ½ que está en el fango, y 2 por el 1/3 que está en el agua, y 1 por lo que le resta de 6. Por eso diré: si de 1 me viene a 6, ¿de cuánto me vendrá a 7 y 1/4? Multiplica 7 y 1/4 por 6 y son 74 cuartos, los cuales debes dividir por 1, del cual harás cuartos. Y serán 43 palmos y serán 43 palmos y ½ (SANTCLIMENT, 1482, p. 311-312).

Santcliment toma como valor supuesto del todo desconocido que se busca el 6, que es el máximo común divisor de los denominadores 2 y 3, de las fracciones dadas ½ y 1/3. Con este dato calcula el valor de las partes ocultas bajo el agua y el fango de la lanza: $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})6=5$. La diferencia 6-5 es valor que queda fuera del agua, bajo el supuesto de que la lanza mida 6 palmos de largo. Como en realidad fuera del agua hay 7 ½ palmos, planteando la proporción $\frac{6}{1}=\frac{x}{7+\frac{1}{2}}$ se halla lo que realmente mide la lanza, o sea x=43 ½ palmos.

b) Lectura aritmética razonada

Actualmente, la lectura aritmética de estos problemas hace uso del lenguaje horizontal y de las ecuaciones aritméticas. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

> *La suma*. Cuatro personas se repartieron una suma: la primera se quedó con la tercera parte, más 20 pesetas; la segunda, con la cuarta parte, más 40 pesetas; la tercera, con la quinta parte, más 70 pesetas, y la cuarta con la sexta parte, más 80 pesetas. ¿Cuánto correspondió a cada persona?
> Sol. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$, $20+40+70+80=210$ pesetas representan los $\frac{60}{60}-\frac{57}{60}=\frac{3}{60}$ de la suma repartida; $\frac{1}{60}$ de dicha suma es igual a $210:3=70$ pesetas, y los $\frac{57}{60}$ de la repetida suma valdrán $57\cdot 70=3990$ pesetas, que se repartirán proporcionalmente a $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\ y\ \frac{1}{6}$, o sea a 20,15,12 y 10. A cada una de las partes resultantes se les sumará 20, 40, 70 y 80 pesetas, respectivamente, y se tendrá lo que correspondió a cada persona (GARCÍA, 1957, p. 87).

El autor suma por separado las partes fraccionarias y las partes enteras. Teniendo en cuenta la relación aritmética entre estas dos partes, que son complementarias en relación al todo, plantea la ecuación aritmética que resuelve el problema.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

$$(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}\text{ partes})+(20+40+70+80=210\text{ pesetas}) = (\frac{60}{60}\text{ partes})$$

De esta igualdad deduce que $\frac{3}{60}$ es 210, y por tanto que $\frac{1}{60}$ =70 pesetas, y 57/60=57·70=3990. Una vez hallado este valor lo prorratea en $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$, partes, a las que le suma 20, 40, 70 y 80 pesetas, respectivamente, y obtiene lo que corresponde a cada persona.

c) Lectura algebraica

> *El testamento.* Las intenciones de un padre mediante su testamento es que sus tres hijos deben repartirse su fortuna de la siguiente manera; el mayor recibirá 1000 coronas menos que la mitad del total de la fortuna; el segundo recibirá 800 coronas menos que la tercera parte del total de la fortuna; y el tercero recibirá 600 coronas menos que el total de la fortuna. Se pide la suma total de la fortuna, y cuanto recibirá cada hijo?
> Sol. Vamos a expresar la fortuna con x
> La parte del primer hijo es $\frac{1}{2}x-1000$
> La parte del segundo es $\frac{1}{3}x-800$
> La parte del tercero $\frac{1}{4}x$ −600
> Por eso los tres hijos reciben en total $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-2400$ y esta suma debe ser igual a x. tenemos, entonces, la ecuación $\frac{13}{12}x-2400=x$. Restando x, queda, $\frac{1}{12}x-2400=0$ Añadiendo 2400, tenemos $\frac{1}{12}x=2400$. Finalmente multiplicando por 12, el producto es x igual a 28800. Respuesta. La fortuna consiste en 28800 coronas, y
> - El mayor de los hijos recibe 13400 coronas
> - El Segundo 8800
> - El más joven 6600
> - Total 28800 coronas (EULER, 1770/1821, p. 167).

Como se ve, en este caso la relación entre cantidades que conduce a la ecuación es que la suma de todas las partes es igual al todo. Resolviendo la ecuación se halla el valor del todo, x.

4.2.2 Partes relacionadas

Los hemos denominado *Problemas de partes relacionadas con el complemento aditivo donde el todo es desconocido*. En estos problemas, en los que el todo desconocido se descompone en partes dadas por fracciones más enteros, lo característico es que las fracciones están relacionadas a través del complemento aditivo.

Este complemento se verbaliza con el sintagma: *de lo que queda*, que permite reconocerlos fácilmente, sobre la que se aplica una nueva fracción, de acuerdo con la secuencia establecida en el enunciado del problema. La reiteración del proceso genera una cadena multiplicativa de fracciones. Hay cuatro subtipos que se detallan a continuación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

4.2.2.1 Problemas de quitar fracciones *de lo que queda* del todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

Son problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan fracciones, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre fracciones de lo que va quedando. Se conoce el resultado de quitar esas fracciones.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas.

> *Los tres impuestos*. Es una persona que acarrea cereal a través tres pasos. En el paso exterior, le quitan una tercera parte como impuesto. En el paso intermedio, le quitan un quinto. En el paso interior le quitan una séptima parte. Supón que el cereal que le queda son 5 dou[8]. Diga: ¿Cuánto cereal llevaba originalmente? Sol: 10 dou 9 3/8 sheng.
> Método: Supón que es 5 dou; multiplícalo por los números de los impuestos: 3, 5, 7, sucesivamente, en concepto de dividendo. Toma el producto de los restos [los numeradores de las fracciones que van quedando] 2, 4, 6, como divisor. Divide, da el número de dou que has hallado (JIUZHANG SUANSHU, 100/1999, p. 345).

La solución se obtiene al aplicar una regla mecánica que consiste en hacer el producto de las fracciones $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$. Este producto viene de reducir el producto $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$ que es lo que queda al final de las tres pérdidas.

En efecto, la primera pérdida deja 1 - $\frac{1}{3}$ del cereal, la segunda deja (1 - $\frac{1}{3}$) - $\frac{1}{4}$(1 - $\frac{1}{3}$)= (1 - $\frac{1}{3}$) (1 - $\frac{1}{4}$) y la tercera pérdida deja (1 - $\frac{1}{3}$) (1 - $\frac{1}{4}$) - $\frac{1}{7}$(1 - $\frac{1}{3}$) (1 - $\frac{1}{4}$) = (1 - $\frac{1}{3}$) (1 - $\frac{1}{4}$) (1 - $\frac{1}{7}$)= $\frac{16}{35}$

Esta fracción del todo, $\frac{16}{35}$, es lo que queda tras los gastos, que se sabe que vale 5 *dou*. Deshaciendo la fracción se obtiene que la cantidad que se pide en el enunciado del problema, que es $\frac{5}{\frac{16}{35}} = 10 + \frac{15}{16}$ *dou.*

b) Lectura aritmética razonada

Una explicación del método anterior la ofrece el siguiente ejemplo:

> *El peregrino.* Un peregrino lleva cierta cantidad de dinero. Da la mitad de su dinero (a los Brahmines) en Prayaga. Gasta dos novenos del resto en Kashi, Un cuarto de lo que le queda fue para pagar una deuda. Después gasta la 6⁄10ª partes de lo que le quedaba en Gaya. Al final regresó a casa con 63 *niskas*. Si conoces la fracción que le queda, halla la cantidad que llevaba.
> Suponiendo que tenía un *niska* al empezar. Primero gastó ½, en Prayaga, y por tanto le quedó ½. En Kashi gastó, ½·2/9=1/9, y por tanto le quedó ½-1/9=7/18. La deuda que pagó =7/18·1/4=7/72, por tanto le quedaba 7/18-7/72=21/72=7/24. En Gaya gastó, 7/24·6/10=7/40. Cuando abandonó Gaya le quedaba 7/24-7/40=7/60. Por el método de [deshacer]la fracción que le queda, [resulta que]tenía 63/(7/60)=9·60=540 *niskas* (LILAVATI, 1150/2006, p.59).

[8] Notar que 1dou=10sheng.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

En la resolución del problema se hace la suposición de que la cantidad inicial es uno, después se calcula lo que queda tras todas las pérdidas: $\frac{7}{60}$, como el valor de esta fracción es conocido ya puede deshacer la fracción y obtener el resultado.

c) Lectura algebraica

> *El poste*. Un poste está pintado de tres colores distintos, rojo, azul y negro. La parte en negro comprende 1/3 de su longitud, la parte en rojo los 2/3 del resto y la parte azul mide 2'70 metros. Calcular la altura del poste.
> Designemos por x la longitud del poste. Longitud de la parte pintada de negro x/3. Longitud de la parte pintada de rojo 4x/9. Longitud de la parte pintada de azul 2.7ms. Podremos escribir la ecuación de primer grado, x/3+4x/9+2.7=x, de lo que operando se obtiene x=12.15ms (ÁLVAREZ, 1936, p. 68 y 69).

Como se ve la aplicación del método cartesiano que hace el autor es complemente estándar.

4.2.2.2 Problemas de quitar un número fijo y una fracción de lo que va quedando a un todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

Lo que diferencia a este subtipo de problemas del anterior es que, ahora, las partes en vez de venir dada por una fracción vienen dadas por una combinación de un número fijo y una fracción.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas.

> *Las rosas*. Un hombre ha entrado en un huerto a coger rosas, y a la entrada hay tres puertas, y él ha de dar al que guarda la primera puerta la ½ de todas las rosas que había cogido y media más sin romper ninguna; a la segunda puerta ha de dar los 2/3 de las rosas que le habían quedado y 2/3 más fin romper ninguna, y a la tercera puerta ha de dar los ¾ de las rosas que le habían quedado y 3/4 de rosa más sin quebrar ninguna; y quiere, que le sobren 2 rosas. Pregunto, cuántas rosas ha de coger?
> Pon 2 que quiere que le sobren, y añade 1/2 y serán 2 y ½, dóblalas, y serán 5; añade 2/3, y serán 5 2/3, multiplícalos por 3, y serán 17; añade 3/4, y serán 17 ¾, multiplícalos por 4, y serán 71. Y 71 rosas ha de coger (VENTALLOL, 1521/1621, p. 471).

El método de Vantallol es misterioso. Se podría pensar que usó el método inverso, pero no parece que sea así a la vista de las operaciones que hace. En efecto, el razonamiento según el método inverso es algo así: en la última puerta da ¾ de las rosas que quedaban y ¾ de rosa más, y esto le deja 2 rosas. Como gasta 3/4 de las rosas y ¾ de rosa, le quedan ¼ de las rosas menos ¾ de rosa, y esto es igual a 2 rosas, o lo que es lo mismo, ¼ de las rosas es igual a 2+3/4=11/4 y por tanto al llegar a la tercera puerta quedaban 11 rosas.

Igualmente, en la segunda puerta da 2/3 de las rosas que le quedaban y 2/3 de rosa, o sea que las 11 rosas vienen de 1/3 de lo que quedaba menos 2/3 rosa; o lo que es lo mismo,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

11+2/3=35/3 viene de 1/3 de lo que quedaba, y por tanto quedaban 35 rosas al llegar a la segunda puerta.

Otra vez, en la primera puerta da ½ de las rosas más ½ rosa, luego las 35 rosas vienen de ½ de las rosas menos ½, o sea que 35+1/2 vienen de la mitad de las rosas, y por tanto las rosas eran 71.

b) Lectura aritmética razonada.

> *La huevera*. Un hombre regresa a Paris de un paseo por el campo. Visita a tres amigos enfermos y le da al primero la mitad de sus huevos, más la mitad de un huevo, al segundo, la mitad de lo que le queda más medio huevo, al tercero, la mitad de los que aún le queda y más medio huevo, después de esto no le queda ninguno. ¿Cuántos llevaba).
> Antes de su tercera visita no le queda más que un huevo, porque 1 es el único que al dar la mitad más ½ no queda nada. Si durante la segunda visita no hubiera dado más que la mitad de sus huevos, habría conservado la mitad, que sería el 1 huevo que tenía para su tercera visita, más medio huevo que no habría dado. Luego, antes de la segunda visita tenía 2 veces 1 ½ huevos, o 3 huevos. Igualmente, si en la primera visita hubiera guardado el ½ huevo, le hubieran quedado 3 ½ , que habrían sido la mitad de los huevos. Tenía, pues 7 huevos (VINOT, 1860, p. 72 y 73).

Como se ve Vinot utiliza el método inverso, en la misma forma que se ha explicado en el problema anterior de Ventallol.

c) Lectura algebraica.

> *Otra huevera*. Una huevera vende todos los huevos, vendiendo en cada uno de 4 ventas sucesivas a mitad de los que tenía más medio huevo. ¿Cuántos vendió?
> *Sol*. 1º. Venta $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ y le quedan $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.
> 2º. Venta $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ y le quedan $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$
> 3º. Venta $\frac{x}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$ y le quedan $\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$
> 4º. Venta $\frac{x}{16}-\frac{7}{16}+\frac{1}{2}=\frac{x}{16}+\frac{1}{16}$ y le quedan $\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{8}\right)-\left(\frac{x}{16}+\frac{1}{16}\right)=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$ que han de ser cero. Luego x=15 (PÉREZ, 1895, p. 162).

El autor usa el método cartesiano, por lo que no se necesita más explicación.

4.2.2.3 Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

En este subtipo, además de quitar fracciones se repone una parte igual o diferente de lo que se ha quitado, y no siempre de la misma naturaleza.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas.

> *El ladrón*. Un ladrón entró en un palacio donde encontró una caja llena de ducados; tras cogerla, intentó escapar; pero fue cogido por un portero del palacio, al que ofreció la mitad de los ducados con tal de que le dejara escapar; pero el portero, en cierta forma compadecido, le devolvió 80 ducados de lo que el ladrón le había dado y le dejó ir. Poco después es sorprendido por otro portero del palacio al cuál le ofreció también la mitad de los ducados que le quedaban; cuando el portero recibió esta cantidad, fue también generoso y de la suma recibida devolvió al ladrón 50

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

> ducados. Por último es cogido por un tercer portero del palacio, al cual ofrece la mitad de los ducados que llevaba en el saco, cantidad de la que el portero a su vez, le devolvió 24; al final el ladrón sale del palacio con 200 ducados en el saco. ¿Cuántos ducados había en el saco al principio?
> De los 200 ducados que hay al final se restan 24, que le devolvió el tercer portero; el resto es 176; esto se multiplica por 2 y tenemos 352; de aquí se restan los 50 que le devolvió el segundo portero y quedan 302; esto se multiplica por 2 y tenemos 604; de aquí se quitan los 80 que le devolvió el primer portero y el resto es 524; esto se multiplica por 2 y tenemos 1048, que es el número de ducados iniciales (SILÍCEO, 1526/1996, p. 263).

El autor utiliza el método inverso, en los mismos términos en que se ha visto en los ejemplos de Ventallol y Vinot.

b) Lectura algebraica.

> *El jugador*. Un jugador pierde la mitad de su dinero, y luego gana 6 ch.: después pierde un tercio de lo que le queda, y luego gana 12 ch.; finalmente pierde un cuarto de lo que le queda, y halla que le quedan dos guineas: ¿qué suma tenía al principio?
> Sol. Las unidades, con que el jugador gana y pierde están en chelines, de las que le quedaron 42. Expresemos con x el número de chelines que tenía al principio, y simbolizamos las condiciones que se presentan en el problema.
> Su primera pérdida es $\frac{x}{2}$, le quedan $x-\frac{x}{2}$, o $\frac{x}{2}$, tras lo cual gana 6 ch., que suma a $\frac{x}{2}$, lo que da $\frac{x}{2}+60$, que es el dinero que posee al final de su primera aventura; a continuación pierde un tercio de $\frac{x}{2}+6$, que es $\frac{x}{6}+2$, y que restado de $\frac{x}{2}+6$, deja $\frac{x}{2}+6-\frac{x}{6}-2$, o $\frac{x}{3}+4$, después de esto gana 12 ch. que suma a $\frac{x}{3}+4$, hacen $\frac{x}{3}+4+12$, o $\frac{x}{3}+16$, que es el dinero que posee al final de su segunda aventura, ahora pierde un cuarto de $\frac{x}{3}+16$, o $\frac{x}{12}+4$, que resta de $\frac{x}{3}+16$, deja $\frac{x}{3}+16-\frac{x}{1}-4$, o $\frac{x}{4}+12$ lo que por las condiciones del problema es igual a 42, consecuentemente: $\frac{x}{4}+12=42, \frac{x}{4}=30, x=120$, que es la cantidad que tenía al principio (PEACOCK, 1842, p. 252).

4.2.2.4 Problemas de quitar fracciones más enteros a un todo desconocido. Se sabe que el reparto es equitativo.

Se trata de una variante de los problemas anteriores, pero al ser el reparto equitativo no es necesario conocer la cantidad que queda tras todo el reparto. El proceso de resolución es diferente.

a) Lectura aritmética. Reglas antiguas.

> *Los bezantes*. Un hombre en sus últimos días decide hacer testamento entre sus hijos mayores de la forma siguiente. Al primero le dijo, te daré un bezante y un séptimo del resto, a otro le dijo, te daré 2 bezantes y un séptimo del resto, a un tercero le dijo, te daré 3 bezantes y un séptimo del resto, y así sucesivamente con todos sus hijos. Uno de los hijos dijo que el reparto no era justo. Pero el padre dijo que todos tenían el mismo dinero
> Por los séptimos que él da a cada hijo tienes 7 y le quitas 1, entonces el resto son 6 y estos son el número de hijos que multiplicados por si mismos da 36 que es el número total de bezantes (FIBONACCI, 1202/2002, p.399).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

La condición fundamental de este problema es que todos los hijos llevan la misma cantidad, o lo que es lo mismo, que la diferencia entre lo que se llevan dos hijos es cero; o también que la diferencia entre la cantidad C que queda antes del último reparto y lo que se lleva el último hijo, el n-ésimo, es cero. Luego, si la cantidad que recibe el último hijo: $n+\frac{1}{7}$ *(C-n)*, y dado que la diferencia entre lo que quedaba y la cantidad que recibe, es cero:

$$C-n-\frac{1}{7}\,(C-n)=7\mathrm{C}-\mathrm{C}+7\mathrm{n}-\mathrm{n}=0\ \rightarrow (7-1)C=(7-1)n \rightarrow C=n$$

De aquí que la herencia H es igual a n^2 (n hijos a n bezantes cada uno). Ahora, solo falta hallar el valor de n, lo que se puede hacer, por ejemplo, planteando la ecuación de lo que recibe el primer hijo: $1+\frac{1}{7}(n^2-1)=n \rightarrow n=6$. Pero esto no explica cómo deduce Fibonacci que la cantidad que recibe cada hijo es 7-1=6. El siguiente problema ayuda a descubrirla

> *El mercader*. Un mercader estando enfermo hizo testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda, ordenando que al hijo primero le diesen la sexta parte de su hacienda, y 300 ducados más; al segundo la sexta parte del restante, y 600 ducados más; y al tercero la sexta parte del restante y 900 ducados más, y con este orden en los demás, dando siempre a cada uno la sexta parte del restante, y 300 ducados más al uno que al otro. Muerto el padre, partieron la hacienda, y hallaron que tanto vino al uno como al otro: pídese cuántos hijos dejó el padre, cuánta hacienda, y cuanto vino por cada uno
> Quita el numerador del quebrado del denominador; esto es, 1 de 6 y quedaran 5 y tantos hijos dejó, luego multiplica los 300 ducados, que se dan de más a cada hijo, por 6, denominador del quebrado y montaran 1800 ducados y tantos ducados le tocaron a cada uno, los cuales multiplicados por los 5 hijos montaran 9000 ducados y tanta hacienda dejó el padre; pruébalo y hallarás ser verdad (PUIG, 1715 p. 209).

Razonando igual que antes:

$$C-(300n+\frac{1}{6}C)\ =0 \rightarrow 6C-C=6\times 300n \rightarrow\ (6-1)C=6\times 300n$$

Como tanto el número de hijos como la cantidad heredada han de ser enteros, de la igualdad anterior y pensando en términos de que a ambos lados del signo igual hay una cantidad descompuesta en factores, necesariamente $n = 6\text{-}1$ y $C=6\times 300$, y esta es la idea que posiblemente aplicó también Fibonacci.

b) Lectura algebraica

> *Ducados y 1/10*. Un enfermo hace su testamento, y manda que su hacienda sea partida entre sus hijos, igualmente, que tanto haya el uno como el otro. Muerto el padre, dan al hijo mayor un ducado, y $\frac{1}{10}$ de lo que queda; al segundo, 2 ducados y $\frac{1}{10}$ de la resta; al tercero 3 ducados y $\frac{1}{10}$ de lo que quedó; así a cada hijo un ducado más que al otro y $\frac{1}{10}$ de la resta. De esta manera es satisfecha la voluntad del padre, porque vino a cada uno tanto como al otro. Demando, ¿cuántos ducados dejó, y cuántos hijos tenía?.
> Pongo, que dejo x ducados de los cuales toma el mayor, o primer hijo 1 ducado, quedan x-1, el $\frac{1}{10}$ de esta resta es $\frac{x-1}{10}$, lo cual junta con 1 ducado, y vendrán $\frac{x+9}{10}$, tantos ducados vienen al hijo primero. Estos quita de x, y quedará para los otros hijos $\frac{9x-9}{10}$ ducados, de los cuales toma el segundo, 2 ducados, quedaran $\frac{9x-29}{10}$, cuyo $\frac{1}{10}$ es $\frac{9x-29}{100}$ el cual

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

> junta con los 2 ducados que el 2º tomó, y vendrán $\frac{9x+171}{100}$ tantos ducados vienen al 2º. Y pues el uno heredó tanto como el otro, conviene que los ducados del uno sean iguales a los ducados del otro. Por lo cual digo que $\frac{x+9}{10}$ ducados del primero son iguales a $\frac{9x+171}{100}$ ducados del segundo. Reduce la igualación a entero (que es multiplicar en cruz) y vendrán 100x + 900 = 90x + 1710. Iguala y parte y vendrá x a valer 81. Tantos ducados dejó el padre. Ahora para saber cuántos hijos eran mira qué viene a cada uno de esta manera, toma 1 ducado de los 81, quedarán 80, cuyo 1/10 es 8, el cual junto con el 1, y serán 9 ducado [que son los que] vienen a cada uno (AUREL, 1552, fo. 92).

Como se ve en su lectura cartesiana, Aurel plantea la ecuación a partir de que los dos primeros hijos heredan la misma cantidad.

En el siguiente ejemplo, Fibonacci utiliza, también, el método cartesiano pero en su lectura analítica plantea la condición fundamental de este tipo de problemas en términos de que la diferencia entre lo que se llevan los dos primeros hijos es cero.

> *Las libras*. Un padre deja a su muerte varios hijos, quienes comparten sus bienes de la siguiente manera: el primero recibirá 100 libras y la décima parte del resto, el segundo recibirá 200 libras y la décima parte del resto, el tercero 300 libras y la décima parte del resto, el cuarto recibirá 400 libras y la décima parte del resto, así sucesivamente. Así se obtiene que la herencia queda dividida equitativamente entre sus hijos. Se requiere saber, cuánto hijos eran y cuánto recibió cada uno.
> Supondremos que el total de la fortuna sea *z* libras; y que cada hijo recibirá la misma parte a la cual la llamamos *x*, con lo cual el número de niños vendrá determinado por $\frac{z}{x}$. Ahora pasamos a la resolución del problema.

Suma o herencia que es dividida	Orden de los hijos	Parte de cada hijo	Diferencias
z	1º	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
z-x	2º	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-2x	3º	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-3x	4º	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-4x	5º	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z-5x	6º	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	así sucesivamente…

> Hemos insertado en la última columna las diferencias, las cuales se han obtenido cada parte menos la anterior, dado que todas las partes son iguales esta diferencia es igual a 0. Con lo que resolviendo esta ecuación $100 - \frac{x-100}{10} = 0$ se obtiene que x=900.
> Así pues ahora sabemos que cada hijo recibirá 900 libras, cogiendo cualquiera de las fórmulas de la tercera columna obtenemos $x = 100 + \frac{z-100}{10}$ que z=8100 libras, y en consecuencia, el número de hijos 8100/900=9 (EULER, 1770/1821, p. 173).

7 Conclusión

En este trabajo se ha presentado una recopilación de problemas de fracciones extraídos de libros de diferentes periodos históricos. Los problemas se han agrupado en categorías,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

atendiendo a las relaciones entre las partes y a si el todo es conocido o no. Se ha dado cuenta de las diferentes lecturas analíticas y métodos de resolución que han quedado reflejados en los libros de texto.

Se aporta, así, un conocimiento matemático que puede ser útil para la enseñanza porque aporta claridad metodológica, en el sentido de ofrecer un enfoque de los problemas descriptivos como objeto de estudio por su propio interés, de cómo organizarlos y de cómo analizar sus distintos métodos de resolución.

También es útil para el investigador porque ofrece una metodología para el análisis histórico y epistemológico de un contenido matemático que ha sido transmitido por la tradición histórica.

El reto que se plantea con este trabajo es, a partir de esta información, diseñar una propuesta de enseñanza para este tipo de problemas. El reto como educadores es orientar la enseñanza para que los estudiantes sepan efectuar el análisis de las relaciones entre cantidades que determinan las condiciones de los enunciados, y elegir cuáles de las lecturas analíticas son las más apropiadas en cada caso para resolverlos.

Referencias

ÁLVAREZ, E. **Problemas elementales de Matemáticas, Física y Química.** Madrid: Instituto Samper, 1936.

AUREL, M. **Libro primero, de arithmetica algebraica.** Valencia: En casa de Ioan de Mey Flandro, 1552.

DALMAU, J. **Soluciones analíticas**. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro**.** Gerona: Dalmáu Carles Pla, S. A (Serie de textos del siglo XX), 1943.

DE LA ROSA ONUCHIC, L.; GOMES N.S.. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

EULER, L. **Introduction to the Elements of Algebra**. Selected from the Algebra of Euler, by John Farrar. 2. ed. Combridge: Hilliard, 1821. (Original, 1770).

FIBONACCI, L. Liber Abacci. In: SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.** New York: Springer, 2002. (Original, 1202).

GARCÍA, M. **Ejercicios y problemas de aritmética.** 15. ed. Madrid: L. Hernando, 1957.
GÓMEZ, B. La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. In: CASTRO E., FLORES, P.; ORTEGA, T.; RICO L. y VALLECILLOS A. (Coord.).**Investigación en Educación Matemática.** SIMPOSIO DE LA SEIM, 7, 2003, Granada, Actas del Congreso Granada. U. de Granada. 2003. p. 79-85.

GÓMEZ, B. Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. **Epsilon**, Sevilla, v. 28, n. 77, p. 9-22, jan./abr. 2011.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

JIUZHANG SUANSHU. The nine Chapters on the Mathematical Art (1999). In: SHEN, K.; CROSSLEY, J. N.; LUN, A. W. C. **The Nine Chapters on the Mathematical Art**: Companion and Commentary. Oxford: Oxford University Press, 1999. (Original, 100).

KATZ, V. **A history of mathematics.** New York: Addison-Wesley, 2003.

LILAVATI. Lilavati. In: PATWARDHAN, K. S.; NAIMPALLY, S. A. Y SINGH. **Lilavati Of Bhaskaracarya Treatise of Mathematics of Vedic Tradition**. Dehli: Motilal Banarsldass Publisher Private Limited, 2006. (Original, 1150).

MEAVILLA, V. Problemas de Relojes. Ejemplos Históricos y Consideraciones Didácticas. **Bolema,** Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 110-122, abr. 2015.

PEACOCK, G. **Treatise on Algebra**, Cambridge University press. vol.1. 1842.

PÉREZ, F. **Lecciones de aritmética elemental y de álgebra elemental**. Alicante: Tip. De Galdó Hnos.1998 (Original, 1562)

PUIG, A. **Arithmetica Especulativa y Practica**. Barcelona: Joseph Giralt Impresor y Librero. 1715

PUIG, L. Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. In: CASTRO, E.; FLORES, P.; ORTEGA, T.; RICO L.; VALLECILLOS A. (Coord.). **Investigación en Educación Matemática.** SIMPOSIO DE LA SEIM, 7. Actas del Congreso. Granada: U. de Granada, 2003. p. 97-108.

PUIG, L.; CERDÁN, F. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1988.

RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. L. Y MOLINA, M. **Análisis Didáctico en Educación Matemática**. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. Granada: Comares, 2013.

SABRÁS, T; AGUAYO, M. **Colección de ejercicios y problemas resueltos de Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría.** 3. ed.. Barcelona: Imprenta e A. Ortega, 1922.

SANTCLIMENT, F. **Summa de l'art d'aritmètica**. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Vic: Eumo Editorial, 1998. (Original, 1482).

SILÍCEO, J. M. Ars Arithmética. In: COBOS, J. M.; E. SÁNCHEZ, E. **Juan Martínez Silíceo.** Ars Arithmética**.** Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la U. de Extremadura, 1996. (Original, 1514).

VALLEJO, J. M. (1841). **Tratado Elemental de Matemáticas**, escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. Primera ed. 1813.

VENTALLOL, J. **Practica mercantivol**. Traducción J. B. Tolrá. Tarragona: Gabriel Roberto, 1621. (Original, 1512).

VINOT, J. **Récréations mathématiques.** Paris: Larousse et Boyer, 1860.

Submetido em Maio de 2015.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14

Aprovado em Outubro de 2015.