



Acta Scientiarum. Technology

ISSN: 1806-2563

eduem@uem.br

Universidade Estadual de Maringá

Brasil

Ferreira Colli Badini, Renata; Gonçalves, Giane; Kaminski Lenzi, Marcelo; Andreo dos Santos, Onélia
Aparecida; de Matos Jorge, Luiz Mário; Kaminski Lenzi, Ervim
Equação de difusão não linear, soluções e difusão anômala
Acta Scientiarum. Technology, vol. 29, núm. 2, 2007, pp. 165-171
Universidade Estadual de Maringá
Maringá, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=303226519008>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Equação de difusão não linear, soluções e difusão anômala

Renata Ferreira Colli Badini¹, Giane Gonçalves¹, Marcelo Kaminski Lenzi², Onélia Aparecida Andreo dos Santos¹, Luiz Mário de Matos Jorge¹ e Ervim Kaminski Lenzi^{3*}

¹Departamento de Engenharia Química, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, Brasil. ²Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Curitiba, Paraná, Brasil. ³Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo 5790, 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil. *Autor para correspondência. E-mail: eklenzi@dfi.uem.br

RESUMO. Neste trabalho, investigaremos uma equação de difusão não linear considerando a presença de termos convectivos, absorventes e um coeficiente de difusão dependente do tempo. Os termos não lineares presentes na equação serão uma consequência do emprego de uma generalização não linear da Lei de Darcy ($\mathcal{J}(r,t) = -D(t)r^{-\theta}|\partial_r p(r,t)|^n \partial_r [p(r,t)]^\nu$) ou da presença de um termo absorvente não linear ($-\bar{\alpha}(t)[p(r,t)]^\mu$) que pode, por exemplo, representar um processo de difusão com reação.

Em particular, para esta equação de difusão obteremos uma nova classe de soluções e analisaremos os efeitos produzidos por tais termos, assim como relação com processos difusivos anômalos.

Palavras-chave: equação de difusão não linear, soluções, difusão anômala.

ABSTRACT. Nonlinear diffusion equation, solutions and anomalous diffusion.

This work aimed to investigate a nonlinear diffusion equation by considering the presence of a time dependent diffusion coefficient, convective and absorbent terms. The nonlinear terms present in the diffusion equation are consequence of employing a nonlinear generalization of Darcy's law ($\mathcal{J}(r,t) = -D(t)r^{-\theta}|\partial_r p(r,t)|^n \partial_r [p(r,t)]^\nu$) or a nonlinear absorbent term ($-\bar{\alpha}(t)[p(r,t)]^\mu$), which may be related to a reaction diffusion process. Particularly, we will obtain new classes of solutions, analyze the effects produced by these terms and the relation of the results presented here with anomalous diffusion.

Key words: nonlinear diffusion equation, solutions, anomalous diffusion.

Introdução

A compreensão de processos difusivos anômalos tem atraído a atenção de vários pesquisadores devido ao grande número de situações ligadas à física, engenharia, biologia, etc., com os quais tais processos estão associados. De fato, a difusão anômala está presente em várias situações tais como difusão em meios fractais (O'Shaughnessy e Procaccia, 1985; Campos e Mendez, 2004), na relaxação ao equilíbrio em sistemas com memória temporal longa (Crothers *et al.*, 2004; Hilfer, 2000), no transporte por meio de um meio poroso (Muskat, 1937; Polubarnova-Kochina, 1962), nas flutuações de sistemas financeiros (Plerou *et al.*, 2000), nas batidas do coração de um indivíduo (Peng *et al.*, 1993), em semicondutores amorfos (Sher e Montroll, 1975) e em micelas dissolvidas em água salgada (Ott *et al.*, 1990).

Nas situações em que temos uma difusão

anômala (por exemplo, nas mencionadas acima), podemos ter o segundo momento finito (Tsallis e Lenzi, 2002; Malacarne *et al.*, 2002) ou não (Shlesinger *et al.*, 1994). No caso em que o segundo momento, $\langle r^2 \rangle$, é finito, ele geralmente é do tipo $\langle r^2 \rangle \sim t^\alpha$ ($\alpha < 1$ e $\alpha > 1$ correspondendo a subdifusão e superdifusão, respectivamente). Neste contexto, algumas equações representativas na descrição deste fenômeno são as equações de difusão que empregam derivadas fracionárias temporais (Hilfer, 2000; Metzler e Klafter, 2000), a equação de meios porosos (que é não linear)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(r,t) = \frac{\mathcal{D}_0}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \frac{\partial}{\partial r} [p(r,t)]^\nu \right\} \quad (1)$$

e a equação usual de difusão com coeficientes dependentes de variáveis de posição ou do tempo, conforme segue abaixo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{N-1} \mathcal{D}(r, t) \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t) \right\} \quad (2)$$

Estas equações têm sido aplicadas em várias situações de interesse, tais como, na relaxação ao equilíbrio em sistemas com memória temporal longa (por exemplo, cadeias de polímeros e membranas) (Crothers *et al.*, 2004), na descrição de transporte anômalo em sistemas desordenados (Metzler *et al.*, 1999), para modelar processos dinâmicos não Markovianos em proteínas (Plotkin e Wolynes, 1998), no estudo de sistemas turbulentos (lei de Richardson e lei de Kolmogorov), para modelar sistemas hidrológicos (Su, 2004), transporte axial de materiais granulares (Khan e Morris, 2005), transporte de substância em um solvente de um vaso para outro por meio de uma membrana (Kosztoowicz *et al.*, 2005) e na translocação assimétrica do DNA (Lua e Grosberg, 2005). Por sua vez, quando os processos difusivos anômalos não possuem o segundo momento finito, eles são caracterizados pelas distribuições do tipo Lévy (Shlesinger *et al.*, 1994). Dentro deste contexto, temos a equação de difusão com derivadas fracionárias aplicadas a variável espacial (Shlesinger *et al.*, 1994; Metzler e Klafter, 2000) cuja solução é dada em termos das distribuições de Lévy que satisfazem o teorema de Lévy-Gnedenko, isto é, uma generalização do teorema central do limite.

De um ponto de vista formal, a partir do exposto acima, vemos que a difusão anômala pode ser investigada por meio de diferentes tipos de equações de difusão. Assim, o estudo desses tipos de equações, suas extensões e as situações relacionadas a elas são importantes, pois possibilitam a investigação de novos cenários. Neste sentido, pretendemos dedicar nossos esforços ao estudo de equações de difusão que estão contidas na equação abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \frac{\mathcal{D}(t)}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{N-1} \left[r^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t) \right|^{\mu} \right|^{\frac{1}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r} [\rho(r, t)]^{\mu} \right\} - \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{N-1} F(r, t) \rho(r, t)] - \bar{\alpha}(t) [\rho(r, t)]^{\mu} \quad (3)$$

na qual $\mathcal{D}(t)$ é o coeficiente de difusão dependente do tempo, $F(r, t)$ é a força externa aplicada ao sistema, e o último termo representa um termo de sumidouro ou fonte relacionado a um processo de reação e difusão. Em particular, a presença de termos relacionados a processos de reação e difusão como o presente na equação acima tem sido estudado em várias situações. Por exemplo, na coagulação de uma

determinada espécie, processos catalíticos em sistemas regulares, heterogêneos, ou desordenados (Alemany *et al.*, 1994; Havlin e Ben-Avraham, 1987), em reações de primeira ordem irreversíveis e no transporte de uma substância cuja taxa de remoção é (Crank, 1956) proporcional a sua concentração. Termos desta natureza também podem ser relevantes ao investigarmos o transporte de uma substância radioativa ao longo de um meio poroso, no fluxo de calor envolvendo produção de calor (Carslaw e Jaeger, 1959) e no transporte de soluto por amostras absorventes. Cabe mencionar aqui que a equação acima tem o mérito de ter como caso particular muitas situações presentes na literatura e recuperar a equação de difusão usual.

Material e Métodos

Equação de difusão não linear

Iniciaremos nossa investigação a respeito das soluções da equação (3) considerando a presença de forças externas e termos absorventes (fontes). Particularmente, dividiremos nossa análise considerando dois contextos. O primeiro deles caracterizado por um termo absorvente linear ($\mu = 1$) e segundo por um termo absorvente não linear ($\mu \neq 1$). Em ambos os casos, investigamos a conexão dos resultados encontrados aqui com processos difusivos anômalos.

Termo absorvente $\bar{\alpha}(t)\rho(r, t)$

Conforme mencionado anteriormente, começaremos investigando as soluções da equação de difusão não linear, equação (3), levando em conta o caso $\mu = 1$, deixando o caso $\mu \neq 1$ para ser analisado na seção seguinte. As soluções consideradas aqui para a equação (3) serão aquelas que poderão ser expressas representadas em termos de uma função escalada do tipo

$$\bar{\rho}(r, t) = \left(\frac{1}{\Phi(t)} \right)^{\frac{1}{\mu}} \tilde{\rho} \left(\frac{r}{\Phi(t)} \right) \quad (4)$$

Estas soluções devem satisfazer as condições de contorno, iniciais e a condição de normalização quando $\bar{\alpha}(t) = 0$. Ressaltando que ao empregarmos a equação (4) para acharmos as soluções da equação (3) estamos essencialmente usando o método de similaridade. Tal método quando aplicado possibilita reduzir a equação (3), que é uma equação diferencial parcial, em equações ordinárias as quais geralmente são mais simples de serem abordadas.

Para simplificar nossa análise, vamos inicialmente considerar que a solução seja dada por

$$\rho(r, t) = \exp \left[- \int_0^t d\tilde{t} \bar{\alpha}(\tilde{t}) \right] \bar{\rho}(r, t) \quad (5)$$

sendo que $\bar{\rho}(r, t)$ é definida pela equação (4). Desta forma, aplicando as considerações acima na equação (3), obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(r, t) = \frac{\bar{\mathcal{D}}(t)}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[r^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}(r, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial r} [\bar{\rho}(r, t)]^v \right] \right\} - \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{\mathcal{N}-1} F(r, t) \bar{\rho}(r, t) \right] \quad (6)$$

com $\bar{\mathcal{D}}(t) = \mathcal{D}(t) \exp \left[-(v+n-1) \int_0^t d\tilde{t} \bar{\alpha}(\tilde{t}) \right]$. A partir

desta equação, discutiremos as situações que são caracterizadas pela ausência da força externa, a presença de uma força externa linear e, depois, incorporamos uma lei de potência na força externa.

Na ausência de forças externas a equação (6) adquire a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(r, t) = \frac{\bar{\mathcal{D}}(t)}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[r^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial r} \bar{\rho}(r, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial r} [\bar{\rho}(r, t)]^v \right] \right\} \quad (7)$$

Esta equação também pode ser formulada no contexto de difusão de calor. Para isso, basta considerarmos a condutividade térmica presente na lei de Fourier dependente da temperatura. Agora, aplicando o método da similaridade, mais precisamente considerando que a solução da equação (7) tenha a forma da equação (4), podemos reduzir a equação de difusão acima a duas equações diferenciais ordinárias com a ajuda de uma constante de separação \bar{k} que pode ser determinada pela condição de normalização. Assim, após alguns cálculos, a equação (7) fica reduzida a

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1} \left[z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^v \right] \right\} = -\bar{k} \frac{d}{dz} [z^{\mathcal{N}} \tilde{\rho}(z)] \quad (8)$$

e

$$[\Phi(t)]^{\xi} \frac{d}{dt} \Phi(t) = -\bar{k} \bar{\mathcal{D}}(t) \quad (9)$$

sendo que $\xi = 1 + n + \theta + (v+n-1)\mathcal{N}$ e $z = r/\Phi(t)$. Resolvendo a equação (9), encontramos

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(0))^{1+\xi} + k' \int_0^t d\tilde{t} \bar{\mathcal{D}}(\tilde{t}) \right]^{\frac{1}{1+\xi}} \quad (10)$$

com $k' = (1+\xi)\bar{k}$. Observe que a presença do termo $\Phi(0)$ pode ser associada a uma situação em que a distribuição considerada já tenha uma largura inicial. A partir da equação (10), vemos que a dimensão do sistema influencia diretamente na forma com que ocorre a evolução temporal do espalhamento da distribuição, fato este que não ocorre na equação de difusão usual. Retomando a equação que depende da variável espacial, vamos fazer uma integração e desta forma obter

$$z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^v = -\bar{k} z \tilde{\rho}(z) \quad (11)$$

Para encontrar a solução da equação (11), vamos considerar o ansatz: $\tilde{\rho}(z) = (1-\alpha z^{\lambda})^{\beta}$, de forma que a solução que venha a satisfazer a equação e a condição de contorno $\tilde{\rho}(\infty, t) = 0$, que é uma das condições requeridas para que tal solução seja normalizável e consequentemente interpretada como uma distribuição. Substituindo a solução proposta na equação (11) e efetuando alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{n+1}{v+n-1} ; \quad \lambda = \frac{2+\theta+n}{n+1} ; \\ \alpha &= \frac{v+n-1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{v} \right)^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned} \quad (12)$$

Desta forma, podemos expressar $\tilde{\rho}(z)$ como

$$\tilde{\rho}(z) = \left(1 - \frac{v+n-1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{v} \right)^{\frac{1}{n+1}} z^{\frac{2+\theta+n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{v+n-1}} \quad (13)$$

e usando o resultado acima podemos encontrar $\bar{\rho}(r, t)$ (veja Figura 1). Neste ponto, cabe ressaltar que a estrutura da solução encontrada acima é a mesma da função q -exponencial que aparece no formalismo de Tsallis (Tsallis, 1988). Em particular, esta função é definida como $\exp_q[r] = [1 + (1-q)r]^{1/(1-q)}$ para $1 + (1-q)r \geq 0$ e $\exp_q[r] = 0$ para $1 + (1-q)r < 0$. Assim, podemos identificar a estrutura presente na equação (13) com esta função (q -exponencial) tomando $q = 2 - (v+n)$. Neste caso, após alguma álgebra é possível mostrar que

$$\tilde{\rho}(z) = \exp_q^{1+n} \left[-\frac{1}{2+\theta+n} \left(\frac{\bar{k}}{v} \right)^{\frac{1}{n+1}} z^{\frac{2+\theta+n}{n+1}} \right] \quad (14)$$

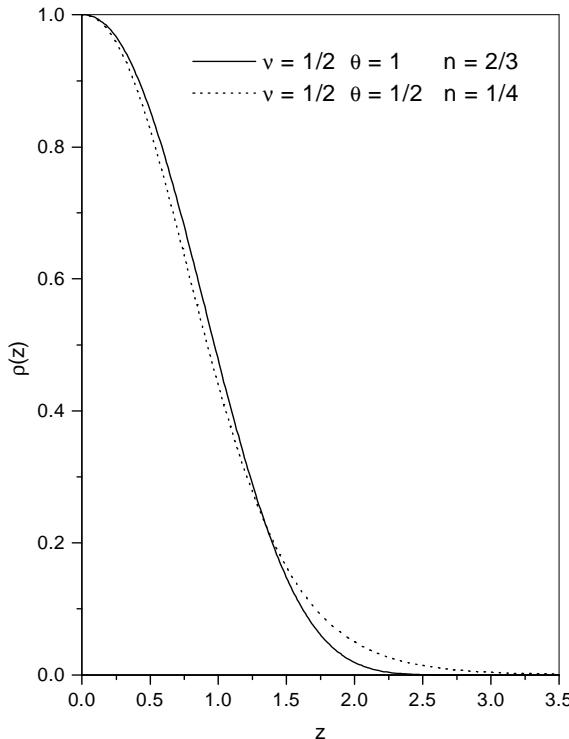


Figura 1. Comportamento da equação (13) para alguns valores típicos de v , θ e n .

Note que o fato de podermos relacionar a solução encontrada com o formalismo de Tsallis é muito interessante, pois sugere um contexto termoestatístico a esta equação diferente do usual e indica um comportamento de cauda curta ou cauda longa para equação (14) que podem ser obtidos dependendo da escolha dos parâmetros v, n e θ . Esta última afirmação pode ser diretamente relacionada com a forma com que a substância difunde-se em um substrato, indicando que tal formalismo pode ser usado para modelar situações em que temos processos subdifusivos ou superdifusivos. Tal situação pode ser facilmente visualizada no caso em que $\bar{\alpha}(t)=0$ e $\mathcal{D}(t)=\mathcal{D}=\text{const.}$, pois neste caso, dependendo da escolha dos parâmetros (v, n e θ), podemos ter uma propagação anômala da distribuição, dada pela equação (14), que pode caracterizar uma difusão anômala ou uma condução anômala. Neste caso, o segundo momento é dado por $\langle r^2 \rangle \propto t^{2/(1+\xi)}$ na qual $2/(1+\xi) < 1, = 1, > 1$ caracteriza um comportamento subdifusivo, normal ou superdifusivo.

Agora analisaremos as implicações obtidas por incorporar um termo de força externa na equação (7). Nesta direção, primeiramente, estudamos os efeitos produzidos na solução por uma força externa que varia linearmente com a posição, i.e., $F(r, t) = -k_1(t)r$. A situação caracterizada por $F(r, t) = -k_1(t)r - k_\alpha r^\alpha$ será analisada na seqüência. Na presença desta força externa linear a equação (6) fica dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(r, t) = & \frac{1}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[\mathcal{D}(t) r^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\rho}(r, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial r} [\tilde{\rho}(r, t)]^v \right] \right\} \quad (15) \\ & + \frac{k_1(t)}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{\mathcal{N}} \tilde{\rho}(r, t)] \end{aligned}$$

Para analisar a solução que emerge da equação acima vamos empregar o mesmo procedimento que usamos para o caso em que não tínhamos a presença de forças externas. Assim, empregando a equação (4) na equação (15) obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\Phi}(t)}{[\Phi(t)]^2} \frac{d}{dz} [z^{\mathcal{N}} \tilde{\rho}(z)] = & \frac{k_1(t)}{\Phi(t)} \frac{d}{dz} [z^{\mathcal{N}} \tilde{\rho}(z)] \quad (16) \\ + \frac{\mathcal{D}(t)}{[\Phi(t)]^{2+\xi}} \frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1} \left[z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^v \right] \right\} \end{aligned}$$

com $z = r/\Phi(t)$, como no caso anterior. Agrupando os termos que são semelhantes e introduzindo uma constante, \bar{k} , podemos separar a equação acima em duas equações, uma envolvendo somente a variável temporal t e outra envolvendo a variável z , como segue

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1} \left[z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^v \right] \right\} = -\bar{k} \frac{d}{dz} [z^{\mathcal{N}} \tilde{\rho}(z)] \quad (17)$$

e

$$[\Phi(t)]^{\xi} \frac{d}{dt} \Phi(t) + k_1(t) [\Phi(t)]^{\xi+1} = \bar{\mathcal{D}}(t) \bar{k} \quad (18)$$

Destas equações observamos que ao introduzirmos uma força externa linear na equação de difusão equação (7) apenas estamos modificando a forma como a evolução do alargamento da distribuição ocorre e não a dependência espacial da mesma. No tocante ao último ponto, a equação (17) já foi resolvida anteriormente por meio de um ansatz. Devido a este fato vamos apenas abordar a equação (18) no intuito de obter sua solução. Em particular, após alguns cálculos é possível mostrar que a solução dela é dada por

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(0))^{\xi+1} + k' \int_0^t d\tilde{z} \bar{\mathcal{D}}(\tilde{t}) e^{(\xi+1) \int_0^t k_1(t') dt'} \right]^{\frac{1}{\xi+1}} e^{-\int_0^t k_1(t') dt'} \quad (19)$$

Este resultado indica que dependendo da escolha da força externa podemos ter a presença de um segundo momento que na situação de tempos longos fica reduzido a uma constante. Tal fato implica diretamente na existência de uma solução estacionária, fato que não é observado quando não temos forças externas atuando sobre o sistema.

Completando nossa análise a respeito das forças externas vamos incorporar a situação estudada anteriormente um termo do tipo lei de potência, i.e., $k_\alpha r^\alpha$, de forma que força externa fique dada por $F(r, t) = -k_1(t)r - k_\alpha r^\alpha$. Neste contexto, vamos considerar que $\mathcal{D} = \text{const.}$ e $\bar{\alpha}(t) = 0$. Obter uma solução para equação de difusão na presença da força externa acima é uma tarefa muito difícil, mas muito importante devido ao grande número de aplicações que podemos associar a ela. No caso em que (α, θ, ν, n) são quaisquer não sabemos como encontrar a solução de forma analítica, mas há uma situação especial para o qual a solução escalada dada pela equação (4) é ainda válida. Este caso especial corresponde a $\alpha = -1 - \theta - n + (1 - \nu - n)\mathcal{N}$, isto é, $\alpha + \xi = 0$. Para este caso, usando os procedimentos anteriores, podemos reduzir a equação (5) ao seguinte conjunto de equações

$$-\bar{k} \frac{d}{dz} [z^\mathcal{N} \tilde{\rho}(z)] = \mathcal{D} \frac{d}{dz} \left\{ z^{\mathcal{N}-1} \left[z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu \right] \right\} + k_\alpha \frac{d}{dz} [z^{\mathcal{N}-1} (z^\alpha \tilde{\rho}(z))] \quad (21)$$

e

$$[\Phi(t)]^\xi \frac{d}{dz} \Phi(t) + k_1(t) [\Phi(t)]^{1+\xi} = \bar{k} \quad (22)$$

A solução da equação (22) é dada por

$$\Phi(t) = \left[(\Phi(0))^{1+\xi} + k' \int_0^t d\tilde{t} e^{(1+\xi) \int_0^t k_1(t') dt'} \right]^{\frac{1}{1+\xi}} e^{-\int_0^t k_1(t') dt'} \quad (23)$$

Para obtermos a solução da equação (21), também empregaremos a condição de contorno $\rho(\infty, t) = 0$, de forma análoga ao caso anterior. Assim, efetuando uma integração na equação (21) obtemos

$$\mathcal{D} z^{-\theta} \left| \frac{d}{dz} \tilde{\rho}(z) \right|^n \frac{d}{dz} [\tilde{\rho}(z)]^\nu = -(\bar{k}z + k_\alpha z^\alpha) \tilde{\rho}(z) \quad (24)$$

Ressaltando que a constante de integração foi eliminada mediante o emprego da condição de contorno. Por fim, a solução equação (24) fica dada por

$$\tilde{\rho}(z) = \exp_q^{n+1} \left[-\mathcal{K} \int^z d\tilde{z} \left(\tilde{z}^{1+\theta} + \frac{k_\alpha}{\bar{k}} \tilde{z}^{\alpha+\theta} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right] \quad (25)$$

na qual $\mathcal{K} = (\bar{k}/\bar{\mathcal{D}}\nu)^{1/(n+1)} / (n+1)$. Para o caso especial $n=0$ e $\mathcal{N}=1$, a equação (25) recupera resultados encontrados por Tsallis e Lenzi (2002), após algumas manipulações algébricas.

Termo absorvente $\bar{\alpha}[\rho(r, t)]^\mu$

Agora, estudaremos a equação (3), considerando o caso geral $\mu \neq 1$ na ausência de forças externas com $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D} = \text{const.}$ e $\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha} = \text{const.}$. Neste caso, a equação (3) pode ser escrita como sendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \frac{\mathcal{D}}{r^{\mathcal{N}-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\mathcal{N}-1} \left[r^{-\theta} \left| \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, t) \right|^n \frac{\partial}{\partial r} [\rho(r, t)]^\nu \right] \right\} - \bar{\alpha}[\rho(r, t)]^\mu \quad (26)$$

Seguindo a referência (Lenzi *et al.* 2003), consideramos que a solução para esta equação deve ser dada por

$$\rho(r, t) = \phi(t) \mathcal{P}(\zeta(t)r) \quad (27)$$

sendo que $\phi(t)$ e $\zeta(t)$ são funções dependentes do tempo a serem achadas. Neste sentido, é interessante analisarmos a equação cinética que emerge da equação anterior, equação (26), para $\mathcal{D}=0$, isto é, $\partial_t \rho(t) = -\bar{\alpha}[\rho(t)]^\mu$. A solução para esta equação cinética é conhecida e dada por

$$\rho(t) \propto [1 - (1 - \mu) \bar{\alpha} t]^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (28)$$

Este resultado nos sugere empregar $\phi(t) = [1 - (1 - \mu)kt]^{\frac{1}{1-\mu}}$ de forma a contemplar o caso limite em que a equação cinética é válida. Para obter $\zeta(t)$, substituiremos a solução proposta para $\rho(r, t)$, equação (27), na equação (26) com $\phi(t)$ definido

acima. Essa substituição nos leva a obter

$$\zeta(t) = [1 - (1 - \mu)kt]^{\frac{n+v-\mu}{(\mu-1)(2+n+\theta)}} \quad (29)$$

e a equação (26) fica

$$\begin{aligned} k\mathcal{P}(\eta) - \left(\frac{v+n-\mu}{2+\theta+n}\right)k\eta \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\eta) &= \bar{\alpha}[\mathcal{P}(\eta)]^\mu \\ - \frac{\mathcal{D}}{\eta^{N-1}} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{N-1} \left[\eta^{-\theta} \left| \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\eta) \right|^\mu \frac{d}{d\eta} [\mathcal{P}(\eta)]^\mu \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

com $\eta = \xi(t)r$ e k sendo uma constante. Acharmos uma solução explícita em função de η para a equação acima, equação (30) é uma tarefa árdua, contudo, é possível obter uma solução implícita quando $\mu = n + v + (2 + n + \theta)/N$, que é formalmente dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\eta) = \exp_q^{n+1} \left[-\frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{vND} \right)^{\frac{1}{n+1}} \eta \int d\tilde{\eta} \tilde{\eta}^{\frac{1+\theta}{1+n}} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}N\tilde{\eta}^{-N}}{\bar{k}\mathcal{P}(\tilde{\eta})} \right) \right. \\ \left. \times \int^{\tilde{\eta}} d\tilde{\eta} \tilde{\eta}^{N-1} [\mathcal{P}(\tilde{\eta})]^\mu \right]^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned} \quad (31)$$

Observe que para $\bar{\alpha} = 0$ a equação (31) formalmente recupera a equação (14) depois que executamos a integração em $\tilde{\eta}$. Neste ponto, podemos usar os resultados acima, para obter, com μ, n, v e θ arbitrários, os n -ésimos momentos de ordem par associados com essas distribuições. Eles são dados por

$$\begin{aligned} \langle r^{2m} \rangle &= \left[\int_0^\infty dr r^{N-1} r^{2m} \rho(r, t) \right] / \left[\int_0^\infty dr r^{N-1} \rho(r, t) \right] \\ &= (\zeta(t))^{-2m} \left[\int_0^\infty d\eta \eta^{N-1} \rho(\eta) \right] / \left[\int_0^\infty d\eta \eta^{N-1} \rho(\eta) \right] \\ &\propto (\zeta(t))^{-2m} \end{aligned} \quad (32)$$

e consequentemente para o segundo momento temos que $\langle r^2 \rangle \sim t^{\frac{2(n+v-\mu)}{(1-\mu)(2+n+\theta)}}$. Note que, na equação (32), assumimos que os m -ésimos momentos são definidos, i.e., as integrais que envolvem as variáveis espaciais são convergentes. Desta forma, dependendo da escolha dos valores de $2(n+v-\mu)/[(2+n+\theta)(1-\mu)]$ podemos ter processos que são subdifusivos, normais e superdifusivos.

Resultados e discussão

Ao longo deste trabalho, investigamos a equação (3) levando em conta várias situações tais como um coeficiente de difusão dependente do tempo a presença de forças externas e termos absorventes que podem ser relacionados a processos de reação e difusão. Ressaltando que esta equação, conforme mencionamos anteriormente, tem como caso particular várias situações que são ligadas tanto a engenharia como a física. Obtivemos a cada um dos casos analisados uma solução exata explícita nas variáveis de posição ou temporais ou implícita sob forma de recorrência com a relação função distribuição. Tais soluções apresentaram um comportamento de cauda curta ou cauda longa. Em particular, o último caso, o discutimos como uma relação com as distribuições de Lévy que são em sua essência leis de potências com um comportamento de cauda longa estando associadas a processos superdifusivos de maneira geral. Neste sentido, analisamos o comportamento do segundo momento que nos indicou como devemos tomar os parâmetros de forma adequada a modelarmos um processo sub, normal ou super difusivo.

Conclusão

Os resultados obtidos e discutidos acima indicam que a equação de difusão não linear discutida neste trabalho, além de ter como situação particular vários sistemas físicos, pode ser útil na descrição de sistemas que possuem difusão anômala. Neste sentido, deve ser mencionado que a mesma pode ou não ter o segundo momento finito. No último caso, temos distribuições do tipo Lévy. Por fim, esperamos que este trabalho venha a ser útil, em geral, na discussão de sistemas que tenham processos anômalos de difusão e transporte.

Referências

- ALEMANY, P. et al. Time-dependent reactivity for diffusion-controlled annihilation and coagulation in two dimensions. *Phys. Rev. E*, New York, v. 50, p. 3646–3655, 1994.
- CAMPOS, D.; MENDEZ, V. Description of diffusive and propagative behavior on fractals. *Phys. Rev. E*, New York, v. 69, p. 031115, 2004.
- CARSLAW, H.S.; JAEGER, J.C. *Conduction of heat in solids*. London: Oxford University Press, 1959.
- CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, London, 1956.
- CROTHERS D.S.F. et al. The role of Mittag-Leffler functions in anomalous relaxation. *J. Mol. Liq.*, Amsterdam, v. 114, p. 27-34, 2004.

- HAVLIN, S.; BEN-AVRAHAM, D. Diffusion in Disordered Media. *Adv. Phys.*, Taylor and Francis, v. 36, p. 695-798, 1987.
- HILFER, R. *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, 2000.
- KHAN, Z.S.; MORRIS S.W. Subdiffusive axial transport of granular materials in a long drum mixer. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 94, p. 048002, 2005.
- KOSZTOOWICZ, T. *et al.* How to measure subdiffusion parameters. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 94, p. 170602, 2005.
- LENZI, E.K. *et al.* Exact solutions to nonlinear nonautonomous space-fractional diffusion equations with absorption. *Phys. Rev. E*, New York, v. 67, p. 51109, 2003.
- LUA R.C.; GROSBERG A.Y. First passage times and asymmetry of DNA translocation. *Phys. Rev. E*, New York, v. 72, p. 061918, 2005.
- MALACARNE, L.C. *et al.* N -dimensional nonlinear Fokker-Planck equation with time-dependent coefficients" *Phys. Rev. E*, New York , v. 65, p. 52101, 2002.
- METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Report*, Amsterdam, v. 339, n. 1, p. 1-77, 2000.
- METZLER, R. *et al.* Anomalous transport in disordered systems under the influence of external fields", *Phys. A*, Amsterdam, v. 266, p. 343-350, 1999.
- MUSKAT, M. *The flow of homogenous fluids through porous media (International series in physics)*. New York: McGraw-Hill, 1937.
- O'SHAUGHNESSY, B.; PROCACCIA, I. Analytical solutions for diffusion on fractal objects. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 54, p. 455-458, 1985.
- OTT, A. *et al.* Anomalous diffusion in "living polymers": a genuine Levy flight? *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 65, p. 2201-2204, 1990.
- PENG, C.K. *et al.* Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 70, p. 1343-1346, 1993.
- PLEROU, V. *et al.* Economic fluctuations and anomalous diffusion. *Phys. Rev. E*, New York, v. 62, p. 3023-3206, 2000.
- PLOTKIN S.S.; WOLYNES, P.G. Non-markovian configurational diffusion and reaction coordinates for protein folding. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 80, p. 5015-5018, 1998.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P.Y. *Theory of ground water movement*. Princeton: Princeton University Press, 1962.
- SHLESINGER, M.F. *et al.* *Lévy flights and related topics in physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- SHER, H.; MONTROLL, E.W. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids. *Phys. Rev. B*, New York, v. 12, p. 2455-2477, 1975.
- SU, N. Generalisation of various hydrological and environmental transport models using Fokker-Planck equation. *Environ. Modell. Software*, Melbourne, v. 19, n. 4, p. 345-356, 2004.
- TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Statistical Phys.*, Amsterdam, v. 52, p. 479-487, 1988.
- TSALLIS, C.; LENZI, E.K. Anomalous diffusion: nonlinear fractional fokker-planck equation. *Chem. Phys.*, Amsterdam, v. 284, p. 341-347, 2002.

Received on February 28, 2007.

Accepted on April 19, 2007.