



Ingeniería y Competitividad  
ISSN: 0123-3033  
inycompe@gmail.com  
Universidad del Valle  
Colombia

Amariles, Juan M.; Soto-Mejía, José A.  
Análisis de sensibilidad de los resultados del modelo de gestión SUE (Sistema  
Universitario Estatal) basado en el análisis envolvente de datos  
Ingeniería y Competitividad, vol. 17, núm. 2, 2015, pp. 53-64

Universidad del Valle  
Cali, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291340438006>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

# Análisis de sensibilidad de los resultados del modelo de gestión SUE (Sistema Universitario Estatal) basado en el análisis envolvente de datos

ENGINEERING, OPERATIONS RESEARCH

## Sensitivity analysis of the results of the management model SUE (State University System) based on data envelopment analysis

Juan M. Amariles\*, José A. Soto-Mejía\*<sup>§</sup>

\*Facultad de Ingeniería Industrial, Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia  
juanmaz@utp.edu.co, <sup>§</sup>jomejia@utp.edu.co

(Recibido: enero 22 de 2015 – Aceptado: Junio 25 de 2015)

### Resumen

El Sistema Universitario Estatal (SUE) colombiano utiliza un modelo matemático para evaluar las universidades públicas “rankeandolas” según su desempeño. Sin embargo, se hace necesario proponer otro(s) enfoque(s) pues los resultados han generado inconformidades. Este trabajo propuso un modelo alternativo (Soto & Arenas, 2005) basado en Análisis Envolvente de Datos (DEA) que permite calcular el desempeño de las universidades del SUE. El modelo DEA convencional no incluye directamente la posibilidad de evaluar la sensibilidad de la eficiencia a variaciones en la información. Tener una medida de hasta qué punto un conjunto de Unidades de Decisión (Decision Making Unit-DMU) conserva su eficiencia debido a estas variaciones es fundamental para conocer la robustez de los resultados.

Este artículo propone utilizar el enfoque de Análisis de sensibilidad de modelos DEA para cambios simultáneos en la información, desarrollado por (Seiford & Zhu, 1998), para medir la sensibilidad de los resultados del modelo SUE basado en DEA. Inicialmente se expondrán algunas de las razones para analizar la sensibilidad del modelo. Luego se presentará el enfoque escogido describiendo su metodología y se aplicará al modelo SUE basado en DEA. Finalmente se presentarán sus resultados y conclusiones.

**Palabras Clave:** Análisis de sensibilidad, análisis envolvente de datos, Sistema Universitario Estatal, súper-eficiencia.

### Abstract

The Colombian State University System (SUE) has used a mathematical model for evaluating public universities, sorting them according to their performance. However, it is necessary to propose a different approach for various disagreements with the results. To respond to these complaints, the DEA research group at the Technological University of Pereira proposed an alternative model (Soto & Arenas, 2005) based on Data Envelopment Analysis (DEA), which provides a method for calculating the performance of the Colombian SUE.

Conventional DEA does not directly include the ability to assess the sensitivity of efficiency to changes in information. Having a measure of how far a set of Decision Making Units, (DMUs), retains its level of efficiency due to variations in the information is fundamental for the evaluation of the robustness of the results.

This article proposes to use the approach of Sensitivity Analysis for DEA models with simultaneous changes in all the information, developed by (Seiford & Zhu, 1998), to measure the sensitivity of the model results for the

SUE. Initially, some of the reasons to analyze the sensitivity of the model will be discussed. Then, the chosen methodology and the model are described. Finally the results and conclusions will be presented.

**Keywords:** Data envelopment analysis, sensitivity analysis, State University System, super-efficiency.

## 1. Introducción

La Subcomisión Técnica del Sistema de Universidades Estatales en Colombia dispone de un sistema de indicadores, provistos por el sistema de información del ministerio de educación colombiano SNIES (MEN 2012), para evaluar el desempeño de las universidades públicas (en adelante lo llamaremos modelo SUE). Ante la necesidad de resumir este conjunto de indicadores de manera tal que pudieran ser analizados de una manera general y que sirvieran de referencia al SUE para caracterizar el desempeño de las diferentes instituciones universitarias estatales se desarrolló para tal fin el modelo SUE.

El modelo SUE se basa en el establecimiento de la relación entre la capacidad de las Universidades, medida por los recursos que tiene a su disposición, y los resultados logrados con estos recursos. Para ello se define un indicador de capacidad (ICAD) y varios indicadores de resultados que reflejan la misión de la Universidad, a saber:

- el indicador de formación académica (IRFORM),
- el indicador de producción académica (IRCTI) y
- el indicador de extensión (IREXT)
- el indicador de bienestar (IRBIE)

El indicador de capacidad ICAD, fue conformado por las siguientes 4 variables: Número de profesores de cada institución en equivalentes a tiempo completo ponderados por nivel académico (DTECP), Presupuesto de la Institución (Rec\_finan), Gastos en personal administrativo (Gasto\_Admin) y Espacio físico construido (M2).

El indicador de resultados de producción académica (IRCTI), fue conformado por las siguientes 6 variables: Grupos de investigación reconocidos por Colciencias (Grupos), Revistas publicadas en el publindex (Revistas), Artículos de investigación (Articulos), Patentes (Patentes), Movilización de docentes (MOVEDOC), Producción cultural (PROCULT).

El indicador de resultados en extensión (IREXT), fue conformado por las siguientes 5 variables: Docentes tiempo completo equivalente en extensión (DOCEXT), Entidades vinculados a la extensión (ENTIDADES), Productos licenciados (LICEN), Número de horas en educación continuada (CONTINUA), Estudiantes vinculadas a la labor extensión (EST\_EXT).

Por último, el indicador de resultados en bienestar (IRBIE), conformado por 3 variables: Apoyos a programas de pregrado (APOPRA), Apoyos a programas de posgrado (APOPOS), Tasa de retención de estudiantes (RETEN\_PR).

A partir de las variables base arriba listadas se obtuvieron cada uno de los indicadores citados utilizando la técnica estadística conocida como Análisis de Componentes Principales (ACP). Una vez obtenidos los indicadores fue determinada la relación existente (para cada una de las universidades del sistema) entre su indicador de capacidad ICAD y cada uno de sus indicadores de resultados IRFORM, IRCTI, IREXT e IRBIE. La relación encontrada sirve como marco de referencia para establecer el desempeño de cada universidad en el contexto del sistema universitario estatal. El modelo SUE no mide propiamente eficiencia sino que calcula una línea de regresión. Esta línea pasa por el “medio” de los datos (coordenadas IRCTI e ICAD o coordenadas IRFORM e ICAD, de cada universidad) definiendo como “excelentes” las universidades que están por encima de la línea de tendencia central y como no satisfactorias aquellas que se localizan por debajo de ella. El grado de excelencia o inferioridad de estos puntos (las universidades) se mide por la magnitud de la desviación con respecto a la línea de tendencia central. Este enfoque no contempla método alguno para evaluar la sensibilidad de su resultado a variaciones en la información.

Bajo el enfoque del Análisis Envolvente de Datos se presentó un modelo alternativo (Soto & Ramírez,

2011) al modelo SUE que contempla la totalidad de la información sin mezclar las variables originales en indicadores (los indicadores obtenidos mediante ACP recogen solo un porcentaje de la variabilidad total de los datos) llegando a una medida de eficiencia de las Universidades sin pasos intermedios. No obstante, al aplicar el enfoque DEA para evaluar el Sistema Universitario Estatal también surge la inquietud sobre la sensibilidad de su resultado generándose preguntas tales como ¿Qué tan robustos son los resultados arrogados por el modelo basado en DEA?, ¿Qué tan sensible es una Universidad a cambios en la información propia y la de las demás? o ¿Bajo qué límites las Universidades se mantienen eficientes? Para dar respuesta a estas preguntas este artículo reporta los resultados de la investigación sobre la robustez del enfoque DEA al evaluar el sistema de universidades estatales en Colombia.

El análisis de sensibilidad para modelos DEA ha sido ampliamente discutido, (Cooper et al., 2001; Jahanshahloo, et al., 2005; Neralić & Wendell, 2004; Zhu, 2001) debido a que los métodos comunes para medir la sensibilidad en otros modelos no resultan aplicables a los modelos DEA.

En el caso de los modelos de programación lineal, se conocen muchas técnicas destinadas a medir la sensibilidad de los modelos, variando los recursos o “lado derecho”, o cambiando los coeficientes en la función objetivo, incluso algunos de los desarrollos más actuales pueden tratar la sensibilidad para cambios en la matriz de restricciones. No obstante, dichos enfoques no son funcionales para los modelos de programación lineal usados en DEA, esto debido a que los cambios ocurren tanto en la matriz de restricciones como en el “lado derecho” (Charnes, et al., 1984). Así, si se modifican en determinado porcentaje los niveles de entradas (o salidas) de todas las DMU evaluadas, ya sea en una de las entradas (o en una de las salidas), o en todas, las eficiencias obtenidas se mantienen iguales; similarmente si se hace lo mismo para una sola DMU lo único que se consigue es cambiar su posición con respecto a las demás, mientras que todas las demás conservan

*su orden* de clasificación inicial. Así, que este enfoque es poco útil para probar la sensibilidad de los modelos DEA.

Muchos desarrollos se han adelantado relativos a medir la sensibilidad y estabilidad de la eficiencia DEA, los principales enfoques utilizan modelos de super-eficiencia o simplemente evalúan los cambios en las eficiencias cambiando la cantidad de variables (entradas/salidas) que se incluyen en el modelo.

En (Lotfi, et al., 2007) se propone un modelo de super-eficiencia en el cual se calcula la diferencia que existe entre la posición de la DMU evaluada con respecto a la frontera envolvente creada por todas las demás DMUs (excluyendo del conjunto de posibilidades de producción a la DMU evaluada). Esta metodología se aplicó al conjunto de 23 Bibliotecas en la ciudad de Tokio con tres entradas (una entrada discrecional y dos no discretionales) y tres salidas. En el artículo citado se muestran los resultados de evaluar la sensibilidad considerando el total de las entradas, además la evaluación de la sensibilidad, cuando solo se incluyen las variables no discretionales. Luego se comparan las diferencias entre ambos resultados. En este enfoque a diferencia del utilizado en el presente trabajo se considera la inclusión en el modelo de variables no discretionales.

En (Tyagi, et al., 2009) se evalúa la eficiencia de los departamentos académicos de IIT Roorkee (Indian Institute of Technology Roorkee) basado en la metodología del análisis envolvente de datos. Para estudiar la sensibilidad de los resultados se proponen 5 diferentes “modelos” en el sentido de evaluar la eficiencia de los departamentos académicos utilizando diferentes combinaciones de entradas y de salidas. En (Aziz, et al., 2013) se hace una la clasificación de las universidades públicas de Malasia utilizando DEA. El análisis de sensibilidad que se propone utiliza diferentes combinaciones de entradas/ salidas y concluye que diferentes combinaciones producen diferentes valores de eficiencia. Estas propuestas son enfoques más heurísticos que el soportado matemáticamente en el presente trabajo.

En (Wen, et al., 2011) se presenta un enfoque, el cual contempla entradas y salidas con información difusa. Se usa la función de Credibilidad, para encontrar un radio de estabilidad, cuando todas las variables son difusas. De manera similar en (Sadjadi, et al., 2011) basado en un modelo de Super-eficiencia Estocástico se propone una manera de medir la sensibilidad de los resultados, agregando una componente de perturbación la cual representa la variabilidad de las entradas y de las salidas. Así para diferentes niveles de incertidumbre se halla una esfera de estabilidad que es determinada por el máximo valor que toma la componente de perturbación. El modelo fue usado para evaluar la robustez de los resultados de eficiencia de 27 Compañías de gas en Iran, para tres diferentes niveles de perturbación. En el contexto del modelo SUE, la medición de las variables es un asunto determinístico, lo cual no debe confundirse con un reporte de información no confiable. La sensibilidad que se evalúa en el contexto del SUE está relacionada, no con la incertidumbre en la información suministrada, sino con el impacto que la variación de un valor(es) pueda tener en la eficiencia de la universidad evaluada o medir hasta qué punto ella tolera cambios en la información sin perder su eficiencia.

En el caso de (Gholam Abri, 2013) se aplicó el análisis envolvente de datos en 50 sucursales bancarias de Irán. Cada sucursal utiliza 4 entradas y 4 salidas. Con el fin de realizar el análisis de sensibilidad de la eficiencia se usó un método basado en el concepto de distancia vectorial que calcula el radio de estabilidad de cada DMU. Esta metodología que contempla un radio alrededor de la DMU observada, en la que las variaciones no afectan ni la eficiencia ni la clase de retorno a escala, siendo un enfoque más reciente, es más complejo que el utilizado en el presente trabajo.

El presente trabajo, que evalúa la sensibilidad del modelo SUE basado en DEA, recurre a la metodología propuesta por (Seiford & Zhu, 1998). En el trabajo citado se fundamenta matemáticamente, sobre un modelo DEA modificado, las condiciones que permiten

determinar hasta qué punto una DMU evaluada, con eficiencia relativa igual a la unidad, se mantiene eficiente ante potenciales desmejoras en sus entradas/salidas y potenciales mejoras en las entradas/salidas de las restantes DMUs.

## 2. Metodología

Dentro del análisis envolvente de datos es común que más de una DMU del total de DMUs analizadas se ubique en la frontera de producción, es decir, que su eficiencia relativa sea igual a la unidad. Esta condición no permite observar si existen diferencias entre estas DMUs eficientes, pudiendo dar la impresión de que son igual de sensibles a variaciones en la información. Encontrar los límites en los que se mantiene la eficiencia de una Unidad Productiva (DMU) es el insumo principal para determinar la robustez de los resultados de un modelo basado en DEA.

En éste artículo se presentará el enfoque desarrollado por (Seiford & Zhu, 1998), que basado en los modelos de super-eficiencia en DEA propone una metodología que arroja como resultados los límites (rangos de estabilidad) en que pueden variar las entradas y/o salidas de una DMU eficiente sin que ella deje de serlo.

Los rangos de estabilidad se analizarán para el caso en que a la universidad evaluada se le empeoran sus salidas (decrecen los productos), al mismo tiempo que en todas las demás éstas se mejoran.

Se utilizará un modelo DEA modificado bajo el modelo CCR, véase (Charnes et al., 1978), para hallar el rango en el cual una DMU se mantiene eficiente debido a variaciones en la información. El estudio se hará específicamente para cambios porcentuales en toda la información.

Inicialmente se empieza por definir el concepto de “cambios simultáneos en toda la información”, que se usa como base para nuestro estudio. Estos cambios simultáneos consisten en empeorar las condiciones de la DMU observada al mismo tiempo que todas las demás son mejoradas. En el caso

específico en que se busca analizar la sensibilidad relacionada con las entradas, los cambios se hacen incrementando en un porcentaje las entradas de la DMU observada, mientras que se reducen en la misma proporción las mismas entradas en todas las demás. Otro es el caso cuando queremos probar la sensibilidad relacionada con las salidas, para el cual se deben reducir en un porcentaje las salidas de la DMU observada mientras que todas las demás incrementan sus salidas en el mismo porcentaje.

Suponiendo que se tiene un conjunto de  $n$  DMUs. Cada  $DMU_j$  ( $j=1,2,\dots, n$ ) produce  $s$

Para  $DMU_o$

$$\begin{cases} \hat{x}_{io} = \delta x_{io} \quad \delta \geq 1, i \in I \\ \hat{x}_{io} = x_{io} \quad i \notin I \end{cases} \quad (1)$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} \hat{x}_{io} = x_{io} + (\delta - 1)x_{io} \quad \delta \geq 1, i \in I \\ \hat{x}_{io} = x_{io} \quad i \notin I \end{cases} \quad (2)$$

y

$$\begin{cases} \hat{y}_{ro} = \tau y_{ro} \quad 0 < \tau \leq 1, r \in O \\ \hat{y}_{ro} = y_{ro} \quad r \notin O \end{cases} \quad (3)$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} \hat{y}_{ro} = y_{ro} - (1 - \tau)y_{ro} \quad 0 < \tau \leq 1, r \in O \\ \hat{y}_{ro} = y_{ro} \quad r \notin O \end{cases} \quad (4)$$

Donde,  $\hat{x}_{io}$  e  $\hat{y}_{ro}$  corresponden respectivamente a las entradas y salidas ajustadas de la  $DMU_o$ , y  $\hat{x}_{ij}$  e  $\hat{y}_{rj}$  con  $j \neq o$  corresponden respectivamente a las entradas y salidas ajustadas de las  $DMU_j$  con  $j \neq o$ .

Se puede observar que la anterior clasificación brinda la posibilidad de analizar la sensibilidad para cambios en diferentes conjuntos “I” de Entradas o para varios conjuntos “O” de Salidas, con la posibilidad de que tanto “I” corresponda al total de entradas como “O” corresponda al total de salidas. También se puede ver que el porcentaje  $\delta$  usado para evaluar la sensibilidad del modelo

salidas  $y_{rj}$  ( $r=1,2,\dots, s$ ) utilizando  $m$  entradas  $x_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ). Consideremos que la DMU a ser evaluada es eficiente (en este caso ser eficiente significa tener un valor radial óptimo de uno). Sean I y O subconjuntos de entradas y salidas, respectivamente, a los cuales es de interés medir la sensibilidad. Así, siguiendo a (Seiford & Zhu, 1998) los cambios para entradas/salidas para la DMU observada ( $DMU_o$ ) son como siguen:

Modificaciones en las entradas/salidas modelo DEA básico (ver ecuaciones, Ec (1) a Ec (4) para la DMU observada y Ec.(5) a Ec (8), para las DMUs diferentes a la observada).

$DMUs$  diferentes a la observada,  $DMU_j (j \neq o)$

$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} = x_{ij}/\delta \quad \delta \geq 1, i \in I \\ \hat{x}_{ij} = x_{ij} \quad i \notin I \end{cases} \quad (5)$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} \hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{(\delta-1)}{\delta}x_{ij} \quad \delta \geq 1, i \in I \\ \hat{x}_{ij} = x_{ij} \quad i \notin I \end{cases} \quad (6)$$

y

$$\begin{cases} \hat{y}_{rj} = y_{rj}/\tau \quad 0 < \tau \leq 1, r \in O \\ \hat{y}_{rj} = y_{rj} \quad r \notin O \end{cases} \quad (7)$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} \hat{y}_{rj} = y_{rj} + \frac{(1-\tau)}{\tau}y_{rj} \quad 0 < \tau \leq 1, r \in O \\ \hat{y}_{rj} = y_{rj} \quad r \notin O \end{cases} \quad (8)$$

orientado a las entradas es el mismo, tanto para la  $DMU_o$  como para las demás  $DMU_j (j \neq o)$ , con la diferencia de que usa manera invertida para lograr empeorar las condiciones de la primera (multiplicando sus entradas) y mejorar las condiciones de las segundas (al dividir por el valor  $\delta$ ).

Ahora se tiene el siguiente modelo modificado para estudiar la sensibilidad de la DMU evaluada. Los siguientes dos modelos de programación lineal propuestos por (Seiford & Zhu, 1998) proveen una manera de estudiar la sensibilidad de una DMU eficiente en el modelo CCR.

Orientado a las Entradas

$$\beta^* = \min \beta \text{ (modelo 1)}$$

Sujeto a

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta x_{io} \quad i \in I$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i \notin I$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\beta, \lambda_j (j \neq o) \geq 0$$

Orientado a las Salidas

$$\alpha^* = \max \alpha \text{ (modelo 2)}$$

Sujeto a

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{ro} \quad r \in O$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r \notin O$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\alpha, \lambda_j (j \neq o) \geq 0$$

De los modelos 1 y 2, arriba expuestos, es posible ver que los datos (Entradas o Salidas) provenientes de la DMU observada se excluyen del conjunto de posibilidades de producción, dando la posibilidad de encontrar un valor óptimo,  $\beta$  o  $\alpha$ , diferente a la unidad (para el caso de la DMU eficientes), que hace referencia a la distancia existente entre la DMU en cuestión y la frontera envolvente. También al utilizar los subconjuntos de "I" y "O" podemos escoger las entradas y las salidas de nuestro interés, es decir, en las cuales se requiere hallar los rangos de sensibilidad.

Con el planteamiento de los modelos 1 y 2, DEA modificados, se pueden hacer las siguientes proposiciones o teoremas -Véase (Seiford & Zhu, 1998):

## 2.1 Teorema 1

La DMU observada se mantiene eficiente, en el caso de estar orientado a las entradas, si el porcentaje de variación se encuentra en el rango  $1 \leq \delta \leq \sqrt{\beta^*}$ .

Por el modelo 1 DEA modificado, sabemos qué  $\beta^* \geq 1$  y por lo tanto que  $\sqrt{\beta^*} \geq 1$ , ahora se supone que la  $DMU_o$  es ineficiente cuando:

$$\hat{x}_{io} = \delta_o x_{io} \text{ y } \hat{x}_{ij} = x_{ij}/\delta_o, \quad i \in I \quad (9)$$

Entonces existe  $\lambda_j (j \neq o) \geq 0$  y  $\theta < 1$  que satisfaga:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j \frac{x_{ij}}{\delta_o} \leq \theta \delta_o x_{io} \quad i \in I \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i \notin I \quad (11)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s. \quad (12)$$

Lo anterior permite concluir que el valor óptimo de  $\beta^*$  debe de estar por encima del término  $\theta \delta_o^2$  con  $\theta < 1$ , si se quiere conservar la eficiencia de la DMU.

$$\theta \delta_o^2 < \beta^* \quad (13)$$

De esta manera se define que el máximo valor de  $\delta$  para que la  $DMU_o$  se mantenga eficiente debe estar en el rango propuesto para el teorema primero, es decir,  $1 \leq \delta \leq \sqrt{\beta^*}$ .

## 2.2 Teorema 2

De manera similar la DMU<sub>0</sub> se mantiene eficiente si su  $\tau$  está en este rango,  $\sqrt{\alpha^*} \leq \tau \leq 1$  en el modelo 2, siendo  $\alpha^*$  su valor óptimo.

Lo anterior se puede probar de manera análoga al primer teorema, por el modelo 2 se sabe que  $\alpha \leq 1$  y que  $\sqrt{\alpha} \leq 1$  y puesto que el valor de  $\alpha$  se obtiene minimizando el modelo de programación lineal, fija un límite inferior hasta el cual puede ser reducidas las salidas de DMU<sub>0</sub> antes de hacerse ineficiente.

## 2.3 Teorema 3

En el caso en particular cuando  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  y que  $O = \{1, 2, \dots, s\}$   $\beta^* = 1/\alpha^*$

La prueba de lo anterior se hace por la relación que existe entre orientación a entradas y la orientación a salidas en el modelo CCR. Esto significa que para cambios simultáneos en todas las salidas, es posible conocer la proporción de la perturbación permitida en las entradas basado en la proporción permitida en las salidas y viceversa. Con  $\sqrt{\beta^*}$  y  $\sqrt{\alpha^*}$  se puede hallar los límites en los cuales pueden fluctuar  $\delta$  y  $\tau$ , así pues tenemos que:

$$1 \leq \delta \leq \sqrt{\beta^*} \text{ ó } \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^*}}\right) \text{ y } \sqrt{\alpha^*} \leq \tau \leq 1 \quad (14)$$

## 2.4 Teorema 4

La DMU<sub>0</sub> se mantiene eficiente después de los cambios simultáneos en toda la información, si para cualquier  $\delta \geq 1$  la solución del modelo 1 es infactible y para cualquier  $0 \leq \tau \leq 1$  del modelo 2 es infactible.

Lo anterior se puede probar teniendo en cuenta algunas condiciones de los modelos DEA modificados utilizados en la propuesta de (Seiford & Zhu, 1998) .

Lo primero que se asume es que la DMU<sub>0</sub> es eficiente, para lo cual, debe al menos de existir un  $\beta^* \geq 1$ , en el caso de las entradas se pretende minimizar la distancia a una envolvente creada por el resto de la DMU<sub>j</sub> ( $j \neq 0$ ), sin embargo, si el conjunto  $I$  de entradas no contempla las entradas en las cuales la DMU<sub>0</sub> es mejor que las DMU<sub>j</sub>, las

solución del modelo (2) es infactible.

La propuesta de (Seiford & Zhu, 1998) no sólo contempla la posibilidad de hacer el análisis de sensibilidad para modelos CCR sino que también es posible aplicar este enfoque para modelos BCC y Aditivo, así como también es posible estudiar la sensibilidad de dichos modelos para cambios absolutos en toda la información. Sin embargo para efectos de ésta investigación, se expusieron los teoremas necesarios para realizar el análisis desde el modelo CCR y para cambios porcentuales en toda la información. Un análisis para una DMU en particular es realizado en la sección 3. Resultados y Discusión, donde a manera de ejemplo se muestra el caso de la Universidad Nacional.

## 3. Resultados y discusión

Ahora se aplicará la metodología descrita para evaluar la sensibilidad del modelo de desempeño del sistema universitario estatal Colombiano a cambios simultáneos en las salidas. Lo anterior permite obtener como resultado los rangos de las salidas en los cuales las universidades se mantienen eficientes, dando así una medida de la robustez al modelo para evaluar el desempeño de las universidades estatales basado en el análisis envolvente de datos.

Se tienen los datos para las 32 universidades estatales, correspondientes al año 2012 disponibles por el sistema en al año 2014, y en correspondencia al número de variables de entrada y salida consideradas en (Soto & Ramírez, 2011), para efectos de comparación, se tomaron en el presente trabajo el mismo conjunto de variables relacionadas con el indicador de Capacidad y con el indicador de la Investigación. Una regla empírica para evitar que muchas DMUs se ubiquen en la frontera de eficiencia, perdiéndose poder discriminante, recomienda utilizar el mayor número  $n$  de DMUs, posible de acuerdo con la siguiente expresión:  $n \geq \max(m * s, 3(m + s))$ . El número de salidas y de entradas, 10, consideradas en el presente trabajo están en el límite de lo recomendado. No obstante lo anterior con fines de

comparación se respetó el número de variables que usa el modelo SUE modificado basado en DEA, en detrimento de algo de su poder discriminante.

Aplicando el modelo CCR se determinan las universidades con eficiencia del 100%, que conforman el grupo de Universidades objeto de interés. Para lo anterior se hizo uso del software DEA-Solver a (“SAITECH, Inc. - Products - DEA Solver PRO™,” n.d.). A las universidades con eficiencia del 100% se les procederá, (como se verá más adelante con el modelo Super-CCR), a calcular los límites (rangos) en los cuales estas universidades se mantienen eficientes para cambios simultáneos en su información de salida.

Así, se usará el total de 4 variables de capacidad (Docentes tiempo completo equivalente, Gasto en personal administrativo, Recursos financieros y Metros cuadrados para uso misional) como entradas y 6 las variables de investigación (Grupos de investigación, Revistas indexadas, Artículos publicados en revistas indexadas, Patentes, Movilidad de docentes, Producción cultural) como salidas. La información suministrada por cada una de las Universidades se presenta en la Tabla T1.

Aplicando el modelo CCR orientado a las salidas a los datos de la tabla T1 se tienen los resultados que aparecen en la tabla T2. Es orientado a las salidas para capturar el hecho, de que las universidades no pueden decidir sobre el nivel de sus entradas (en particular el monto de los recursos asignados por la nación) y por lo tanto sus estrategias de mejoramiento de eficiencia obligatoriamente deben orientarse a aumentar sus resultados. Se observa que 14 universidades obtuvieron una eficiencia del 100%. Dado que el modelo CCR arroja el mismo valor para todas las Universidades eficientes es de interés conocer qué tan sensible es la eficiencia obtenida por cada universidad eficiente a reportes inexactos en el valor de las entradas y/o salidas.

Para calcular la sensibilidad de la eficiencia a cambios en el valor de las entradas y/o salidas se usa el modelo 2, DEA modificado, orientado a las

salidas, se toma como subconjunto “O” el total de “S” salidas. En el caso particular en que todas las entradas,  $I=\{1,2,\dots,m\}$  y todas las salidas  $O=\{1,2,\dots,s\}$ , son sujetas a cambios simultáneos es posible usar el modelo DEA de Super-eficiencia CCR-O.

El modelo de Super-eficiencia usa un modelo de programación lineal que excluye del Conjunto de Posibilidades de Producción a la DMU evaluada (Andersen and Petersen, 1993), por lo que para todas las DMU eficientes (eficiencia CCR) existirá un  $\alpha \leq 1$  (ver sección 2.2 Teorema 2) que representa el porcentaje de las salidas en ellas pueden ser alteradas para alcanzar la frontera eficiente. El resultado de evaluar la super-eficiencia de cada una de las universidades se muestra en la tabla T3.

En el caso de la Universidad Nacional el valor de 0.17364399 en  $\alpha$  significa que sus salidas podrían reducirse hasta a un 17.34...% y aun así permanecer en la frontera envolvente de eficiencia. Lo anterior significa que mientras más pequeño sea el valor de  $\alpha$  menos sensible es la universidad a cambios en la información de las entradas. Si el valor de  $\alpha$  es cercano a 1, pequeños cambios en la información pueden cambiar su condición de eficiencia. Nótese por ejemplo que hay otras universidades (p.ej. Universidad del Cauca y del Atlántico) que están al otro extremo y tienen eficiencia poco robusta. Lo anterior se evidencia en los correspondientes valores  $\alpha$ , de 0.97717599 para la Universidad del Cauca y de 0.95644886 para la Universidad del Atlántico (ver Tabla T3). Mientras más cercano a uno, sea el valor del  $\alpha$ , menor es la robustez de la eficiencia de la respectiva universidad, en el sentido de que el valor de eficiencia 1, inicialmente obtenido según el modelo CCR, puede fácilmente disminuirse (llegar a ser menor a uno) debido a pequeñas disminuciones en los valores que están reportando en sus salidas.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anteriormente (sección 2) se toma el valor de  $\alpha$  para hallar  $\tau$ . Así que el valor  $\tau$  puede variar en el rango de  $\sqrt{\alpha^*} \leq \tau \leq 1$ , para lo cual se utiliza

**Tabla 1. Datos Suministrados por SUE-año 2012**

NOMBRE IES	(I) DOCENTES TIEMPO COMPLETO EQUIVALENTE	(I) GASTO EN PERSONA ADMINISTRATIVO	(I) RECURSOS FINANCIEROS	(I) METROS CUADRADOS PARA USO MISIONAL	(O) GRUPOS DE INVESTIGACIÓN	(O) REVISTAS INDEXADAS	(O) ARTÍCULOS PUBLICADOS EN REVISTAS INDEXADAS	(O) PATENTES	(O) MOVILIDAD DE DOCENTES	(O) PRODUCCIÓN CULTURAL
NACIONAL	2161.04	347233353.00	92858051.93	433452.08	689.00	402.00	23516.80	21.00	934.00	225.00
PEDAGÓGICA	440.16	7986738.00	21409360.00	29861.38	66.00	62.00	743.00	0.00	72.00	8.00
UPTC	828.01	20641880.00	49704140.00	153502.21	127.00	48.00	1156.00	0.00	141.00	0.00
CAUCA	550.37	28539431.00	16195329.00	132376.50	98.00	12.00	1410.40	0.00	69.00	1.00
TECNOLÓGICA DE PEREIRA	441.69	15343348.00	44703051.00	77162.17	98.00	11.00	1503.80	5.00	137.00	5.00
CALDAS	417.92	12877924.00	25010635.66	77385.50	59.00	108.00	1816.40	0.00	64.00	13.00
CÓRDOBA	336.34	17354987.00	42018382.44	48357.50	51.00	18.00	622.00	0.00	10.00	0.00
SURCOLOMBIANA	284.14	10982676.00	27852364.00	37598.01	37.00	12.00	108.00	0.00	87.00	0.00
AMAZONÍA	198.41	6113236.00	11533250.00	83844.71	31.00	6.00	215.00	0.00	0.00	0.00
MILITAR	374.79	10673047.00	55573211.00	63521.07	55.00	78.00	1359.60	3.00	80.00	1.00
TECNOLÓGICA DEL CHOCO	239.66	21314583.07	27338639.53	31381.00	23.00	6.00	66.60	0.00	0.00	0.00
LLANOS	201.46	13159385.00	19918322.00	36298.00	34.00	15.00	401.90	0.00	34.00	0.00
POPULAR DEL CESAR	183.69	5206608.00	7953798.00	71610.00	38.00	0.00	72.00	0.00	0.00	0.00
COLEGIO MAYOR DE CUNDINAMARCA	202.61	7597155.00	9039254.00	132186.98	29.00	20.00	145.00	0.00	2.00	0.00
PACIFICO	65.12	3613371.00	9134079.00	5476.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ANTIOQUIA	1848.50	71634254.00	97869271.04	195674.83	245.00	230.00	7441.50	17.00	476.00	8.00
ATLÁNTICO	371.10	11693780.40	40319592.87	63369.40	94.00	14.00	436.00	0.00	22.00	0.00
VALLE	934.87	61192000.00	104685460.64	233315.16	185.00	94.00	5828.20	7.00	290.00	15.00
INDUSTRIAL DE SANTANDER	632.26	49145313.00	127014836.99	184865.24	88.00	98.00	2538.90	0.00	37.00	0.00
CARTAGENA	434.65	44876932.00	35298076.50	85478.00	112.00	9.00	2158.00	0.00	83.00	10.00
NARIÑO	296.41	9449989.00	42380661.00	59410.53	57.00	20.00	935.20	0.00	58.00	1.00
TOLIMA	320.94	23307867.00	22211900.00	160098.86	54.00	9.00	987.80	0.00	44.00	0.00
QUINDIO	436.97	13088429.00	6615378.66	52452.80	44.00	3.00	826.00	1.00	62.00	0.00
UFPS_CUCUTA	288.11	7109593.00	33270285.00	37898.25	22.00	3.00	445.20	0.00	25.00	0.00
UFPS_OCAÑA	56.37	3881551.00	8870213.41	21910.88	5.00	0.00	12.00	0.00	0.00	0.00
PAMPLONA	524.73	9552468.00	26824283.00	78179.40	43.00	15.00	641.00	0.00	22.00	0.00
MAGDALENA	306.56	4944456.72	36484185.00	49545.96	72.00	9.00	693.90	0.00	35.00	0.00
CUNDINAMARCA	308.71	11632868.00	24304261.00	60838.41	14.00	0.00	38.00	0.00	9.00	0.00
SUCRE	115.92	3997130.00	14154960.00	21975.10	19.00	3.00	304.80	0.00	0.00	0.00
GUAJIRA	223.76	9381315.00	15626001.00	15570.02	26.00	0.00	42.00	0.00	31.00	0.00
DISTRITAL	758.02	16043463.52	193911986.96	68540.20	116.00	52.00	1528.90	0.00	41.00	2.00
UNAD	742.78	14683191.00	82477734.00	68712.11	68.00	6.00	153.90	0.00	13.00	25.00

la siguiente fórmula para determinar el porcentaje máximo para los cuales las universidades eficientes pueden reducir sus salidas y seguir siendo eficientes al mismo tiempo que todas las demás incrementen sus salidas.

**Tabla 2. Resultados Modelo CCR-O**

No.	DMU	Score	Rank
1	NACIONAL	1	1
2	PEDAGÓGICA	1	1
4	CAUCA	1	1
5	TECNOLÓGICA DE PEREIRA	1	1
6	CALDAS	1	1
8	SURCOLOM-BIANA	1	1
10	MILITAR	1	1
13	POPULAR DEL CESAR	1	1
16	ANTIOQUIA	1	1
17	ATLÁNTICO	1	1
18	VALLE	1	1
23	QUINDIO	1	1
27	MAGDALENA	1	1
32	UNAD	1	1
31	DISTRITAL	0.937503	15
21	NARIÑO	0.903823	16
15	PACIFICO	0.900053	17
3	UPTC	0.889745	18
20	CARTAGENA	0.889482	19
14	COLEGIO MAYOR DE CUNDINAMARCA	0.827947	20
30	GUAJIRA	0.824339	21
9	AMAZONÍA	0.750764	22
29	SUCRE	0.721373	23
12	LLANOS	0.686371	24
19	INDUSTRIAL DE SANTANDER	0.673975	25
22	TOLIMA	0.656407	26
7	CÓRDOBA	0.651057	27
26	PAMPLONA	0.59625	28
24	UFPS_CUCUTA	0.511458	29
11	TECNOLÓGICA DEL CHOCO	0.416845	30
25	UFPS_OCAÑA	0.325805	31
28	CUNDINAMARCA	0.203505	32

**Tabla 3. Resultados Modelo SuperCCR-O**

No.	DMU	Ef. CCR	$\alpha$ (Alfa)
1	NACIONAL	100%	0.17364399
2	PEDAGÓGICA	100%	0.51577183
4	CAUCA	100%	0.97717599
5	TECNOLÓGICA DE PEREIRA	100%	0.66940639
6	CALDAS	100%	0.58958455
8	SURCOLOM-BIANA	100%	0.91091693
10	MILITAR	100%	0.62407016
13	POPULAR DEL CESAR	100%	0.76907103
16	ANTIOQUIA	100%	0.58284583
17	ATLÁNTICO	100%	0.95644886
18	VALLE	100%	0.90918834
23	QUINDIO	100%	0.72568373
27	MAGDALENA	100%	0.56749309
32	UNAD	100%	0.59020588

Como se requiere hallar dos tipos límites de sensibilidad del modelo 2 orientado a las salidas, se define  $h_0$  que es el valor porcentual en el que la Universidad observada puede reducir sus salidas y  $h$  que es el valor en que de manera simultánea las demás pueden aumentar sus salidas sin perder la condición de eficiencia de la observada.

$$\text{Máx Red Salidas DMU}_o \rightarrow h_0 = 1 - \tau \quad (15)$$

$$\text{Máx Incr Salidas DMU}_j \ (j \neq o) \rightarrow h = \frac{(1 - \tau)}{\tau} \quad (16)$$

Así tenemos que

$$h_0 = 1 - \sqrt{\alpha} \quad (17) \text{ y } h = (1 - \sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha} \quad (18)$$

Aplicando Ec. (17) y Ec. (18) a cada una de las Universidades eficientes en la tabla T3 se hallan los rangos de estabilidad como se muestra en la tabla T4.

La tabla T4 muestra el análisis de sensibilidad para el grupo de las 14 Universidades eficientes en el modelo CCR. El estudio de sensibilidad da a conocer los límites ( $h_0, h$ ), por ejemplo, para el caso de la Universidad Nacional los valores de (58.3294%, 139.977%) significan que ésta puede reducir sus salidas en un 58.3294% sin perder su

condición de eficiencia al mismo tiempo que las salidas de todas las demás Universidades pueden ser aumentadas un 139.977%.

**Tabla 4.** Rangos estabilidad para cambios simultáneos en toda la información.

No.	DMU	Max Red. Sal. DMU <sub>o</sub>	Max Incr. Sal. DMU <sub>&gt;0</sub>
1	NACIONAL	58.3294%	139.977%
2	PEDAGÓGICA	28.1827%	39.242%
4	CAUCA	1.1478%	1.161%
5	TEC. DE PEREIRA	18.1827%	22.224%
6	CALDAS	23.2156%	30.235%
8	SURCOLOMBIANA	4.5580%	4.776%
10	MILITAR	21.0019%	26.585%
13	POPULAR DEL CESAR	12.3033%	14.029%
16	ANTIOQUIA	23.6557%	30.985%
17	ATLÁNTICO	2.2018%	2.251%
18	VALLE	4.6486%	4.875%
23	QUINDIO	14.8129%	17.389%
27	MAGDALENA	24.6679%	32.745%
32	UNAD	23.1751%	30.166%

#### 4. Conclusiones

Al aplicar el enfoque de Análisis Envolvente de Datos (DEA) para evaluar la eficiencia del Sistema Universitario Estatal Colombiano surge la inquietud sobre la sensibilidad de las eficiencias calculadas a cada una de las universidades del sistema. Se generaran preguntas tales como ¿Qué tan robustos son los resultados arrojados por el modelo basado en DEA?, ¿Qué tan sensible es el valor de la eficiencia de una Universidad a cambios en la información propia y la de las demás universidades? o ¿Bajo qué límites las Universidades se mantienen eficientes?

El enfoque de Análisis de sensibilidad de modelos DEA, para cambios simultáneos en toda la información, desarrollado permitió calcular los rangos de estabilidad de las universidades eficientes del sistema.

Como resultado final de esta investigación se muestra un enfoque para evaluar las universidades del sistema universitario estatal de Colombia, al mismo tiempo que se proporcionan los fundamentos matemáticos que respaldan la

robustez de la clasificación otorgada por el enfoque DEA propuesto. Los resultados mostrados en el presente trabajo también pueden servir como referencia al SUE, sobre el grado de tolerancia que podría aceptarse en el reporte de los datos de las universidades eficientes sin que se les cambie su condición.

#### 5. Agradecimientos

La realización de este artículo no hubiese sido posible sin el apoyo del programa Jóvenes Investigadores (convocatoria 566 de 2012) de Colciencias y la valiosa participación de la Oficina de Planeación de la UTP.

#### 6. Referencias

- Andersen, P., Petersen, N.C., (1993). A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis. *Manag. Sci.* 39 (10), 1261–1264.
- Aziz, N. A. A., Janor, R. M., & Mahadi, R. (2013). Comparative departmental efficiency analysis within a university: A DEA approach. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 90, 540-548.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *Eur. J. Oper. Res.* 2 (6), 429–444.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., Morey, R. C., & Rousseau, J. (1984). Sensitivity and stability analysis in dea. *Annals of Operations Research* 2 (1), 139-156.
- Cooper, W. W., Li, S., Seiford, L. M., Tone, K., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2001). Sensitivity and Stability Analysis in DEA: Some Recent Developments. *Journal of Productivity Analysis* 15 (3), 217-246.
- Gholam Abri, A. (2013). An investigation on the sensitivity and stability radius of returns to scale and efficiency in data envelopment analysis. *Applied Mathematical Modelling* 37 (4), 1872-1883.

- Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh, F., Shoja, N., Sanei, M., & Tohidi, G. (2005). Sensitivity and stability analysis in DEA. *Applied Mathematics and Computation* 169 (2), 897-904.
- Lotfi, F. H., Jahanshahloo, G. R., & Esmaeili, M. (2007). Sensitivity analysis of efficient units in the presence of non-discretionary inputs. *Applied Mathematics and Computation* 190 (2), 1185-1197.
- MEN, Ministerio de Educación (2012). Estadísticas de Educación superior. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co/sistemasdeinformacion/1735/w3-article-212353.html>
- Neralić, L., & Wendell, R. E. (2004). Sensitivity in Data Envelopment Analysis Using an Approximate Inverse Matrix. *The Journal of the Operational Research Society* 55 (11), 1187-1193.
- Sadjadi, S. J., Omrani, H., Abdollahzadeh, S., Alinaghian, M., & Mohammadi, H. (2011). A robust super-efficiency data envelopment analysis model for ranking of provincial gas companies in Iran. *Expert Systems with Applications* 38 (9), 10875-10881.
- SAITECH, Inc. - Products - DEA Solver PRO™ [WWW Document], n.d. URL about:reader?url=http%3A%2F%2Fwww.saitech-inc.com%2FProducts%2FProd-DSP.asp (accessed 6.25.15).
- Seiford, L. M., & Zhu, J. (1998). Sensitivity Analysis of DEA Models for Simultaneous Changes in All the Data. *The Journal of the Operational Research Society* 49 (10), 1060-1071.
- Soto, M. J; Arenas, V. W. (2005) La formación como indicador de desempeño de las universidades públicas desde la perspectiva del análisis envolvente de datos. *Scientia et Technica* 1 (28), 109-114.
- Soto, M. J., Ramírez, D. (2011). *Los indicadores de desempeño de las universidades públicas desde la perspectiva del análisis envolvente de datos (DEA)*. Documento resultado del Contrato Interadministrativo Universidad Tecnológica de Pereira (UTP)- Ministerio de Educación Nacional (MEN), Bogotá, Colombia.
- Tyagi, P., Yadav, S. P., & Singh, S. P. (2009). Relative performance of academic departments using DEA with sensitivity analysis. *Evaluation and Program Planning* 32 (2), 168-177.
- Wen, M., Qin, Z., & Kang, R. (2011). Sensitivity and stability analysis in fuzzy data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 10 (1), 1-10.
- Zhu, J. (2001). Super-efficiency and DEA sensitivity analysis. *European Journal of Operational Research* 129 (2), 443-455.



Revista Ingeniería y Competitividad por Universidad del Valle se encuentra bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.