Revista Iberoamericana de Educación Superior
E-ISSN: 2007-2872
emmaro@unam.mx
Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación
México

Camacho-Ríos, Alberto
Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial
Revista Iberoamericana de Educación Superior, vol. II, núm. 3, 2011, pp. 152-171
Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación
.jpg, México

Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial

Alberto Camacho-Ríos

Resumen

Esta investigación busca dinamizar la enseñanza de algunos conceptos del cálculo diferencial, a fin de mejorar su comprensión. La *dinamización* que se plantea se hizo a través de reconocer actividades de la topografía desarrolladas en diferentes épocas, concebidas en el escrito como prácticas de referencia. La acción de incorporar ese tipo de prácticas en la enseñanza matemática, se hace necesaria en la aproximación teórica conocida como socioepistemología, por la falta de modelos más organizados que lleven a los estudiantes a un establecimiento efectivo del conocimiento a través de su *resignificación*. Como ejemplo del trabajo experimentado con estudiantes, se expone el uso de la *anticipación* como práctica social que regula la actividad escolar de dos casos relacionados con la razón trigonométrica seno, que se plantean en el escrito.

Palabras clave: resignificar, socioepistemología, prácticas de referencia, prácticas sociales, función seno.

Socioepistemologia e práticas sociais. Para um ensino dinâmico do cálculo diferencial

Resumo

Esta investigação procura dinamizar o ensino de alguns conceitos de cálculo diferencial, com o objeto de melhorar sua compreensão. A dinamização exposta foi alcançada através do reconhecimento das atividades da topografia desenvolvidas em diferentes épocas, concebidas no escrito como práticas de referência. A ação de incorporar esse tipo de práticas no ensino de matemática faz-se necessária na aproximação teórica conhecida como socioepistemologia, pela falta de modelos mais organizados que levem aos estudantes a um estabelecimento efetivo do conhecimento através da sua resignificação. Como exemplo do trabalho experiente com estudantes, expõe-se o uso da antecipação como prática social que regula a atividade escolar de dois casos relacionados com a razão trigonométrica seno, expostos no escrito.

Palavras chave: resignificar, socioepistemologia, práticas de referência, práticas sociais, função seno.

Alberto Camacho-Ríos camachoalberto@hotmail.com

Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), México. Profesor de enseñanza de la matemática en el nivel superior adscrito al Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Temas de investigación: diseño de situaciones de aprendizaje para mejorar la enseñanza de la matemática en el nivel superior; búsqueda en la historia de la matemática de significados asociados a los conceptos de la matemática escolar.

RIES
Revista Iberoamericana de Educación Superior

Social epistemology and social practice. Towards a dynamic way of teaching differential calculus

Abstract
This investigation seeks to dynamize the teaching of some of the concepts of differential calculus in order to facilitate its comprehension. The dynamization set forth was achieved via the acknowledgment of topographic activities developed in different periods, created in the document as reference practices. The incorporation of these types of practices in teaching mathematics becomes necessary in the theoretical approximation known as social epistemology, given the lack of more organized models that lead the student to establish knowledge effectively through resignification. As an example of the work experimented with students, the use of anticipation as a social practice that regulates school activities of two cases related to trigonometric sine ration were put forward and set out in the document.

Key words: resignification, social epistemology, reference practices, social practices, sine function.

Recepción: *: 20/1/10.* ***Aprobación:*** *13/9/10.*

Introducción

En esta investigación se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una *práctica de topografía*, con la que se busca dotar de significado a las actividades de la clase de cálculo diferencial, a fin de hacerlas más dinámicas. En sí mismas, ese tipo de acciones devienen de matematizar la realidad inmediata y son concebidas en la socioepistemología (SE) como *prácticas de referencia*. La parte dinámica se sugiere al simular la práctica topográfica con acciones semejantes a las que se desarrollaron en ambientes reales de ciencias de la tierra y de la observación, como es el caso de la astronomía ptolemaica en el diseño de las primeras *tablas de cuerdas*, conocidas durante el siglo XX como *tablas trigonométricas*. Con la actividad se pretende que estudiantes del nivel de ingeniería establezcan y practiquen con las razones trigonométricas a través de *reconocerlas* durante el desarrollo de la recreación, debido a que estos temas ya fueron cursados en el nivel de preparatoria. La experiencia en el aula es sometida a la *anticipación*, devenida práctica social, en la que las razones-proporciones, ángulos y triángulos rectángulos, son los principales referentes matemáticos (Montiel, 2008: 6).

En general, con el reconocimiento de las razones trigonométricas y con la recreación de la práctica de topografía, se busca colocar a los alumnos en la parte inicial del proceso de *construcción social* del concepto de función trigonométrica, con la cual se tendrían argumentos para llevarlos al estado variacional de la misma. La perspectiva asume la importancia de que los estudiantes dibujen las figuras relacionadas a los problemas con cierta exactitud. Esto último no solamente conduce a una mejor comprensión de los problemas, sino que también forma una concepción más clara del significado de las funciones trigonométricas, permitiendo comprobar, aunque de manera aproximada, la exactitud de los resultados obtenidos. Para ello sólo se precisa de dos instrumentos: el transportador y la regla graduada, ampliamente conocidos por los estudiantes universitarios. La misma idea se usa para el diseño de un círculo trigonométrico unitario que conduzca a los alumnos a la construcción de una tabla trigonométrica. Ambos diseños, el círculo y la tabla, permiten estudiar la *variación* de los valores de las razones trigonométricas, a la vez que sirven para establecer las gráficas correspondientes, lo cual es fundamental en la definición de las funciones trigonométricas.

La *recreación* en el aula de las actividades para la construcción de la tabla trigonométrica, al estilo de Ptolomeo, y las respectivas gráficas, fueron pensadas en tres etapas de trabajo acordes a la SE, o sea:

- La búsqueda en la historia del *espacio real* de la ingeniería donde se ubica la práctica de referencia en la que se gestó el seno trigonométrico como una razón entre cuerdas.
- El establecimiento de un *micro-espacio* de la práctica que respondiera a las expectativas de los grupos de estudiantes.
- El desarrollo del *meso-espacio* de trabajo que los llevará a la etapa de establecer las razones trigonométricas.

Las tres etapas contemplan diferentes formas de un mismo conocimiento, resultado de procesos de *transposición didáctica*. Las nociones y conceptos, como son: *resignificar, anticipación, espacio real, micro-espacio, meso-espacio, transposición* y *dinamizar*, así como el reconocimiento de la aproximación socioepistemológica, son discutidos a lo largo del documento.

De lo anterior destaca la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las herramientas de la enseñanza matemática que permitan a los estudiantes del nivel de ingeniería construir las funciones trigonométricas?

Antecedentes

Trigonometría y arquitectura

Durante el primer semestre del año 2004 me asignaron dos cursos de matemáticas elementales para grupos de nuevo ingreso de la carrera de arquitectura. Acostumbrado a impartir matemáticas en el nivel de ingeniería, me incomodé pensando en las deficiencias que los estudiantes de arquitectura traen consigo del nivel preparatorio y en las quejas que en esa dirección había escuchado de mis colegas. La asignatura involucraba rudimentos de álgebra elemental, trigonometría y algunos elementos del cálculo diferencial, como el límite y la derivada. Al iniciar clase, efectivamente observe el poco afecto con el que los estudiantes tomaban las cuestiones del álgebra que les enseñé durante las primeras semanas, llegando al extremo de hacer patente un total *desgano* por las matemáticas. Este hecho me preocupó, debido a que había seguido un método de enseñanza deductivo y tradicional, incorporando resolución de problemas al discurso, sin lograr con ello enganchar a los estudiantes en ese proceso. No obstante, los resultados en la evaluación correspondiente a esa unidad fueron desastrosos.

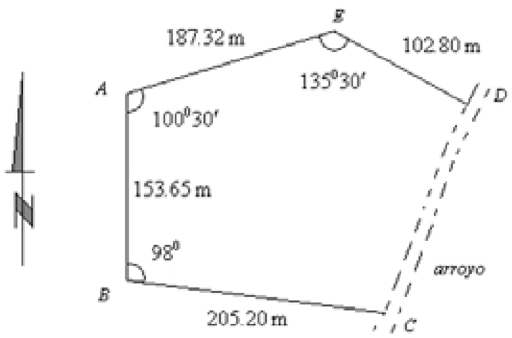
Sin embargo, desde la percepción inicial de desafecto que note por el curso, reflexionaba alrededor de alternativas de enseñanza que me sirvieran para atraer a los estudiantes en la resolución de problemas, que veía como una tabla de salvación para el curso y para los propios estudiantes. El problema inicial, desde mi punto de vista, era que las actividades en la resolución de problemas no contenían *significados* inmediatos que atrajeran la atención de los alumnos. De esta suerte, consideré enseñar la siguiente unidad, *trigonometría*, a partir de cuestiones geométricas diferentes que involucraran problemas *reales* como aquellos que atienden los *topógrafos* en el *levantamiento* de terrenos, práctica en la cual me había desenvuelto tiempo atrás y que incluso por varios años había impartido como asignatura en las carreras de ingeniería del propio sistema tecnológico.

Elementos de topografía en la enseñanza matemática

De esta manera, inicié la enseñanza de la trigonometría diseñando previamente un símil de *práctica topográfica* asociada a la astronomía, para que los estudiantes fueran capaces de establecer en equipos las razones trigonométricas, un modelo geométrico que arrojó importantes actividades de trabajo en el aula. El diseño me llevó unos cuantos días, mientras su aplicación duró a lo más unas tres clases. No insistiré en este apartado sobre los resultados de la experiencia, puesto que se presentan ampliamente en las últimas secciones del presente documento. Después de asegurar que los estudiantes *diseñaran* las gráficas de las razones trigonométricas, y a través de ello establecerlas como funciones, así como trabajar durante algunos días con triángulos rectángulos en la determinación de distancias y ángulos, bosquejé en el pizarrón una *planta de terreno* cuyos lados y ángulos eran del todo irregulares; se conocían las distancias de los primeros, así como los ángulos internos del polígono, a excepción de una de las distancias, la cual supuse no determinada debido a que el *arroyo* colindante no *había permitido* su medición; además, consideré uno de los lados como orientado hacia el sur franco (véase figura 1). El objetivo principal con la planta era la determinación del área del terreno. Para ese efecto, sugerí a los estudiantes que la dibujaran en papel milimétrico de 21.5 x 27.8 cm, a una escala que fue previamente discutida, haciendo uso de una *regla graduada* en centímetros para la medición de las distancias y un *transportador* para los ángulos, instrumentos que habían ya utilizado en el primer momento de construcción de las funciones trigonométricas. Durante esa etapa, hice hincapié en la forma en que los topógrafos miden los ángulos con los teodolitos (en el mismo sentido de las manecillas del reloj), *visando*, es decir, observando; por ejemplo, desde la posición del punto B del polígono hacia el punto A que se encuentra a la izquierda, para girar el ángulo con el transportador, que hace las veces de teodolito, observando luego hacia el punto *E*, a la derecha, con lo cual es posible *leer* en el *vernier* el ángulo interno del triángulo correspondiente.

La *orientación*, ubicación del *predio* en el papel, fue por demás sencilla, puesto que el lado *AB* quedó paralelo a las líneas verticales del mismo. Estos breves argumentos de la topografía sirvieron para la construcción de la planta.

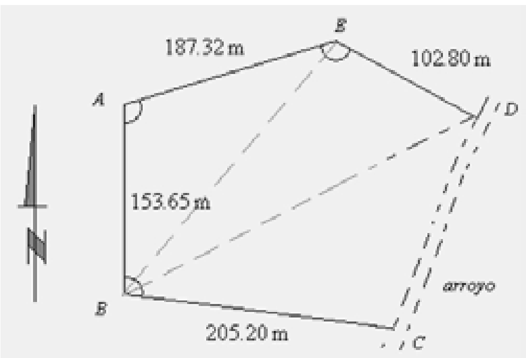
Figura 1



Nota: en la figura se muestra la planta topográfica de un predio. El lado AB está orientado al sur franco, desconociéndose la distancia del lado CD debido a que el arroyo no permitió su medición.

Después del bosquejo, pedí a los equipos que *triangularan* el terreno (véase figura 2), cruzando en diagonal los vértices respectivos.[1]

Figura 2



Nota: obsérvese la triangulación del predio en la forma en que la efectuaron los estudiantes, una actividad semejante a la que realizaban los topógrafos durante el levantamiento de terrenos, a lo largo de los siglos XVIII al XX.

La idea central con esos trazos fue que determinaran los ángulos internos de cada triángulo de la red (con una aproximación de minutos) así como los lados respectivos, utilizando su calculadora y la *ley de senos* para triángulos oblicuángulos, o sea: $\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}$, regla que fue comentada en el momento adecuado.

La determinación de los lados y ángulos, incluyendo el lado desconocido del polígono, se consiguió sin incidentes debido a la propia consecución de los lados de cada triángulo en la red. Después de esta etapa, exigí que verificaran el cierre de 180º para los ángulos internos de cada triángulo y comprobaran que, a su vez, los ángulos internos del polígono cumplieran con los resultados obtenidos. Para cada momento de trabajo fui recapitulando en el pizarrón los resultados que en el grupo se obtenían, intentando con ello homogeneizar la información y conocimientos entre los equipos, sobre todo en las aproximaciones lineales y angulares. La etapa final de cálculo fue hacer uso de la regla de Herón para la determinación de las áreas de cada triángulo a partir de conocer sus lados, es decir:, $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $S=\frac{a+b+c}{2}$, y con cuya suma de áreas fue posible determinar el área total del predio.

En resumen: desde el inicio del diseño de la planta hasta la etapa final de la determinación de los ángulos y las áreas de los triángulos, transcurrieron alrededor de 3 horas y 2 más de trabajo extra clase. Pude observar que a lo largo de las sesiones, los estudiantes abordaron la simulación de la medición con voluntad, trabajo en equipo, uso de herramientas para el diseño y cálculo que, en suma, se manifestó en un interés no percibido en la unidad anterior, toda vez que la práctica los colocó en una evocación de la medición y cálculo del área del predio real. En el caso de las fórmulas y reglas de la trigonometría que se utilizaron, estas fueron asumidas por los estudiantes como meras herramientas de uso y en

[1] El modelo de *triangulación* de superficies fue ampliamente utilizado en México por los topógrafos a lo largo de los últimos tres siglos.

RIES Revista Iberoamericana de Educación Superior

ese sentido colocadas en el lugar correspondiente de la actividad. La riqueza de la experiencia me llevó a pedirles el plano del predio en tinta, incluyendo títulos y letrados, haciendo uso de plantillas adecuadas, lo cual fue determinante para la evaluación de la unidad. En las plantas topográficas que al final los estudiantes me entregaron, revelaron su actitud y vocación por el diseño, asociado a las actividades de la arquitectura y, sobre todo, por la matemática como herramienta de uso.

Problemática de enseñanza matemática en el nivel superior

La función seno en los libros de texto

La función seno, al menos en los libros de texto de cálculo diferencial, se plantea de forma estática, como suponiendo que los alumnos la hubieran ya aprendido en el nivel de preparatoria, lo cual no se evidencia en la clase. Un caso particular se incluye en el libro de cálculo de Stewart (1999). En éste último, el planteamiento de la definición de la función seno es carente de significado y tendiendo a lo formal. La definición da por sentado que los estudiantes tienen concebido el seno trigonométrico como un cociente de catetos y que con ella se comprenderá la etapa covariacional siguiente, es decir, como *función* trigonométrica (véase figura 3).

La actividad que plantea Stewart es opuesta a los modelos de enseñanza de las razones trigonométricas que prevalecieron hasta mediados del siglo XX, que enfatizaban su definición a partir de la gráfica del círculo trigonométrico unitario. Las gráficas de la razones trigonométricas se establecían prolongando indefinidamente el diámetro

Figura 3

A26 ▢ APÉNDICE D TRIGONOMETRÍA

Funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo, θ, las seis funciones trigonométricas se definen como cocientes de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, como sigue (Fig. 6).

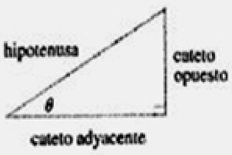


FIGURA 6

[4]

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} \qquad \csc\theta = \frac{hip}{op}$$
$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \sec\theta = \frac{hip}{ady}$$
$$\tan\theta = \frac{op}{ady} \qquad \cot\theta = \frac{ady}{op}$$

Esta definición no se aplica en ángulos obtusos o negativos; así pues, para un ángulo θ en general, en posición normal, sea $P(x, y)$ cualquier punto del lado terminal de θ y r la distancia $|OP|$. Ahora definimos lo siguiente:

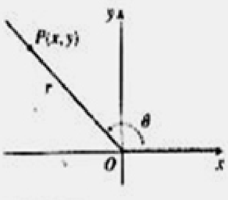


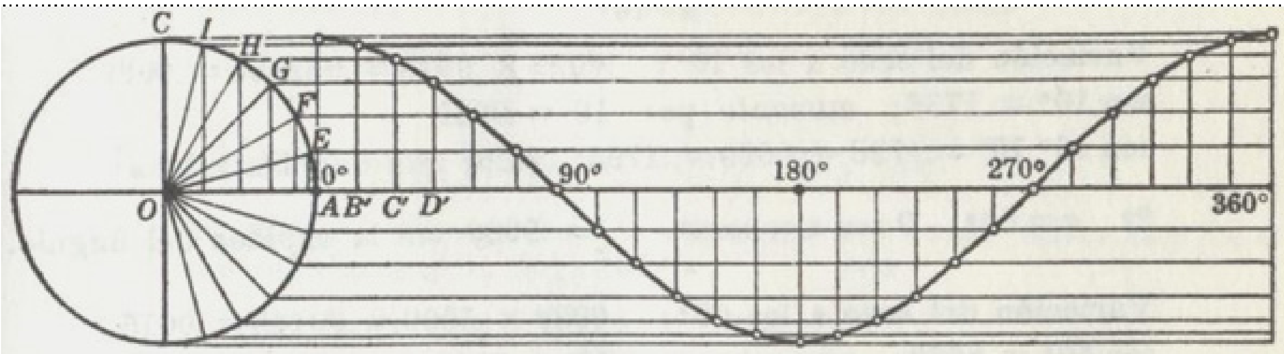
FIGURA 7

[5]

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Nota: varias de las definiciones relacionadas con la función seno que se plantean en los libros de texto, aparecen poco significativas o puramente formales. En la imagen se muestra la definición, del todo estática, colocada en el libro de cálculo de Stewart, de utilidad en las carreras de ingeniería.

Figura 4. Desenvolvimiento de segmentos del círculo trigonométrico unitario para determinar la gráfica de la razón trigonométrica coseno



horizontal y a partir de tomar segmentos de arco sobre el círculo, por ejemplo los que se muestran en la figura 4: AE, EF, FG, etcétera, de manera que desenvolviendo cada arco sobre la prolongación del diámetro, se tengan longitudes como AB´, B´B´, B´D´, etcétera, respectivamente iguales a los arcos y, como siguiente paso, levantando perpendiculares en los puntos A´, B´, C´,…, cuya longitud sea igual al cateto adyacente de los lados de los triángulos rectángulos que se forman de esa manera en el círculo, de modo que se logre bosquejar la gráfica de la razón trigonométrica correspondiente (Anfossi, 1943: 209; Granville, Smith y Mikesh, 1954: 96). En este caso la razón coseno.

Algunos problemas en la enseñanza de las matemáticas

Relacionado con lo anterior, a lo largo de 2009 surgieron varios proyectos de investigación en la disciplina de matemática educativa (ME), cuya preocupación fundamental se centró en los problemas de enseñanza de la matemática incorporada en los cursos de cálculo diferencial del nivel superior. En uno de estos, el de Sánchez y Camacho (2009: 46), se asume que la enseñanza del concepto de *función* por parte de profesores del Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica (SNEST), "es influenciada por el carácter abstracto de su definición", sin involucrar en dicha enseñanza *significados asociados* al concepto que la hagan más comprensible para los estudiantes. Por su lado, en la aplicación de un examen de diagnóstico a 300 estudiantes de nuevo ingreso del Instituto Tecnológico de Chihuahua II, durante el inicio del segundo semestre de 2009, en el cual se contemplaron problemas de la asignatura de álgebra elemental del nivel preparatorio, los resultados mostraron que solamente el 10% de los involucrados dio una calificación de *aceptable* en su resolución. No obstante, en la práctica escolar estos resultados se manifestaron brutalmente por el desconocimiento, por parte de los estudiantes, de las propiedades elementales de las operaciones con los números reales, así como por el propio desconocimiento de las *reglas* que llevan a la resolución de los problemas involucrados.

Estas dificultades contrastan con los objetivos que se plantean en los programas educativos, en los que se asume que los estudiantes: "adquirirán un razonamiento lógico que les ayude a resolver problemas de optimización" (Matemáticas I, 2007: 2). Ambas posiciones, desconocimiento de las propiedades en las operaciones con los números reales y una enseñanza rígida y tradicionalista de los conceptos del cálculo, han llevado a que investigadores en la enseñanza de la matemática propongan alternativas didácticas con las que se trata de amortiguar sus consecuencias. Dichas alternativas refieren una *resignificación* de los conceptos a través de incorporar en el discurso escolar argumentos de naturaleza variacional asociados a estos últimos (Cantoral y Farfán, 2004).

Sin embargo, la resignificación adquiere actualmente diferentes sentidos en la investigación mexicana de la ME, tanto en la búsqueda de significados asociados como en el uso de estos para el diseño de situaciones de enseñanza.

La socioepistemología

La noción de dinamizar *la enseñanza de la matemática*

Resignificar se entiende como la acción de dar un nuevo sentido a los conceptos complicados de la matemática escolar, a través de una enseñanza dinámica más organizada en la que se involucren las coyunturas procedimentales que dieron origen y definición a los propios conceptos. No obstante, el dar un nuevo sentido al conocimiento es un indicativo de que este último sólo ha adquirido un interés escolar por quienes administran su enseñanza y no un interés social, cultural o transdisciplinar, con lo cual es posible rescatar posibilidades que lleven a mejorar su entendimiento. Desde esta óptica, la sola adecuación de nuevos significados en los conceptos de la matemática escolar ha sido inútil, llevando incluso a obstaculizar más su comprensión: la incorporación de *tablas de valores* y argumentos gráficos, no han sido suficientes para que estudiantes universitarios mejoren el aprendizaje del concepto de *función* como una dependencia entre variables; tampoco lo han sido la *pendiente de la recta tangente* y la *razón de cambio* para la comprensión de la *derivada*. Visto así, los significados que se asocian al conocimiento escolar debieran hacerlo más *dinámico* y comprensible en su utilidad en el aula. Para ello, estos últimos deben estar lo más cercanos posible de los segundos. Por ejemplo, se puede modelar un diseño de situación para enseñar la derivada como razón de cambio a través de argumentos próximos de ésta, como son la *diferencia* y el *diferencial* (Camacho, 2009: 232-237), puesto que las tres nociones surgen de un mismo modelo variacional que les integra. Sin embargo, si bien la cercanía de los conceptos es una condición fundamental, la importancia no se centra tanto en la búsqueda de resignificar los conceptos, sino más bien en dotar de significado o hacer más *real* y experimental a la actividad práctica que se desarrolla con éstos, toda vez que la práctica los dinamiza, haciéndolos más comprensibles, como intentamos explicar enseguida.

Prácticas de referencia y socioepistemología

Fourez (2002), en su obra sobre *La construction sociale des sciences*, define la SE como una parte de la filosofía de las ciencias que estudia la manera sobre el cómo los saberes se organizan en sociedad. Según este último, el *discurso epistemológico* es articulado por dos aspectos complementarios de la ciencia que le constituyen, es decir, una *racionalidad teórica*, que destaca de una *racionalidad práctica*, cuya interacción establece un *discurso socioepistemológico*. En la confrontación de racionalidades, la construcción de saberes se mira como un proceso en el cual los *conocimientos de referencia*, o conocimientos que aparecen en la actividad práctica, tienen una formulación en el contexto de las *controversias*, donde los humanos deciden por ellos. Dicha formulación sucede alrededor de cuestiones complejas en las que se intenta articular la construcción de conocimientos complicados, no estables, de naturaleza incierta, y la toma de decisiones hacia estos últimos, durante un proceso de separación de ambas racionalidades.

El enfoque dado por Fourez a la SE, enfatiza el análisis de las controversias y debates que conducen a la construcción del conocimiento de referencia, cuyo límite en ese proceso son los *saberes*.

En el contexto de la ME, Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006) conciben los conocimientos de referencia como constituidos en ambientes socioculturales, no escolares, de los que se desprenden modificaciones para su difusión al salón de clase, que "afectan su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y sus profesores" (pp. 85-86). Este punto de vista considera que, desde la SE, se busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas "planteándose el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción" (Cantoral y Farfán, 2004: 139).

El punto de vista no asume, como en Fourez, el análisis de la confrontación previa al conocimiento de referencia, sino que parte de reconocerlo como ya constituido en contextos socioculturales, el cual sufrirá otro proceso de racionalización antes de ser llevado al salón de clase.

En el sentido dado a esta aproximación por los autores citados, las actividades que desarrollan los humanos a través de su experiencia, se conciben como *prácticas de referencia* que acontecieron a partir de un problema particular, de cuya solución destacan los conocimientos de referencia en forma de significados. En sí misma, una práctica de referencia representa la actividad de *matematizar* la realidad inmediata, cuya herramienta fundamental de los humanos, para que ello ocurra, son las *prácticas sociales*. Según Cantoral *et al.* (2006: 86), "el conocimiento es regulado por prácticas sociales que modulan su desarrollo y construcción". Por su lado, la realidad matematizable es pensada en Camacho (2010) como el *espacio real* o *macro-espacio* donde se desarrolla la actividad de referencia. En lo que sigue le designaremos indistintamente de esa manera.

Así, para la perspectiva SE que otorgamos al presente proyecto, las prácticas sociales son herramientas que llevan a *matematizar* el espacio real, cuyo resultado es sujeto en un micro-espacio en el que entran en juego nociones teórico-prácticas congruentes con la disciplina de referencia. Se parte de la idea de *recrear* en el salón de clase las prácticas de referencia y las prácticas sociales implicadas, con lo que se llevaría a *recuperar* el espacio real de la actividad, de suerte que se hagan *emerger* los diferentes significados del conocimiento. El objetivo es *reconstruir socialmente* este último, a partir de las retroalimentaciones sucesivas que concede el reconocimiento previo de dichas actividades (Cantoral *et al.*, 2006: 86; Montiel, 2008: 6).

Luego, vemos la matematización como un proceso social que reduce los fenómenos empíricos a relaciones elementales de la matemática, más que como un proceso didáctico que sirve para la modelación de problemas específicos de esta disciplina. Así, se provee un modelo que es sujeto a la SE, en el que interesan las actividades de enseñanza de la matemática que serán vehiculadas por las prácticas de referencia, toda vez que organizadas por prácticas sociales. Estas últimas permitirán la reconstrucción social de los conocimientos, para determinar un mejor entendimiento en los estudiantes.

En general, de lo anterior destacan dos acciones para la presente investigación: 1) la recuperación de las prácticas de referencia y prácticas sociales, en cuyas actividades estuvo inmerso el conocimiento de referencia en proceso de construcción, y 2) el diseño y recreación de prácticas de enseñanza que incorporen los conceptos encontrados y sus acciones procedimentales.

Topografía y ciencias de la tierra

De esta manera, en ciencias como la topografía, astronomía de posición, arquitectura, hidráulica, navegación, fortificación, etcétera, surgieron significados del conocimiento matemático a través de matematizar la realidad que les era característica (Camacho y Sánchez, 2010). En México, desde el inicio del siglo XVI, la topografía se conocía en el ambiente académico como *geometría práctica* y formaba parte del núcleo de asignaturas que los estudiantes preparatorianos debían estudiar. No obstante, desde el inicio del siglo XX, en las escuelas preparatorias nacionales, la enseñanza de la trigonometría se identificaba por incluir argumentos de la topografía para dotar de significado a los problemas elementales que los alumnos resolvían. Ello no era casual debido a que: "La educación se reproducía en ausencia de reflexión teórica sobre el hecho mismo de enseñar. La práctica se lograba imprimir al sistema educativo desde la formación misma de los profesores, una característica eminentemente pragmática" (Cárdenas y Martínez, 2000: 11).[2]

Así por ejemplo, en el texto de trigonometría escrito por Anfossi (1943) para el nivel preparatorio, los problemas son sugeridos *reales* y colocados en un *micro-espacio*, en este caso el propio texto, simulado a través de la topografía. En general, las imágenes que se muestran en el libro revelan problemas de los que se destacan argumentos, por ejemplo: *ángulo de depresión, ángulo de elevación, altura del aparato* (el teodolito), así como el modelo práctico utilizado para la medición de ángulos y distancias en los levantamientos topográficos, etcétera (Anfossi, 1943: 44). Ello se debe a que Anfossi se formó bajo esa *característica pragmática* impresa a la educación durante los siglos XIX y XX, y formó además a una buena cantidad de estudiantes y profesores bajo esa concepción.

Así, a lo largo de los siglos XVII al XX, la topografía se posicionó en México como una ciencia medular para la resolución de problemas de campo: levantamientos, reconocimientos, trazos, observaciones astronómicas, etcétera. En sí misma, esta ciencia se compone de dos asignaturas: la geometría plana y la trigonometría que, en conjunto con la actividad práctica, llevan a los técnicos a una *geometrización* elemental de la realidad inmediata y que por su sencillez hacen que resulte comprensible para sujetos que en edades tempranas se inicien en ella (Camacho, 2010). La semejanza de la realidad que se establece con esta herramienta, rebasa en los sujetos el solo entendimiento de los conceptos matemáticos involucrados para dar paso a la modelación del *espacio real*, el cual a su vez resignifica a los conceptos matemáticos comprendidos en la experiencia a través de la actividad práctica desarrollada.

Estado del arte

En Camacho y Sánchez (2010), se coloca como resultado de investigación a la noción de *variabilidad*. Esta última surgió de sistemas de prácticas de referencia vinculadas con actividades de ingeniería que se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas. Los autores muestran esa noción como una resignificación del concepto de función que sirvió para el diseño de una situación de aprendizaje, en la que se usaron simulaciones geométricas en el intento de que estudiantes del nivel superior construyeran ese concepto.

Asimismo, Matheron y Noirfalise (2007: 6) propusieron "una enseñanza dinámica fundada sobre cuestiones problemáticas de estudio e investigación". La parte dinámica de la propuesta, supone colocar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos de la geometría elemental, a través de operarlos como problemas reales, incorporando *técnicas* y herramientas de uso procedimental. Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), formularon a estudiantes del liceo francés (en una calca) una *organización didáctica* relacionada con problemas de medición de ángulos internos y lados de triángulos, de modo que las técnicas de uso fueron aprovechadas de las

[2] Se cita en el 11º párrafo de la versión digital del artículo en HTML.

actividades que realizaban los ingenieros a lo largo del siglo XX. De esta forma, crearon a los estudiantes un micro-espacio que modelaba al contexto real, incluyendo juegos de geometría que simularon ser *instrumentos de observación*. De la situación se rescatan dos elementos fundamentales, por un lado, la transposición que hicieron los estudiantes de la actividad entre el macro-espacio y el micro-espacio; por otro lado, la propia transposición de las técnicas empleadas para la medición, usadas en su momento por los ingenieros.

En tanto, Montiel (2008) hizo una revisión socioepistemológica de las funciones trigonométricas desde su definición a través de la *matematización* de la astronomía expuesta en el *Almagesto* de Ptolomeo. El punto de partida para las *implicaciones didácticas* se sugiere en tres etapas o *desarrollos del pensamiento* de los estudiantes del nivel superior, es decir: el pensamiento proporcional (ligado a la razón entre cuerdas), el pensamiento covariacional (funcional) y el pensamiento formal, relacionado con los desarrollos en serie. Para la primera etapa, se propone: "El estudio de fenómenos macro no manipulables donde expresar las relaciones proporcionales que se descubren, propicie los modelos asociados a la razón trigonométrica. No se pretende la recreación del contexto de origen (el astronómico) porque pudiera ser más complejo simularlo que la construcción de la razón trigonométrica" (Montiel, 2008: 8).

Para la simulación de la construcción de la razón trigonométrica, la autora sugiere la *anticipación* como práctica social vinculada con la matematización de la astronomía, de modo que el modelo matemático que con ello se puede construir es de naturaleza geométrico elemental: "Esto es, la actividad matemática consiste en medir, comparar, aproximar y calcular eventos relacionados con fenómenos macro para representarlos en modelos geométricos proporcionales que permitan *anticipar* al hecho real" (Montiel, 2008: 6).

El estudio de Montiel fue ampliado por Rotaeche (2008), trabajo en el cual se desarrolló un proyecto sobre la construcción del concepto de *ángulo* en estudiantes del nivel elemental secundario. El proyecto contempló el diseño de una situación didáctica desde la perspectiva de Brousseau (1998), y destaca el uso de herramientas sencillas como el transportador, regla graduada, micas, etcétera, para la construcción de ángulos sobre un círculo trigonométrico.

Argumentaciones para el diseño

De los resultados que se plantean en la sección anterior, rescatamos para el proyecto la utilidad que hacen Matheron y Noirfalise (2007), de las nociones de macro-espacio, micro-espacio y meso-espacio, incorporándolas en el diseño y considerándolas normadas por las actividades de la ingeniería y del salón de clase, bajo los siguientes puntos de vista:

- *Macro-espacio*: espacio real donde se desarrollaron las actividades de ingeniería o prácticas de referencia. Por ejemplo, para la experiencia didáctica que se comenta en los antecedentes, el macro-espacio se refiere a las actividades realizadas en el trabajo de campo por los topógrafos.
- *Micro-espacio*: diseño de la actividad de ingeniería en un modelo instruccional. En el caso que hemos referido, el micro-espacio es en sí mismo el diseño de la planta topográfica bosquejada por los estudiantes y es el medio sobre el cual emerge el conocimiento de referencia.
- *Meso-espacio*: simulación en el salón de clase de la actividad matemática inherente a la práctica de referencia, haciendo uso del micro-espacio y las herramientas escolares alternas a las usadas en el espacio real, actividad que es regulada por prácticas sociales.

Para el ejemplo que se cita en los antecedentes, la práctica social que controla la actividad escolar

RIES
Revista Iberoamericana de Educación Superior

es la *anticipación*, dado que el contexto en el que se desenvuelve la trigonometría es del todo estático-proporcional y su representación se coloca en modelos geométricos elementales.

En los tres dominios se encuentran de por medio procesos de transposición del conocimiento involucrado en la práctica real, así como la propia transposición de los usos de instrumentos de observación y procedimientos con que se desarrollan las prácticas de referencia, los cuales se transfieren de un espacio a otro. No obstante, al menos para el proyecto, las cuestiones epistemológicas que arroja la transposición no son relevantes, debido a que los elementos de transferencia, en cada caso, son por demás naturales, como se aclara más adelante.

En cuanto al proyecto de Montiel (2008), en éste se dejó de lado la *recreación* del espacio real en el cual Ptolomeo (o bien Hiparco) desarrolló la práctica que lo llevó a construir la *tabla* de cuerdas en la que es inmerso el seno trigonométrico como una razón.

Para la construcción por parte de los estudiantes de la función trigonométrica, se propone:

- La recreación de la construcción de una tabla trigonométrica discriminando la parte del conocimiento astronómico, para que los estudiantes del nivel superior establezcan y reconozcan desde esa perspectiva la razón trigonométrica. En el sentido de la anticipación, ésta se asocia con la determinación de la posición angular de los objetos de la astronomía: cometas, planetas, estrellas, etcétera. Así, el llenado de la tabla asume y simula una práctica topográfica (las observaciones astronómicas son comunes en los levantamientos topográficos) a través de actividades que se corresponden a la práctica social, dentro de las actividades del meso-espacio, como son: dibujar, realizar cálculos numéricos, uso de instrumentos como el transportador y regla graduada, entre otros, eventos relacionados con la actividad real del macro-espacio.
- La actividad de determinar el área de un predio, cuyos resultados se comentan en los antecedentes.
- Hacer uso de las actividades anteriores para pasar a la construcción de la función trigonométrica.

El énfasis del trabajo experimentado con estudiantes es puesto solamente en las dos primeras actividades.

La práctica de referencia. Entre el espacio *real y el* micro-espacio

El espacio real: astronomía y tablas de cuerdas

Hiparco (siglo II a. C.) aplicó a la astronomía práctica un estilo de trigonometría plana y esférica caracterizada por el uso de cuerdas que subtienden arcos de circunferencia. Después de éste, Ptolomeo (85-165, d. C.), en el *Almagesto*, y en la búsqueda de integrar los aspectos de cómputo de la astronomía, construyó una tabla de cuerdas dividiendo la circunferencia en 360 partes tomando los arcos de medio grado en medio grado y dando para cada arco el valor de la *longitud* sexagesimal de la cuerda respectiva, suponiendo dividido el diámetro en 120 partes o *líneas*. Por ejemplo, para el arco de 180º, *arc (180º),* la cuerda es de 120^P (120 partes), la cual fue llamada *cuerda total*; en tanto que para *arc (23º19'59")*, la cuerda que le corresponde es de $23^P15'57''$. Con esta idea pudo determinar los valores de las cuerdas de ángulos muy pequeños y proporcionales a los de 60º y 72º, como fueron los de 12º, 6º, 3º, 1º, 30´ y 45´. La tabla de cuerdas fue una herramienta importante por la precisión que imprimió tanto a la medición de magnitudes astrales como en la solución de los problemas astronómicos que aparecen en su obra.

Para desarrollar la *tarea práctica* en la astronomía, es decir, los cálculos respectivos para el diseño de la tabla de cuerdas, Ptolomeo propuso una actividad preliminar (en nuestro caso la práctica social relacionada con la anticipación), contenida en el *Almagesto*, y que es intrínseca a la experiencia astronómica real (práctica de referencia):

> Para facilitar la tarea práctica, construiremos una tabla de estos segmentos dividiendo la circunferencia en 360 partes, tomando los arcos de medio grado en medio grado, y dando a cada arco el valor de la cuerda respectiva, suponiendo dividido el diámetro en 120 partes […]. Para evitar las fracciones utilizaremos la división sexagesimal […] (Pastor y Babini, 1985: 192).

No obstante, las razones trigonométricas ptolemaicas surgidas de la práctica social, fueron inicialmente sujetas a la noción de *seno máximo*, considerada como la máxima cuerda vertical que alcanza un arco de 90º. En el sentido sexagesimal, *arc (90º) = 600* partes. Con todo, el sistema sexagesimal cambiaría a centesimal en el sistema copernicano, de modo que el seno máximo evolucionó considerándolo en 10 000 partes, en las cuales Copérnico (1473-1543) dividió la eclíptica. De este modo, el actual *sen90º = 1*, y las tablas trigonométricas en sí, son colocados en una convención que surge de la *bóveda* esférica del espacio estelar ptolemaico y de sus propias observaciones astronómicas, como se plantea enseguida.

Justificación del paso entre el macro-espacio ptolemaico y el micro-espacio del salón de clase

El macro-espacio ptolemaico incorporaba una serie de esferas celestes donde se encontraba el universo y cuyas coordenadas de posición: *altura, declinación*, etcétera, podían ser ubicadas a través de observaciones angulares haciendo uso de *esferas armilares*[3] (véase figura 5). En este sentido, puede concebirse la posición de las estrellas a lo largo de un *transportador gigante* que hace las veces de la bóveda celeste a la misma escala del universo real (véanse las imágenes de las figuras 6 y 7). La geometría que hace la idealización de la bóveda ptolemaica, era resultado del conocimiento de los *Elementos de Euclides*, obra que es continuamente citada en el *Almagesto*.

La sencillez de la geometría euclidiana hace a su vez sencillo el paso de los elementos del macro-espacio ptolemaico al micro-espacio del salón de clase, al menos para el nivel superior de enseñanza. Por ejemplo, en lo que se refiere a los argumentos de la matemática escolar, *catetos* en lugar de cuerdas; ángulos y radianes que se cambian por los arcos; construcción de una tabla trigonométrica, en correspondencia con una tabla de cuerdas; *sen90º = 10cm*, por seno máximo = 100 000 partes, etcétera.

No obstante, como puede corroborarse, los argumentos de la astronomía ptolemaica están actualmente en desuso y en su lugar se aceptan, sin poner a discusión su transposición, los de uso común que se citan para el salón de clase.

Construcción del micro-espacio

Actividades preliminares

Para la recreación en el aula de las coyunturas de la práctica ptolemaica, eliminamos los argumentos astronómicos, dando lugar solamente al diseño de un círculo trigonométrico, con el que los estudiantes pudieron establecer las razones trigonométricas entre catetos. Para ello, la exigencia es que los alumnos posean los conocimientos de *número* y *escala*, recordando a su vez las concepciones de ángulo y radián en el sistema sexagesimal, así como la noción del

[3] La esfera armilar es un antiguo instrumento, empleado hasta el año 1600, que servía para determinar las coordenadas celestes de los astros. Estaba constituida por un cierto número de círculos o armilas, insertos el uno en el otro, representando el ecuador celeste, la eclíptica, el horizonte, etc., de tal manera que, una vez dirigida hacia una estrella, se podían leer sus coordenadas celestes sobre unas escalas graduadas (no obstante, no era en sí un telescopio, dado que no contaba con lentes ópticos para precisar en el objeto de observación, mas se puede concebir como el antecedente inmediato de los teodolitos). Las esferas armilares fueron utilizadas por los astrónomos árabes, por Hiparco y por Ptolomeo. Se cree que el armilar fue inventado hacia el 255 a. C. por el astrónomo griego Eratóstenes (véase: http://www.astromia.com/glosario/armilar.htm, consulta: septiembre de 2009).

Figura 5. El macro-espacio ptolemaico idealizado a través del uso de la esfera armilar

Nota: tomado de la edición latina del Almagesto, compilada por Hammam de Landola (1496).

Figura 6. Macro-espacio sexagesimal modelado por Ptolomeno para las observaciones astronómicas, usando esferas asimilares, e incorporando al *Almagesto*. En este caso la mira cd hace las veces de instrumento de observación

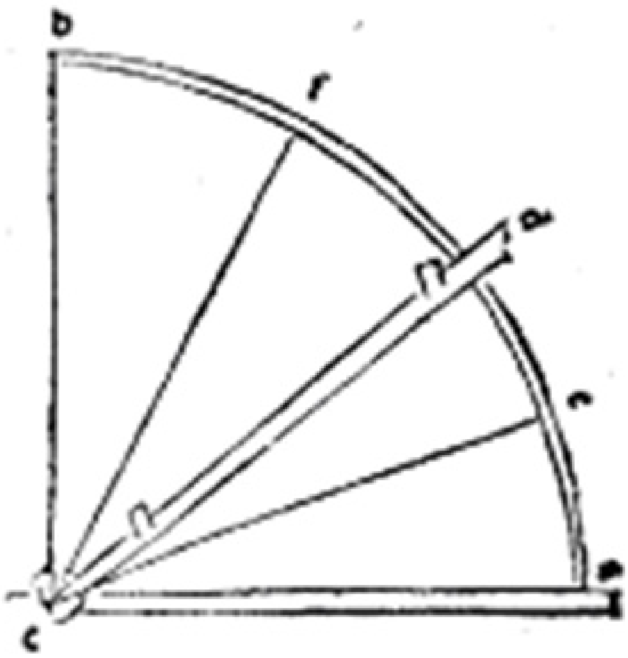
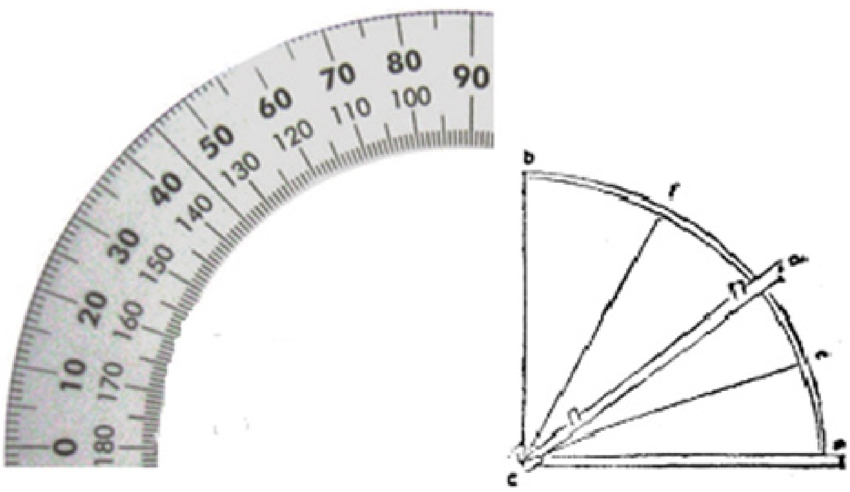


Figura 7. Intento de idealización escolar del pensamiento sexagesimal de Ptolomeo. Las imágenes se colocan entre el macro-espacio real y el mirco -espacio escolar



segundo como número real; que tengan concepciones de la relación entre pares ordenados, así como aquellas de arco, círculo, cuerda, radio, diámetro, etcétera. En cuanto a la notación y simbología, se deben conocer el uso de los símbolos de grado (º), minuto (´) y radián (*rad*) para los valores angulares. Si estas nociones no se encuentran apropiadamente en los estudiantes, el profesor deberá *repasarlas* en clase antes de iniciar la recreación de la práctica.

La rutina lleva a lo más tres horas clase, e incluye: a) una lectura previa de media cuartilla que relaciona los aspectos históricos de la recreación, como la que se aprecia en el apartado sobre Espacio real, b) trabajo de diseño extra clase del círculo trigonométrico, y c) el llenado de la tabla correspondiente. El objetivo final de la práctica es que los estudiantes *vivan* por sí mismos la experiencia de dibujar el seno trigonométrico a partir de establecerlo como una razón entre catetos, con lo cual es posible pasar a la etapa covariacional de la función. Al iniciar la sesión será necesario comentar los aspectos importantes de la lectura. Al final se hace a los alumnos una serie de preguntas y cuestiones de cálculo numérico relacionadas con las gráficas. Estas etapas se describen a continuación. No obstante, para llegar a un establecimiento efectivo de los conocimientos, es necesario incorporar la experiencia práctica del diseño de la planta topográfica comentada en los antecedentes.

A lo largo de la práctica, la actuación cotidiana del profesor se deja de lado pasando a ser solamente un orientador de las actividades, dirigiéndolas hacia el objetivo que se desea.

Primera cuestión: instrucciones para el diseño del círculo trigonométrico y llenado de la tabla (etapa de trabajo extra clase)

Materiales necesarios: una hoja blanca tamaño carta de 21.5 x 27.8 cm, compás, regla graduada, transportador, lápiz, goma y calculadora.

1. En la hoja dibuje un círculo de diez cm de radio. El gráfico debe incluir: los ejes rectangulares, la letra *O* del origen y el vértice donde inicia la descripción del círculo.
2. Haga variar el valor angular Ø de 0º a 360º, tomando valores angulares con el transportador de 20º en 20º, incluyendo los valores múltiplos de ¶: 0º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º y 360º, o bien en radianes en la forma: $0, \frac{\P}{4}, \frac{\P}{2}, \frac{3\P}{4}, \P, \frac{5\P}{4}, \frac{3\P}{2}, \frac{7\P}{4}, 2\P$
3. Para cada intersección del círculo con los radios que se asocian a cada valor angular, trace los segmentos que corresponden al cateto opuesto CO y cateto adyacente CA, para los triángulos rectángulos que así resultan.
4. Mida con la regla graduada directamente los valores de ambos catetos, calculando además la división $\frac{CO}{CA}$.
5. Anote los valores llenando así la tabla que se adjunta, a partir del círculo trigonométrico, y dividiendo previamente cada cateto entre los 10 centímetros del radio (véase la tabla 1).

Segunda cuestión: gráfica de las razones trigonométricas (etapa para el salón de clase)

6. Elabore las gráficas para el CO, CA y $\frac{CO}{CA}$ (estos valores se deben colocar en el eje de las ordenadas y deberá obtenerse una gráfica por expresión) en los ejes rectangulares que se dan enseguida (véase la imagen de la figura 8). Los valores que se colocan en el eje de las abscisas son los ángulos calculados en radianes que se deberán ubicar en la tabla 1.

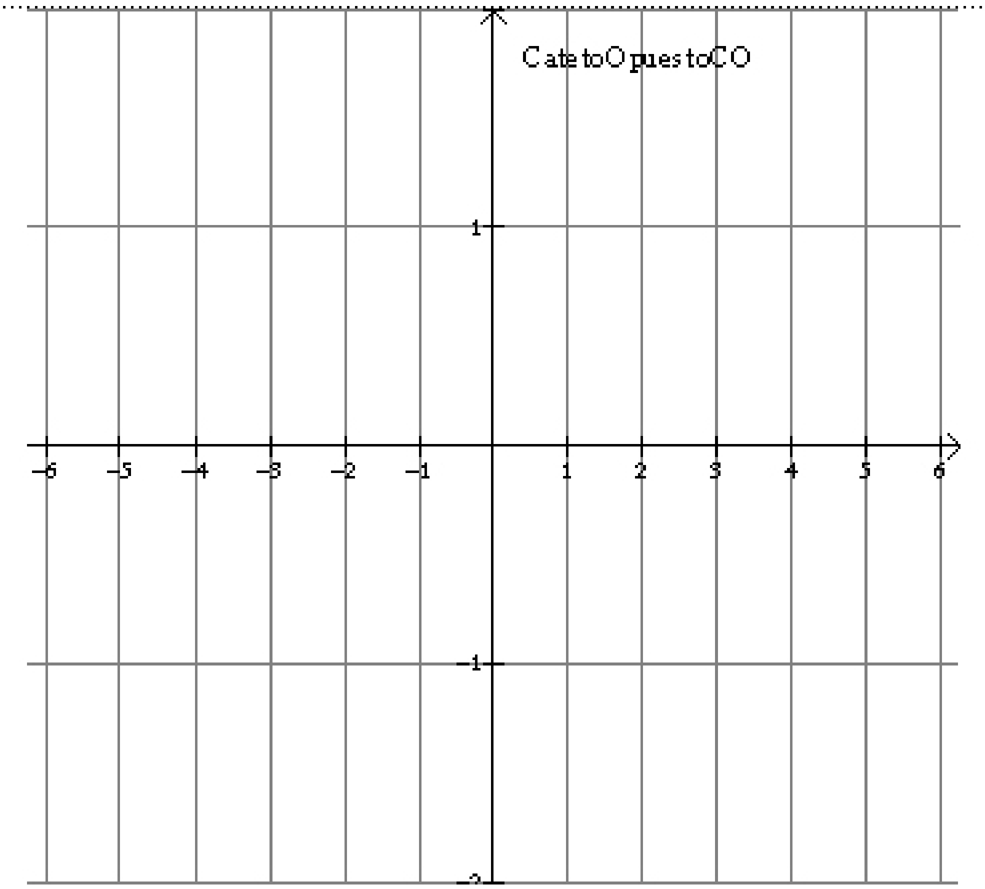
Al finalizar la etapa de graficación, el profesor debe a su vez dibujar paso a paso en el pizarrón las gráficas de las relaciones involucradas en la tabla 1, de manera que los estudiantes corrijan aquellos errores que pudieron haber cometido durante el desarrollo de la actividad.

RIES Revista Iberoamericana de Educación Superior

Tabla 1

θ, en grados	θ, en radianes	CO	CA	$\frac{CO}{CA}$	θ, en grados	θ, en radianes	CO	CA	$\frac{CO}{CA}$
0									
20					200				
40					220				
45					225				
60					240				
80					260				
90					270				
100					280				
120					300				
135					315				
140					320				
160					340				
180					360				

Figura 8. Ejes rectangulares sobre los que hay que dibujar las relaciones trigonométricas cuyos valores son contenidos en la tabla 1



Tercera cuestión: preguntas y problemas relacionados con las gráficas

Después de completar el bosquejo de las gráficas de la etapa anterior, el profesor pide a los equipos responder las siguientes cuestiones (las instrucciones se escriben en el pizarrón, o bien se dan por escrito):

1. ¿Reconocen las gráficas obtenidas?
2. Den una definición, a partir de la actividad anterior y en términos de los catetos opuesto CO y adyacente CA, de las expresiones anteriores.
3. ¿A qué razón trigonométrica se asocia la gráfica de la expresión CO?, ¿a cuál la del CA?, y ¿a cuál la del $\frac{CO}{CA}$? (Aquí es necesaria la intervención del profesor en el intento de ayudar a los estudiantes a reconocer y establecer las razones trigonométricas, dándoles el nombre correspondiente).[4] Después de asignar los nombres a las gráficas:
4. ¿En qué valores se asemejan y en qué valores se intersecan las gráficas del seno y coseno?
5. ¿En qué valores de los radianes inicia y termina la gráfica de la expresión seno? ¿En qué valores inicia la expresión coseno? Determinar lo mismo para la tangente.
6. ¿Qué sucede con las gráficas de estas expresiones si los valores tomados para los radianes son negativos? Intente la gráfica para esos valores en los mismos ejes rectangulares que se dieron.
7. ¿En qué valor de los radianes se coloca la parte más alta de la gráfica del seno y coseno? ¿En qué valor la parte más baja? Determinar lo mismo para la tangente.
8. ¿Cuál es el valor del CO, CA y $\frac{CO}{CA}$, en: $0, \frac{\P}{4}, \frac{\P}{2}, \frac{3\P}{4}, \P, \frac{5\P}{4}, \frac{3\P}{2}, \frac{7\P}{4}, 2\P$?
9. ¿Qué sucede con la gráfica de la tangente en $\frac{\P}{2}$?
10. Tome los valores de 40º para el CO y CA de la tabla que completó, y sustitúyalos en la identidad $sen^2ø + cos^2 = 1$, para comprobar que se cumple. Desarrolle esa operación para algunos de los valores nominales.
11. Pruebe la identidad *sen2ø = 2senø cosø*, para valores angulares de ø=45 y ø=20. De igual forma, use la tabla construida.

Al finalizar la etapa anterior el profesor pide a un representante de cada equipo escribir en el pizarrón los resultados obtenidos, de manera que se puedan contrastar entre sí. Los propios estudiantes deben concluir con el establecimiento de los resultados.

De la recreación de la práctica y resultados

La práctica ha sido recreada en diferentes etapas: en 2004 con el grupo de arquitectura que se comenta en los antecedentes; en 2007 con un grupo de ingeniería, tanto de sistemas computacionales como de ingeniaría industrial, y al iniciar el primer semestre de 2010, con tres grupos de las especialidades antes citadas (alrededor de 115 estudiantes). Además, fue consignada en el apéndice de un libro de cálculo diferencial (véase Camacho, 2009), cuyo uso en su última aplicación ayudó dinamizando aún más las actividades.

Los resultados que se comentan enseguida se refieren a la última recreación, efectuada al iniciar el primer semestre de 2010, y tiene que ver únicamente con uno de los grupos. Se aplicó a 39 alumnos de ingeniería en sistemas computacionales e ingeniería industrial de nuevo ingreso, los cuales no rebasaban los 19 años y cuyos conocimientos

[4] Esta es una etapa determinante de la experiencia, debido a que la mayoría de los estudiantes ya habrán visto y utilizado las funciones trigonométricas en el nivel preparatorio, sin que hubiera una construcción previa de por medio. En este sentido, es posible que reconozcan las gráficas designándolas con la expresión correspondiente, lo cual efectivamente ocurre en la práctica, permitiendo la validación de la etapa.

RIES
Revista Iberoamericana de Educación Superior

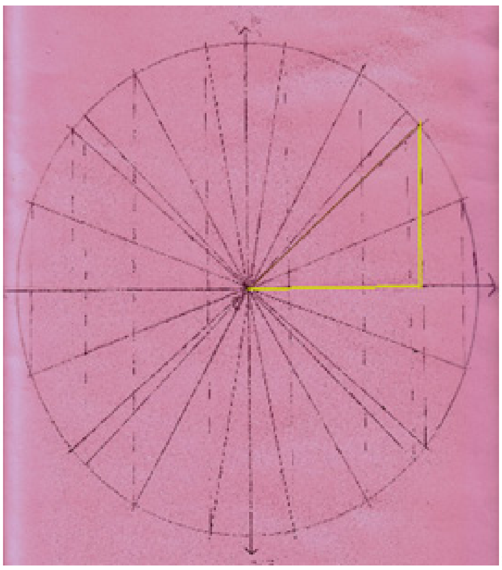
de la asignatura eran por demás generales. Para colocarlos en el contexto de la parte histórica de la práctica, previamente se les dio una lectura semejante a la que aparece en el apartado sobre Espacio real; no obstante, el profesor dio amplias explicaciones al respecto. La lectura precisó de un resumen en media cuartilla por parte de los estudiantes. Los comentarios que hicieron de la síntesis parecieran novedosos, en tanto sugieren su integración al propio bagaje cultural, mientras determinan el contexto favorable para la aplicación de las secuencias que integran la práctica.

La imagen de la figura 9, del lado derecho, muestra el llenado de la *tabla de cuerdas* que realizó uno de los equipos y condensa los valores angulares de 20º en 20º que fueron tomando del círculo trigonométrico diseñado en la hoja correspondiente. Esta cuestión fue tratada sin ningún problema. Los datos tomados con la regla graduada se dieron con una aproximación de hasta tres cifras decimales. Por su lado, los resultados del cateto *opuesto* CO y *cateto adyacente* CA, aparecen divididos por el radio de 10 cm del círculo.

Se muestran también los valores nominales múltiplos de ¶, apreciándose con ello un diseño más confiable en las relaciones. Como puede observarse, y con la debida reserva, la tabla es semejante a las tablas trigonométricas que se utilizaban en los niveles de secundaria y preparatoria a lo largo del siglo pasado, para determinar los valores naturales correspondientes de las funciones trigonométricas.

Por su lado, para la siguiente cuestión, las acciones de trabajo 1 al 6 de las instrucciones de la práctica, describen actividades de las cuales las primeras cuatro se realizaron sin ninguna variación en el desarrollo del trabajo, pero en la quinta actividad, al menos siete alumnos se olvidaron que trabajaban con un círculo de 10 cm y no con un círculo unitario, escribiendo así los datos con valores enteros y no en decimales como se esperaba. Para la actividad 6, la mayoría dibujó adecuadamente las gráficas de las relaciones seno y coseno, teniendo algunas dificultades con la tangente al concebirla simétrica respecto del eje de las ordenadas, es decir, no hicieron uso de valores angulares negativos.

Figura 9. Llenado de una de las tablas de *cuerdas* usando los valores nominales de ¶ , así como valores que van de 20º en 20º, usando un círculo trigonométrico construido ex profeso



5. Anote los valores, llenando así la tabla que se adjunta:

	θ en grados	θ en radianes	C.O Sen	C.A Cos	CO/CA Tg	θ en grados	θ en radianes	C.O	C.A	CO/CA	
0 →	0		0	1.00	0	190	3.316	-0.18	-0.99	0.182	
	10	.175	0.18	0.99	0.182	200	3.491	-0.35	-0.94	0.372	
	20	.349	0.35	0.94	0.372	210	3.665	-0.50	-0.87	0.575	
	30	.524	0.50	0.87	0.575	220	3.840	-0.65	-0.77	0.844	
	40	.698	0.65	0.77	0.844	225	3.927	-0.71	-0.71	1	← 5π/4
π/4 →	45	.785	0.71	0.71	1	230	4.014	-0.77	-0.64	1.185	
	50	.873	0.77	0.65	1.185	240	4.189	-0.87	-0.50	1.74	
	60	1.047	0.87	0.50	1.74	250	4.363	-0.94	-0.35	2.686	
	70	1.222	0.94	0.35	2.686	260	4.538	-0.99	-0.18	5.5	
	80	1.396	0.99	0.18	5.5	270	4.712	-1.00	0	ERROR	← 3π/2
π/2 →	90	1.571	1.00	0	ERROR	280	4.887	-0.99	0.18	-5.5	
	100	1.745	0.99	-0.18	-5.5	290	5.061	-0.94	0.35	-2.686	
	110	1.920	0.94	-0.35	-2.686	300	5.236	-0.87	0.50	-1.74	
	120	2.094	0.87	-0.50	-1.74	310	5.411	-0.77	0.64	-1.185	
	130	2.269	0.77	-0.65	-1.185	315	5.498	-0.71	0.71	-1	← 7π/4
3π/4 →	135	2.356	0.71	-0.71	-1	320	5.585	-0.65	0.77	-0.844	
	140	2.443	0.65	-0.77	-0.844	330	5.760	-0.50	0.87	-0.575	
	150	2.618	0.50	-0.87	-0.575	340	5.934	-0.35	0.94	-0.372	
	160	2.793	0.35	-0.94	-0.372	350	6.109	-0.18	0.99	-0.182	
	170	2.967	0.18	-0.99	-0.182	360	6.283	0	1.00	0	← 2π
π →	180	3.142	0	-1.00	0						

Para las secuencias contenidas en el rubro de las preguntas y problemas, a lo largo de una hora de clase se desarrollaron las actividades de la 1 a la 9, mas no fue así con las subsecuentes, dejándose éstas últimas como tareas. No obstante, los estudiantes compartieron al día siguiente estos resultados en el pizarrón, corrigiéndose así los posibles errores y asegurando su homogeneidad. Así por ejemplo, para la identidad *sen2ø = senø cosø*, en tanto ø=45, los valores inmediatos tomados por los estudiantes de la tabla 1, arrojaron resultados como:

sen90º = 2sen45º cos45º = 2(0.71)(0.71) = 1,0082

Que al ser cotejados en la propia tabla, dejaron ver la certeza de la misma.

En las dos primeras preguntas, así como para las 7 y 8, las respuestas fueron en su mayoría contestadas adecuadamente y en ese orden. Por su lado, el establecimiento de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente, se dio en el momento en el que el profesor preguntó a los alumnos por el reconocimiento de las gráficas (preguntas 1, 2 y 3); al menos dos estudiantes de diferentes equipos asumieron esto último.En general, la mayoría de los equipos ejecutó adecuadamente el bosquejo de las razones seno y coseno, no obstante que durante la etapa de establecimiento de los resultados se corrigieron los errores que hubo en las mismas.

Si bien los resultados de la recreación del conocimiento matemático contenido en la práctica se muestran alentadores, los errores que de ahí surgieron hacen necesario ciertos *retoques* para mejorarla.

Conclusiones

Las dos experiencias desarrolladas muestran cómo el conocimiento matemático involucrado fue disociado de su origen y sus coyunturas adecuadas a la enseñanza con cierto éxito. No obstante, la propuesta rompe con la forma tradicional del discurso matemático e irrumpe en éste con un rediseño más dinámico que pone en el centro de la enseñanza a la actividad desarrollada por los estudiantes.

Por otro lado, después del establecimiento de las razones trigonométricas, es necesario *trabajar* o ejercitar dichos conocimientos para reafirmarlos. En este sentido, es importante la actividad comentada en los antecedentes que lleva a la determinación de ángulos, distancias y áreas de un predio. Por otro lado, el siguiente paso hacia la definición covariacional de la razón trigonométrica, fue intentada a partir de aprovechar los significados asociados a la noción de *predicción*, como es la tabla de valores así construida, a través de: cambiar en ella los argumentos de las abscisas (en este caso los radianes) por valores de *x*, y aquellos del CO, CA o $\frac{CO}{CA}$, por valores de la variable independiente; la variación del ángulo en el circulo unitario; las gráficas de las razones trigonométricas, así como el concepto de función que había sido definido previamente en clase. A pesar de no haber controlado dicha actividad, con ello fue posible disponer la razón trigonométrica como una función en la forma: *f(x) = senx*, y extender más allá sus propiedades, por ejemplo la *amplitud* y *periodicidad* a través de la forma extensa de la función *f(x) = a sen(x-c)*. Esto último habla bien de cómo el uso de diferentes representaciones contiguas de un mismo concepto favorece su enseñanza.

Finalmente, el proyecto se ha desarrollado alrededor de una experimentación en la que se intentó el tratamiento didáctico de una cuestión de por sí compleja, cual es la construcción social de la función trigonométrica. No obstante, dicha construcción sólo es posible sobre el desarrollo de una aproximación como la socioepistemología. Luego, el conjunto de conocimientos que se alternan en sociedad, como los observados, deben ir a la par de compromisos que les instalen progresivamente en el salón de clase. Dichos compromisos sólo son posibles en la medida en que los profesores asuman cambios en sus prácticas y comportamientos en el salón de clase, alrededor de introducir en la enseñanza matemática argumentaciones dinámicas más consistentes, que ayuden a mejorar el entendimiento en los estudiantes. ■

Referencias

Anfossi, A. (1943), *Trigonometría rectilínea*, México, Editorial Progreso.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Camacho, A. (2009), *Cálculo Diferencial*, Madrid, Díaz de Santos Editores.

Camacho, A. (2010), "Geometrización del espacio real", en *Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, Monterrey, México.

Camacho, A. y B. I. Sánchez (en prensa), "Análisis sociocultural de la noción de variabilidad", en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, México, Relime (aceptado para su publicación).

Cantoral, R. y R. M. Farfán (2004), "La sensibilité à la contadiction: logarithmes des nombres négatifs et origine de la variable complexe", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, Francia, La Pensée Sauvage, pp. 83-102.

Cantoral, R., R. M. Farfán, J. Lezama y G. Martínez (2006), "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos", en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, México, Relime, pp. 83-102.

Cárdenas, C. y J. Martínez (2000), "Apuntes sobre la formación de profesores durante la segunda mitad del siglo XIX", en *Revista de Educación*, Nueva época, núm. 3, México, <http://www.masblogs.net/educadores/archives/34> [Consulta: 2 de diciembre de 2009].

Fourez, G. (2002), *La construction sociale des sciences. Les logiques des inventions scientifiques*, Bruselas, De Boeck Universit, Collection Sciences, Éthiques et Sociétés.

Granville, W. A., P. Smith y J. Mikesh (1954), *Plane and spherical trigonometry*, Boston Massachusetts, Ginn and Company.

Hammam de Landola, J. (1496), Epytoma *Joannis de Monte Regio in almagestum Ptolomei,* Venettis, Bibliothèque Nationale de France, <http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k59659g> [Consulta: septiembre-diciembre de 2009].

Matemáticas I (2007), Programa de Cálculo Diferencial para Estudiantes de Ingeniería del Sistema Tecnológico Federal, México, Dirección General de Educación Superior Tecnológica.

Matheron, Y. y R. Noirfalise (2007),"Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER", Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP <http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/textes-fondateurs> [Consulta: 5 de septiembre de 2009].

Montiel, G. (2008), "Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico", en H. Hernández y G. Buendía (eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 105-119, Chiapas, Universidad Autónoma de Chiapas.

Pastor, R. y J. B. Babini (1985), *Historia de las matemáticas*, tomo I, España, Gedisa.

Rotaeche, R. A. (2008), "La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria", Tesis de maestría, Mexico, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN.

Sánchez, B. I. y A. Camacho (2009), "Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función", en *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, año 5, Argentina, Universidad Nacional de Rosario.

Stewart, J. (1999), *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4ª ed., México, Thomson Learning.

Cómo citar este artículo:
Camacho-Ríos, Alberto (2011), "Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial", en *Revista Iberoamericana de Educación Superior* (*RIES*), México, ISSUE-UNAM/Universia, vol. II, núm. 3, pp. 152-171, http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/84 [Consulta: fecha de última consulta].