Acta Scientiarum. Technology
ISSN: 1806-2563
eduem@uem.br
Universidade Estadual de Maringá
Brasil

de Cerqueira Pituba, José Julio

Método do estado local aplicado na formulação de modelos constitutivos de dano para o concreto

Acta Scientiarum. Technology, vol. 31, núm. 1, 2009, pp. 15-23
Universidade Estadual de Maringá
Maringá, Brasil

DOI: 10.4025/actascitechnol.v31i1.375

Método do estado local aplicado na formulação de modelos constitutivos de dano para o concreto

José Julio de Cerqueira Pituba

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, 75700-000, Catalão, Goiás, Brasil. E-mail: jose.pituba@itelefonica.com.br

RESUMO. Este artigo aborda alguns fundamentos da Termodinâmica com relação aos meios contínuos particularizados para o Método do Estado Local aplicado na formulação de modelos de dano. Inicialmente, são apresentados alguns aspectos da Mecânica do Dano Contínuo, que se constitui numa ferramenta de grande aplicabilidade na modelagem macroscópica de materiais. Em seguida, o trabalho trata dos princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis. De maneira geral, o objetivo do trabalho é demonstrar a eficiência de modelos constitutivos formulados pelos fundamentos da Termodinâmica. Como exemplo da formulação abordada, é derivado um modelo constitutivo aplicado à análise de estruturas de concreto armado. As respostas numéricas obtidas com a aplicação do modelo são comparadas com uma série de respostas experimentais de vigas (biapoiadas e com diferentes taxas de armadura).

Palavras-chave: mecânica do dano, concreto, modelos constitutivos, termodinâmica.

ABSTRACT. Local state method applied on the formulation of damage constitutive models for concrete. This work deals with some Thermodynamics principles related to continuum media that are particularized to the Local State Method used in the formulation of damage models. Initially, some aspects of Continuum Damage Mechanics (CDM) are discussed, which is an applicable tool for macroscopic modelling of materials. In a general way, this paper intends to show the efficiency of constitutive models based on Thermodynamics principles, presenting a constitutive model applied to the analysis of reinforced concrete structures. To show the accuracy of the proposed formulation, the numerical results of a simply supported beam with different reinforcement rates are compared with its experimental data.

Key words: damage mechanics, concrete, constitutive models, thermodynamics.

Introdução

A Mecânica do Dano Contínuo permite descrever os microprocessos heterogêneos envolvidos durante o processo de deformação de materiais na macroescala. Os processos de danificação correspondem a localizações e acumulações de deformações que são de caráter irreversível.

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de Dano Contínuo foi elaborado por Kachanov em 1958. Este trabalho surgiu do interesse em modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura do tipo frágil observada em metais, após um período de deformação lenta.

Os modelos de dano admitem que as perdas de rigidez e de resistência (ramo *softening*) do material são devidas, exclusivamente, ao processo de microfissuração.

Os defeitos distribuídos em materiais não levam apenas ao processo de iniciação de fissura e fratura final, mas também induz à deterioração progressiva do material, que pode ser medida pelo decréscimo da rigidez, resistência, tenacidade e vida residual.

Para um dado material, a análise do seu comportamento é feita pela hipótese de meio contínuo e a influência das alterações internas provocadas pelas microfissuras é considerada macroscopicamente por meio de variáveis de dano escalares ou tensoriais de ordem dois ou superior, dependendo do modelo constitutivo ser isótropo ou anisótropo, respectivamente. Porém, é possível conseguir modelos anisótropos pelo emprego de variáveis escalares de dano aplicadas aos tensores de quarta ordem (PROENÇA; PITUBA, 2003). Diferentes variáveis de dano são associadas com diferentes processos, tais como *creep*, fadiga, dano dúctil e frágil. Grosso modo, a formulação dos modelos constitutivos em Mecânica do Dano segue a metodologia descrita pelo Método do Estado Local (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990), de modo que os diferentes fenômenos podem ser incorporados aos modelos em forma termodinamicamente consistente, mediante hipóteses coerentes sobre o potencial de energia livre. Pituba (2006) propõe uma forma alternativa de formulação de modelos constitutivos para meios anisótropos danificados, mas que, de maneira geral, atende aos princípios estabelecidos pelo Método do Estado Local.

No caso do concreto, um material no qual a fissuração é o fenômeno dominante no comportamento não-linear, a mecânica do dano aplica-se com vantagens sobre outras teorias.

Como exemplo, ilustra-se o modelo constitutivo para o concreto proposto por La Borderie (PITUBA; PROENÇA, 2005), que atende às etapas propostas pelo Método do Estado Local. Este modelo está fundamentado nos princípios irreversíveis da Termodinâmica, incorporando na sua formulação deformações residuais devidas, exclusivamente, ao processo de danificação, além da consideração do efeito de fechamento de fissuras no comportamento do concreto.

Material e métodos

Mecânica do dano

Considere-se um sólido com dano do qual é isolado um elemento de volume. Tal elemento é dito “representativo” por possuir dimensão suficientemente grande, de modo que se possa admitir que contenha uma distribuição homogênea dos defeitos e, ao mesmo tempo, é pequeno para ser considerado como um ponto material do contínuo. Dessa forma, admite-se continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento.

Seja S a área de uma das faces do elemento representativo, a qual é definida por um plano cujo versor normal tem direção $\underline{n}$ (Figura 1). Nesta seção, as microfissuras e microdefeitos que contribuem para o dano têm formas e orientações quaisquer.

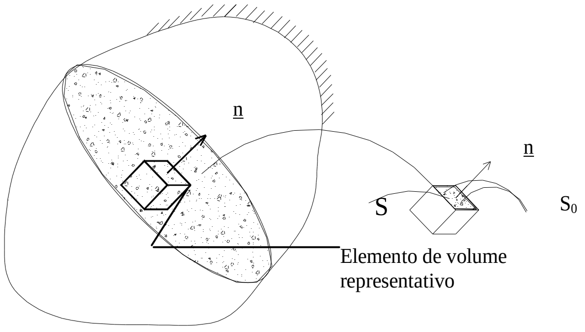

Figura 1. Elemento de volume com dano.
Fonte: Pituba (1998).

No plano da seção considerada, sendo $\tilde{S}$ a parcela da área total que efetivamente oferece resistência ($\tilde{S} \leq S$), a diferença S_o é a área de defeitos.

$$S_o = S - \tilde{S} \tag{1}$$

Por definição, segundo Lemaitre e Chaboche (1990):

$$D_n = \lim_{S \to 0} \frac{S_0}{S} \tag{2}$$

em que:

D_n representa uma medida local do dano. A variável de dano assume valores contidos no intervalo $0 \leq D_n \leq 1$, sendo que $D_n = 0$ tem correspondência com a situação de material íntegro e $D_n = 1$ indica um estado de total deterioração.

Imaginando-se uma situação em que as microfissuras se distribuam segundo uma direção privilegiada, os valores da variável D_n variam de acordo com a orientação da normal $\underline{n}$. Essa situação configura o que se pode definir como dano anisótropo. Já o dano isótropo corresponde, então, a uma situação em que os microdefeitos tenham uma distribuição mais ou menos uniforme em qualquer direção, ou seja, independente da orientação da normal $\underline{n}$. Nesse caso, um único valor da variável de dano caracteriza completamente o estado local de deterioração.

$$D = D_n \; \forall \; \underline{n} \tag{3}$$

O dano não é diretamente mensurável como acontece com a deformação. Consideram-se diferentes caminhos para a definição da variável interna de dano por meio dos procedimentos de medida indireta. De fato, tais medidas nem sempre são praticáveis, mas fornecem definições conceituais. Nota-se que a cada medida da variável de dano corresponde uma formulação diferente de modelos.

Conforme Lemaitre e Chaboche (1990), existem algumas linhas de tipos de medidas da variável interna de dano. São elas:

- medidas em escala de microestrutura (densidade de microfissuras ou cavidades) levando aos modelos microscópicos que podem ser integrados sobre o elemento de volume macroscópico, com a ajuda de técnicas matemáticas de homogeneização;

- medidas físicas globais (densidade, resistividade etc.) requerendo a definição do modelo global para convertê-lo em propriedades que caracterizam a resistência mecânica;
- avaliação do dano ligado ao tempo de vida restante, mas este conceito não é levado diretamente para a lei constitutiva de dano;
- medidas mecânicas globais da modificação das propriedades elásticas, plásticas ou viscoplásticas. São medidas fáceis de interpretar utilizando o conceito de tensão efetiva.

Em suma, pode-se colocar em evidência a degradação das características mecânicas do material causada pelo dano, mediante a relação que define o módulo de elasticidade $\tilde{E}$ para um meio contínuo de resposta equivalente ao meio deteriorado.

$$\tilde{E} = (1\text{-}D)\, E \tag{4}$$

em que:

E representa o módulo de elasticidade do meio íntegro (D = 0).

Termodinâmica dos processos irreversíveis

Apresenta-se, neste item, uma discussão sobre a formulação de modelos seguindo a metodologia do método do estado local (GERMAIN, 1973), particularizada para o caso de dano isótropo com pequenas deformações.

Inicialmente, considere-se um dado sistema. Se forem conhecidas todas as informações para uma completa caracterização do sistema, diz-se que o estado do sistema é conhecido. As informações, tais como geometria no estado indeformado do sistema, campos de deformação e de tensão, entre outros, constituem as chamadas variáveis de estado. A seleção de uma série particular de variáveis de estado independentes é importante em cada problema. Um sistema está em equilíbrio termodinâmico se, para um dado estado, os valores das variáveis de estado são independentes do tempo. Por outro lado, diz-se que um sistema pode sofrer um processo se as variáveis de estado dependem do tempo.

Leis da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica diz respeito à conservação da energia do sistema e pode ser enunciada da seguinte maneira: a taxa de trabalho mecânico ou potência das cargas externas mais a taxa de calor introduzida no sistema é igual à taxa de energia cinética mais a taxa de variação da energia interna.

$$P_e + Q_e = \dot{U} + \dot{E}_C \tag{5}$$

em que:

$\dot{U} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho u d\Omega$ é a taxa de energia interna e u é a densidade de energia por unidade de massa;

$\dot{E}_C$ é a taxa de energia cinética;

Substituindo as parcelas das energias envolvidas na Equação (5), obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\rho \underline{v}.\underline{v}\right]d\Omega + \int_{\Omega}\sigma.\omega d\Omega \tag{6}$$

$$-\int_{\partial\Omega}\underline{q}.\underline{n}d\partial\Omega + \int_{\Omega}\rho r d\Omega = \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\rho\underline{v}.\underline{v} + \rho u\right]d\Omega$$

Admitindo-se, por um lado, em regime de pequenas deformações e, por outro lado, aplicando-se o teorema da divergência à parcela de fluxo de calor no contorno ∂Ω, permite-se rescrever a (6) em forma local do seguinte modo:

$$\rho\dot{u} = \sigma.\dot{\varepsilon} - \text{div}\underline{q} + \rho r \tag{7}$$

O primeiro princípio introduz as noções de quantidade de calor recebida e de energia interna do sistema. O segundo princípio introduz as noções de temperatura absoluta e de entropia. A cada parte Ω do sistema e a cada instante t, pode-se associar um número S chamado entropia de Ω no instante t, dado por:

$$S = \int_{\Omega}\rho s d\Omega \tag{8}$$

em que:

s = s(x,t) é a entropia específica por unidade de massa da partícula que ocupa a posição x em t.

A segunda lei impõe que, num processo qualquer de transformação de um sistema, a variação total de entropia deve ser igual ou superar a variação provocada pela transferência de calor. Em particular, num processo irreversível, existe produção de entropia positiva. Em forma geral, a lei se exprime por:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} s\rho d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T}\rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} -\frac{\underline{q}}{T}.\underline{n} d\partial\Omega \qquad (9)$$

Na expressão acima, aparece a temperatura T, definida como um campo escalar de valores positivos em cada instante t do domínio Ω em consideração. O segundo membro da Inequação (9) é a taxa de entropia correspondente à transferência de calor.

Empregando-se o teorema da divergência na relação do segundo princípio e escrevendo na forma local, a relação que expressa o segundo princípio da termodinâmica é dada por:

$$\rho\dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \mathrm{div}(\frac{\underline{q}}{T}) \geq 0 \qquad (10)$$

A primeira e a segunda lei podem ser combinadas, conduzindo a uma desigualdade que deve ser observada para que um processo seja termodinamicamente admissível. É a chamada Desigualdade de Clausius-Duhem, que é dada por:

$$\rho T\dot{s} + \sigma.\dot{\varepsilon} - \rho\dot{u} - \frac{1}{T} grad T.\underline{q} \geq 0 \qquad (11)$$

É usual trabalhar com o potencial ψ, dito de energia livre, definido em função da energia específica u e da entropia s:

$$\psi = u - Ts \qquad (12)$$

A derivada desse potencial é dada por:

$$\dot{\psi} = \dot{u} - T\dot{s} - s\dot{T} \Rightarrow T\dot{s} - \dot{u} = -(\dot{\psi} + s\dot{T}) \qquad (13)$$

Substituindo a Equação (13) na Equação (11), obtém-se a seguinte forma para a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\dot{\psi} \leq \sigma.\dot{\varepsilon} - \rho s\dot{T} - \underline{q}.\frac{1}{T}\nabla T \qquad (14)$$

Processos nos quais a desigualdade de Clausius-Duhem é verificada a cada instante são denominados termodinamicamente admissíveis.

Método do estado local

O método do estado local (GERMAIN, 1973) postula que, em certo instante, o estado termodinâmico de um meio material é completamente definido pelo conhecimento dos valores de certo número de variáveis naquele instante, que dependem apenas do ponto considerado. Como as derivadas no tempo destas variáveis não estão envolvidas na definição do estado, esta postulação implica admitir que qualquer evolução possa ser considerada como uma sucessão de estados em equilíbrio.

As variáveis de estado estão relacionadas aos fenômenos a serem descritos pelo modelo e são divididas em dois grupos: observáveis e internas. As variáveis observáveis são aquelas que podem ser quantificadas experimentalmente. Já as variáveis internas não são diretamente medidas.

De modo geral, em um sistema irreversível, no âmbito das pequenas deformações, o estado termodinâmico local é definido pelas variáveis ditas observáveis, o tensor de deformações ε e a temperatura T, e por um conjunto de variáveis internas a_k associadas aos processos dissipativos.

Uma vez definidas as variáveis de estado – observáveis e internas –, postula-se a existência de um potencial termodinâmico do qual as leis de estado podem ser derivadas. Um potencial possível é o potencial da energia específica livre ψ (por unidade de volume), dito de Helmholtz:

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}, T, \underline{a}) \qquad (15)$$

em que:

$\underline{a}^T = \{ a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ representa um grupo de variáveis internas.

A derivada do potencial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}.\dot{\varepsilon} + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial\underline{a}}.\dot{\underline{a}} \qquad (16)$$

Relacionando a equação anterior com a desigualdade de Clausius-Duhem, obtém-se:

$$(\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}).\dot{\varepsilon} - (\rho s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - (\frac{\partial\psi}{\partial\underline{a}}).\dot{\underline{a}} - (\frac{1}{T})\underline{q}.\nabla T \geq 0 \qquad (17)$$

É possível anular, independentemente, certos termos da desigualdade imaginando-se, por exemplo, um processo elástico em que se dê a temperatura constante ($\dot{T} = 0$) e uniforme ($\nabla T = 0$) e que, portanto, não modifique o conjunto de variáveis internas ($\dot{\underline{a}} = 0$).

Neste caso, para que a desigualdade se verifique, qualquer que seja $\dot{\varepsilon}$, é necessário que:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \tag{18}$$

Por outro lado, pode-se imaginar uma transformação térmica num campo de temperatura uniforme ($\nabla T = 0$) e que não modifique o vetor de variáveis internas ($\dot{\underline{a}} = 0$) ou variações de deformações. Assim, a desigualdade será sempre verificada se:

$$\rho s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \tag{19}$$

Denominam-se σ e s como variáveis associadas às variáveis de estado ε e T. Por analogia, pode-se definir uma grandeza vetorial associada ao vetor de variáveis internas por:

$$-A = \frac{\partial \psi}{\partial a_k} \tag{20}$$

As relações (18), (19) e (20) caracterizam as leis de estado. Levando em conta as leis de estado, a desigualdade de Clausius-Duhem passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$A.\dot{\underline{a}} - \left(\frac{1}{T}\right)\nabla T.\underline{q} \geq 0 \tag{21}$$

que exprime a soma da dissipação associada à evolução das variáveis internas e da dissipação térmica por calor.

Considerando-se o caso de modelos de dano ditos escalares ou isótropos, relativos a processos puramente mecânicos (isotérmicos) que se aplicam aos meios elásticos, desprezam-se as deformações residuais pela plastificação do material; nessas condições, portanto, a energia específica ψ associada a um comportamento elástico com danificação passa a ser expressa na forma:

$$\psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\underline{D}}_0\,\varepsilon.\varepsilon \tag{22}$$

em que:

D é um parâmetro escalar consistindo na única variável interna considerada;

$\underline{\underline{D}}_0$ é o tensor de rigidez elástica inicial do material íntegro.

Essa expressão é uma consequência direta da hipótese de que o tensor de rigidez elástica, obtido derivando-se duas vezes ψ em relação ao tensor de deformações ε, é uma função da variável interna de dano:

$$\psi_{\varepsilon\varepsilon} = \underline{\underline{D}}(D) = (1-D)\underline{\underline{D}}_0 \tag{23}$$

Das Equações (18) e (22), obtém-se a lei constitutiva:

$$\underline{\sigma} = (1-D)\underline{\underline{D}}_0\,\varepsilon \tag{24}$$

Por outro lado, a Equação (17) fornece:

$$(\underline{\underline{D}}_0\,\varepsilon.\varepsilon)\dot{D} \geq 0 \tag{25}$$

Observando-se que o termo entre parênteses é quadrático definido positivo, resulta que:

$$\dot{D} \geq 0 \tag{26}$$

Essa condição mostra que os processos de danificação são termodinamicamente admissíveis se conduzem a uma evolução positiva ou nula da variável representativa do dano.

Conhecidas as relações entre as variáveis de estado, observáveis e internas, e suas respectivas variáveis associadas, o modelo constitutivo se completa com o estabelecimento das leis de evolução para as variáveis de estado, sendo este o objetivo dos potenciais de dissipação.

Na Equação de Clausius-Duhem (21), o primeiro termo é chamado de dissipação intrínseca ou mecânica e está associado à evolução da variável interna de dano. O último termo representa a dissipação térmica devida à condução de calor.

$$Y.\dot{D} - \left(\frac{1}{T}\right)\nabla T.\underline{q} \geq 0 \tag{27}$$

em que:

Y = -A .

Considerando-se a variável de dano D, por exemplo, definem-se as leis complementares de evolução a partir de derivadas sobre um potencial de dissipação Φ, expresso matematicamente por uma função escalar contínua e convexa das variáveis associadas. Assim sendo, resulta:

$$\dot{D} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \tag{28}$$

Portanto, assumem-se válidas para um material padrão a lei da normalidade (28) e a propriedade de associatividade (a função potencial Φ de dissipação coincide com a função F representativa do critério de danificação), de modo que a equação evolutiva possa ser expressa na forma:

$$\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial Y}, \text{ com } \dot{\lambda} = 0 \text{ se } F < 0 \text{ ou } F = 0$$

e (29)

$$\dot{F} < 0 \; \dot{\lambda} > 0 \text{ se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0$$

em que:

λ é o multiplicador de dano;

F é uma função convexa representando o critério para a evolução do dano.

Exemplo de formulação de um modelo de dano

Neste item, apresenta-se um modelo constitutivo para o concreto fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo. Sua formulação foi realizada pelo Método do Estado Local.

O concreto, entre outros fenômenos inerentes ao seu comportamento mecânico, apresenta recuperação de rigidez quando do fechamento de fissuras ocasionado por inversão de sinal da solicitação; é o chamado comportamento unilateral. O modelo proposto por La Borderie (PITUBA; PROENÇA, 2005) permite levar em conta o aspecto unilateral pela definição de duas variáveis, representativas do dano em tração (D_1) e do dano em compressão (D_2). Considera-se, também, que deformações anelásticas ou residuais sejam devidas apenas ao dano. A ativação de um ou outro processo de danificação é feita por controle sobre o sinal das tensões principais.

No que segue, apresenta-se o modelo segundo o formalismo típico do método do estado local. Nesse sentido, definem-se variáveis de estado primária (σ) e internas (D_1, D_2, z_1 e z_2) e correspondentes variáveis associadas (ε, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2), sendo Y_1 e Y_2 variáveis associadas a D_1 e D_2, interpretadas como taxas de energia liberada durante o processo de evolução de dano. Por sua vez, Z_1 e Z_2 são variáveis associadas, respectivamente, a z_1 e z_2 (medidas de dano acumulado) e que controlam o processo de encruamento, estando inseridas nas funções representativas dos critérios de danificação.

As relações entre as variáveis de estado e as associadas resultam de um potencial de estado. Neste modelo, sugere-se o potencial de energia livre de Gibbs(χ) como potencial de estado, adotando-se a seguinte expressão:

$$\chi = \chi(\sigma, D_1, D_2, z_1, z_2) = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E_0(1-D_2)} + \\ + \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} f(\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} Tr(\sigma) + G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (30)$$

em que:

σ^+ e σ^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa do tensor de tensões;

$Tr(\sigma)$ é o primeiro invariante do tensor de tensões;

E_0 é o módulo de elasticidade do material íntegro;

ν_0 é o coeficiente de Poisson do material virgem;

β_1 e β_2 são parâmetros a serem identificados e associados ao aparecimento de deformações anelásticas.

Além disso, a função $f(\sigma)$ leva em conta as condições de abertura e de fechamento da "fissura" e pode ser calculada por:

$$f(Tr(\sigma)) = Tr(\sigma) \text{ quando } Tr(\sigma) \in \;]0,\infty]$$

$$f(Tr(\sigma)) = \left(1 + \frac{Tr(\sigma)}{2\sigma_f}\right) Tr(\sigma) \quad (31)$$

quando $Tr(\sigma) \in [-\sigma_f, 0]$

$$f(Tr(\sigma)) = -\frac{\sigma_f}{2} Tr(\sigma) \text{ quando } Tr(\sigma) \in [-\infty, -\sigma_f]$$

em que:

σ_f é a tensão de fechamento de fissura (parâmetro do modelo).

Finalmente, $G_1(z_1)$ e $G_2(z_2)$ são funções de encruamento.

As leis de estado derivam do potencial (30) e definem as variáveis associadas às variáveis de estado. Por exemplo, o tensor de deformações resulta de:

$$\varepsilon = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = \varepsilon_e + \varepsilon_{an} \quad (32)$$

em que:

ε_e é o tensor de deformações elásticas;

ε_{an} é o tensor de deformações anelásticas.

Esses tensores são expressos por:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma^+}{E(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E}(\sigma - Tr(\sigma) I) \quad (33)$$

$$\varepsilon_{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} I \quad (34)$$

em que:

I é o tensor identidade.

Por sua vez, as variáveis associadas às variáveis de dano resultam em:

$$Y_1 = \frac{\partial \chi}{\partial D_1} = \frac{\sigma^+ : \sigma^+ + 2\beta_1 f(\sigma)}{2E(1-D_1)^2} \quad (35)$$

$$Y_2 = \frac{\partial \chi}{\partial D_2} = \frac{\sigma^- : \sigma^- + 2\beta_2 Tr(\sigma)}{2E(1-D_2)^2} \quad (36)$$

Também variáveis Z_i associadas às variáveis de encruamento podem ser definidas de forma análoga. Entretanto, neste caso, em lugar de explicitar as G_i, propõem-se as expressões resultantes de ajustes sobre resultados experimentais. A forma geral proposta é a seguinte:

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = g_i(z_i) = \left[Y_{oi} + \frac{1}{A_i}\left(\frac{D_i}{1+D_i}\right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1,2) \quad (37)$$

em que:

A_i, B_i e Y_{oi} são parâmetros a serem identificados.

Nota-se que as variáveis Z_i têm um valor inicial dado por Z_i (D_i = 0) = Y_{oi}. As expressões (37) aparecem, na verdade, nas funções critério de danificação: F_i = Y_i - Z_i, as quais caracterizam condições para a evolução ou não do dano em tração ou em compressão. Tais condições são:

Se $Y_i < Z_i$, então $\dot{D}_i = 0$: a resposta é elástica linear.

Se $Y_i = Z_i$ e $\dot{Y}_i > 0$, então $\dot{Z}_i = \dot{Y}_i$ e $\dot{D}_i \neq 0$. Pode-se determinar D_i a partir da própria (37) por:

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + \left[A_i(Y_i - Y_{oi})\right]^{B_i}} \quad (38)$$

Resultados e discussão

Com o intuito de avaliar a resposta numérica fornecida pelo modelo, três séries de vigas em concreto armado com diferentes taxas de armadura foram ensaiadas em laboratório. O modelo de dano foi implementado em código de cálculo escrito em FORTRAN utilizando o Método dos Elementos Finitos, onde as vigas são discretizadas em elementos de barra com camadas estratificadas em sua seção transversal.

As vigas em questão são biapoiadas com 2,40 m de vão, seção transversal retangular de 12 x 30 cm e com carregamento constituído por duas forças concentradas aplicadas nos terços do vão. Três vigas deste tipo são consideradas, diferenciando-se entre si pela quantidade e distribuição geométrica de armadura longitudinal inferior (3ϕ10 mm, 5ϕ10 mm e 7ϕ10 mm). O aço da armadura possui E_s = 196 GPa e o concreto possui E_c= 29200 MPa. Na Figura 2, são fornecidos os detalhes da geometria e da armadura.

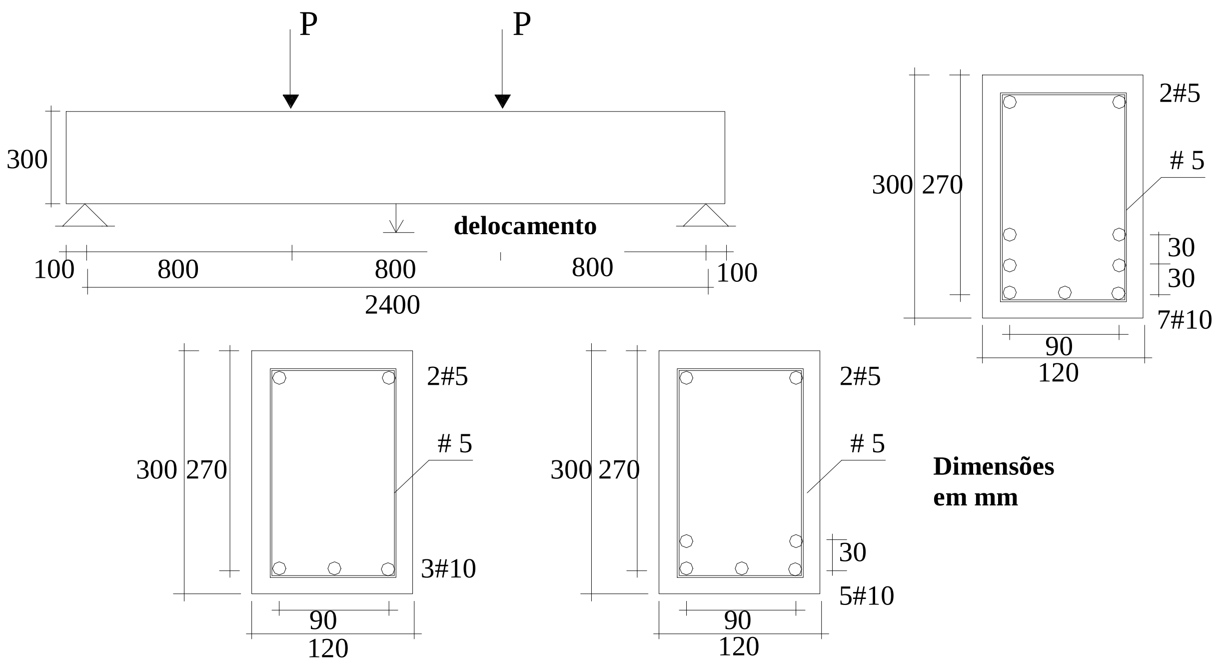

Figura 2. Geometria e armação das vigas.

O modelo constitutivo foi implementado num programa para análise de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos estratificados em camadas (EFICoS – *Eléments Finis à Couches Superposées*). Os parâmetros do modelo (Figura 3) foram identificados por meio de ajustes de curvas experimentais uniaxiais de compressão e de tração do concreto utilizado na confecção das vigas.

$$Y_{01} = 1,46\ E - 04\ MPa \qquad B_1 = 0,62$$

$$Y_{02} = 0,15\ E - 01\ MPa \qquad B_2 = 1,50$$

$$A_1 = 2,10\ E + 03\ MPa^{-1} \qquad \beta_1 = 1,80\ MPa$$

$$A_2 = 7,00\ E + 00\ MPa^{-1} \qquad \beta_2 = -40,0\ Mpa$$

$$\sigma_f = 3,50\ MPa$$

Figura 3. Parâmetros do modelo constitutivo.

As análises numéricas foram desenvolvidas empregando-se uma discretização com elementos finitos de barra, fazendo-se uso das simetrias de carregamento e geometria, analisando-se, portanto, apenas metade da viga.

Para as barras de aço longitudinais é assumido um modelo elastoplástico. Perfeita aderência entre aço e concreto é assumida. Em todos os casos, a malha adotada na discretização das vigas foi de 20 elementos finitos e 21 nós, adotando-se ainda 15 camadas na discretização da seção transversal. No caso da viga com baixa taxa de armadura entre as 15 camadas, foi definida uma camada de aço. No caso da viga com média taxa de armadura, utilizaram-se duas camadas de aço; na viga com alta taxa de armadura, foram utilizadas três camadas de aço.

Os confrontos dos resultados numéricos e experimentais estão ilustrados nas curvas carga aplicada (P) por deslocamento vertical no meio do vão das vigas (Figura 4).

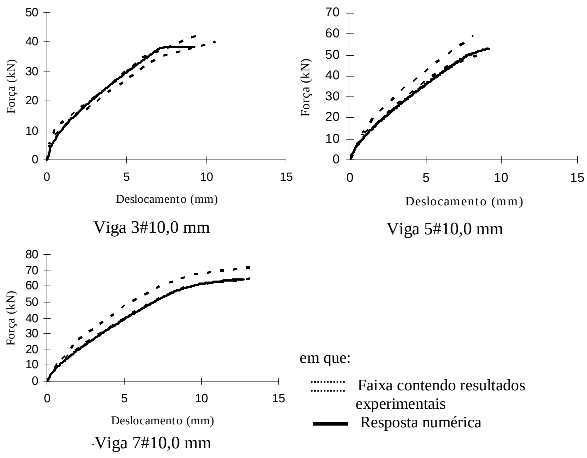

Figura 4. Resultados numéricos.

Conclusão

Os conceitos gerais da Mecânica do Dano Contínuo foram apresentados considerando as definições de variáveis de dano e sua incorporação numa teoria mais ampla, denominada termodinâmica dos processos irreversíveis.

Do que foi exposto, a Mecânica do Dano apresenta-se como uma teoria adequada para a formulação de modelos constitutivos de materiais que apresentam defeitos na sua microestrutura, como é o caso do concreto. Esta teoria leva em conta o acoplamento de efeitos entre os processos de danificação e o comportamento tensão-deformação.

Para os exemplos numéricos apresentados, ficou claro o bom desempenho de um modelo constitutivo para o concreto derivado do Método do Estado Local, pois os resultados são bastante satisfatórios, quando comparados com as respostas obtidas em ensaios experimentais. Outros modelos, por exemplo, Welemane e Cormery (2002), Jason et al. (2006), Grassl e Jirásek (2006) também derivados de tal Método, apresentam bom desempenho na simulação do comportamento de outros materiais.

Por outro lado, modelos constitutivos de dano podem ser obtidos por formulações alternativas, como as apresentadas em Pituba (2006) e Pituba (2007).

Referências

GERMAIN, P. **Cours de mécanique des milieux continus**. Paris: Universidade de Paris, 1973. t. 1.

GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. Damage-plastic model for concrete failure. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, p. 7166-7196, 2006.

JASON, L.; HUERTA, A.; PIJAUDIER-CABOT, G.; GHAVAMIAN, S. An elastic plastic damage formulation for concrete: application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 7077-7092, 2006.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

PITUBA, J. J. C. Formulation of damage models for bimodular and anisotropic media. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, v. 3, n. 2, p. 7-29, 2006.

PITUBA, J. J. C. An anisotropic model of damage and unilateral effect for brittle materials. **International**

Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, v. 4, n. 2, p. 642-647, 2007.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

PROENÇA, S. P. B.; PITUBA, J. J. C. A damage constitutive model accounting for induced anisotropy and bimodular elastic response. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, n. 1, p. 101-117, 2003.

WELEMANE, H.; CORMERY, F. Some remarks on the damage unilateral effect modeling for microcracked materials. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 11, p. 65-86, 2002.

Received on November 8, 2007.
Accepted on August 20, 2008.