



Acta Scientiarum. Technology

ISSN: 1806-2563

eduem@uem.br

Universidade Estadual de Maringá  
Brasil

de Cerqueira Pituba, José Julio  
Validação de um modelo de dano para a análise não-linear de estruturas em concreto armado  
Acta Scientiarum. Technology, vol. 32, núm. 3, 2010, pp. 251-259  
Universidade Estadual de Maringá  
Maringá, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=303226528003>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica  
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# Validação de um modelo de dano para a análise não-linear de estruturas em concreto armado

José Julio de Cerqueira Pituba

Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão, 75740-020, Catalão, Goiás, Brasil. E-mail: julio.pituba@pq.cnpq.br

**RESUMO.** O artigo apresenta uma discussão sobre a aplicabilidade de modelos de dano na análise não-linear física de estruturas em concreto armado, procurando, particularmente, validar a proposta de um modelo formulado recentemente por Pituba que compara as respostas numéricas obtidas com as respostas de modelos já testados, além de respostas experimentais encontradas na literatura. O modelo proposto admite o concreto como meio inicialmente isótropo e que passa a apresentar deformações plásticas, bimodularidade e anisotropia induzidas pelo dano. Já o modelo proposto por Mazars considera o concreto como meio elástico e isótropo. Em seguida, apresenta-se a formulação do modelo proposto por La Borderie, que leva em conta deformações plásticas induzidas pelo dano e mantém a característica de isotropia do material. Na segunda parte do trabalho, os modelos são empregados na análise de vigas e pórtico em concreto armado, e as respostas numéricas são confrontadas com medidas experimentais. Os resultados evidenciam o bom desempenho dos modelos de dano e, em particular, valida-se o emprego do modelo proposto por Pituba nas situações estudadas. Observa-se ainda que formulações simples de modelos de dano para o concreto podem apresentar resultados bastante satisfatórios, dando margem para possíveis aplicações na prática da Engenharia de Estruturas.

**Palavras-chave:** mecânica do dano, concreto armado, modelos constitutivos.

**ABSTRACT. Validation of a damage model for the non-linear analysis of reinforced concrete structures.** This work presents a discussion on the employment of a damage model recently proposed for concrete and other damage models in the non-linear analysis of reinforced concrete structures. The validation of the model is obtained by the comparison between numerical responses and experimental ones. The model proposed by Pituba regards concrete as an initially isotropic medium that starts to present plastic deformations, bimodularity and anisotropy induced by the damage. The model proposed by Mazars considers concrete to be an elastic and isotropic medium. Next, the model proposed by La Borderie is presented. This isotropic damage model takes into account plastic deformations induced by the damage. In the second part of the work, the models are used in the analysis of reinforced concrete structures, where the numerical responses are compared with experimental ones. The results evidence the good performance of the damage models on the simulation of the behavior of reinforced concrete structures. In particular, the employment of the damage model proposed by Pituba is valid. It is noted that the simple formulations of damage models can present results with good accuracy leading to possible practical applications in Structural Engineering.

**Key words:** damage mechanics, reinforced concrete, constitutive models.

## Introdução

A Mecânica do Dano é uma ferramenta para a análise dos efeitos de deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica, estudando o efeito de microfissuras na resposta do material. Portanto, essa teoria pode ser aplicada de maneira bastante satisfatória na análise de estruturas em concreto armado, pois o concreto é um material no qual a fissuração é o fenômeno dominante no comportamento não-linear.

O emprego de modelos constitutivos para o concreto, formulados com base na Mecânica do Dano, tem mostrado bons resultados (IBRAHIMBEGOVIC et al., 2008; BIELSKI et al., 2006; DASCALU et al., 2008; COMI; PEREGO, 2001; PIRONDI et al., 2006). Alguns desses modelos são abordados neste trabalho com relação à formulação teórica, identificação paramétrica e utilização na análise de estruturas em concreto armado.

Contudo, a tentativa de aproximação do modelo matemático à realidade do comportamento

estrutural tem a vantagem de tornar possível colher respostas de melhor qualidade, porém tem o grande inconveniente de número excessivo de parâmetros, identificação paramétrica complexa com necessidade de ensaios experimentais bastante elaborados, custo de formulação teórica do modelo e de processamento numérico elevados, em suma, tem-se um modelo matemático sem serventia prática. A busca por modelos que tentem equilibrar a simplicidade com robustez de resultados é algo desejável. Dentro desse contexto, o artigo tem o objetivo de ilustrar as potencialidades de emprego dos modelos de dano, em suas formulações mais simples (versões unidimensionais), para facilitar a identificação paramétrica e implementação em códigos de cálculo, entretanto, com apresentação de resultados eficientes e com pouco custo computacional, contribuindo para uma discussão sobre a consideração da não-linearidade física do concreto fissurado na análise de estruturas em concreto armado. Além disso, procura evidenciar a robustez dos resultados numéricos de um modelo proposto por Pituba (2006), validando seu emprego.

No que segue, o texto está subdividido basicamente em duas partes. Na primeira, são apresentadas resumidamente as formulações teóricas dos modelos estudados. A segunda parte ilustra as respostas obtidas com o emprego dos modelos na análise de vigas e pórtico em concreto armado. Por fim, são descritas algumas considerações sobre o presente trabalho.

## Material e métodos

### Modelo constitutivo de Mazars

O modelo proposto por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) aplica-se a situações de carregamento radial ou crescente, em forma proporcional a certo parâmetro, e admite as seguintes hipóteses fundamentais:

- localmente, o dano é por um estado de alongamento e representado por um escalar;
- a evolução do dano ocorre quando um valor de referência para o 'alongamento equivalente'  $\tilde{\varepsilon}$  é superado;
- o concreto com dano comporta-se como um meio elástico;

O estado de extensão local é avaliado por uma deformação equivalente, escrita como:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (1)$$

em que:  $\varepsilon_i$  é uma componente de deformação principal e  $\langle \varepsilon_i \rangle_+$  é a sua parte positiva dada por:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2} [\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (2)$$

Em particular, para os casos de tração e de compressão uniaxial na direção  $i$ , a deformação equivalente resulta, respectivamente,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_i$  e  $\tilde{\varepsilon} = -\nu \varepsilon_i \sqrt{2}$ . O modelo admite que o dano no material se inicia quando a deformação equivalente atinge valor de referência  $\varepsilon_{d0}$ , obtido em ensaios de tração uniaxial relativos ao nível de tensão máxima:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - S(D) \leq 0 \text{ com } S(0) = \varepsilon_{d0} \quad (3)$$

Com validade para uma história qualquer de carregamento, e obedecendo à restrição de irreversibilidade imposta pela segunda lei da termodinâmica, a evolução do dano é:

$$\dot{D} = 0 \quad \text{se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \quad (4a)$$

$$\dot{D} = F(\tilde{\varepsilon}) \left( \frac{\dot{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\varepsilon}} \right)_+ \quad \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \quad (4b)$$

Nas relações anteriores  $(\bullet)$  indica variação no tempo e  $F(\tilde{\varepsilon})$  é uma função contínua e positiva da variável  $\tilde{\varepsilon}$ . Dessa forma resulta que  $\dot{D} \geq 0 \quad \forall \tilde{\varepsilon} \geq 0$

Considerando-se uma situação de carregamento radial, as relações (4b) são diretamente integráveis. No caso particular de estados uniaxiais, pela não-simetria da resposta do concreto à tração e à compressão, definem-se, respectivamente, as variáveis de dano  $D_T$  e  $D_C$ , que dependem do alongamento equivalente e de parâmetros do material. As relações que permitem determinar os valores dessas variáveis resultam de ajustes sobre as curvas tensão-deformação, obtidas em ensaios uniaxiais de tração e de compressão. São elas:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (5a)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (5b)$$

em que:  $A_T$  e  $B_T$  são parâmetros característicos do material em tração uniaxial,  $A_C$  e  $B_C$  são parâmetros do material em compressão uniaxial. Esses parâmetros podem ser identificados a partir de curvas tensão-deformação, obtidas de ensaios com deformação controlada.

Para estados complexos de tensão, propõe-se uma variável de dano definida pela combinação linear de  $D_T$  e  $D_C$  por meio da seguinte condição:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad \text{sendo} \quad \alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (6)$$

em que os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  assumem valores no intervalo fechado  $[0,1]$  e representam, respectivamente, a contribuição de solicitações de tração e de compressão para o estado local de alongamento.

### Modelo constitutivo de La Borderie

Na sua formulação, permite levar em conta o aspecto unilateral por meio da definição de duas variáveis representativas do dano em tração ( $D_1$ ) e do dano em compressão ( $D_2$ ). Ao contrário do modelo de Mazars, essas duas variáveis não se combinam numa única representação do dano. As deformações anelásticas ou residuais são consideradas por apenas ao dano. A ativação do processo de danificação é realizada por meio de um controle sobre o sinal das tensões principais. O modelo proposto por La Borderie é apresentado em Pituba (2009), segundo o formalismo do método do estado local. Nesse sentido, definem-se variáveis de estado primária ( $\sigma$ ) e internas ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ), bem como suas correspondentes variáveis associadas ( $\varepsilon$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ), sendo  $Y_1$  e  $Y_2$  associadas a  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente, e interpretadas como taxas de energia liberada durante o processo de evolução de dano. Por sua vez,  $Z_1$  e  $Z_2$  são associadas, respectivamente, a  $z_1$  e  $z_2$  (medidas de dano acumulado) e controlam o processo de encruamento.

As relações entre as variáveis de estado e as suas variáveis associadas resultam de um potencial de estado. Neste modelo, sugere-se o potencial de energia livre de Gibbs ( $\chi$ ) como potencial de estado, adotando-se, para ele, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi(\sigma, D_1, D_2, z_1, z_2) \\ &= \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E(1-D_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E(1-D_2)} + \frac{\nu}{2E}(\sigma : \sigma - Tr^2(\sigma)) \\ &\quad + \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} f(Tr(\sigma)) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} Tr(\sigma) + G_1(z_1) + G_2(z_2) \end{aligned} \quad (7)$$

em que:  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  são, respectivamente, as partes positiva e negativa do tensor de tensões,  $Tr(\sigma)$  é o primeiro invariante desse tensor,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material virgem,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros a serem identificados, relacionados ao aparecimento de deformações anelásticas. Além

disso, a função  $f(Tr(\sigma))$  leva em conta as condições de abertura e de fechamento da 'fissura'. Finalmente,  $G_1(z_1)$  e  $G_2(z_2)$  são funções de encruamento.

As leis de estado derivam do potencial (7) e definem as variáveis associadas às variáveis de estado. Entretanto, no caso das variáveis  $Z_i$ , em lugar de explicitar as  $G_i$ , propõem-se diretamente expressões para  $Z_i$ , resultantes de ajustes sobre resultados experimentais. A forma geral proposta é a seguinte:

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = \left[ Y_{oi} + \frac{I}{A_i} \left( \frac{D_i}{1-D_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

em que:  $A_i$ ,  $B_i$  e  $Y_{oi}$  são parâmetros a serem identificados.

Nota-se que as variáveis  $Z_i$  têm valor inicial dado por  $Z_i (D_i = 0) = Y_{oi}$ . As expressões (8) aparecem, na verdade, nas funções critério de danificação  $F_i = Y_i - Z_i$ , as quais caracterizam condições para a evolução, ou não, do dano em tração ou em compressão. Ou seja, se  $Y_i < Z_i$ , então  $\dot{D}_i = 0$ , resultando numa resposta elástica linear. Por outro lado, se  $Y_i = Z_i$  e  $\dot{Y}_i > 0$ , então  $\dot{Z}_i = \dot{Y}_i$  e  $\dot{D}_i \neq 0$ . Pode-se determinar  $D_i$  a partir da própria (8) por:

$$D_i = 1 - \frac{I}{I + [A_i(Y_i - Y_{oi})]^{B_i}} \quad (9)$$

### Modelo constitutivo de Pituba

O concreto é aqui entendido como material que pertence à categoria dos meios inicialmente isotrópicos que passam a apresentar isotropia transversal e resposta bimodular induzidas pelo dano. A formulação do modelo para o concreto tem por base o princípio de equivalência de energia e o formalismo apresentado em Pituba (2006).

No que segue, o modelo proposto é descrito brevemente, iniciando-se pela apresentação do tensor de dano para estados predominantes de tração, cuja expressão é dada na forma:

$$DT = f_1(D_1, D_4, D_5) (A \otimes A) + 2 f_2(D_4, D_5) [(A \otimes I + I \otimes A) - (A \otimes A)] \quad (10)$$

sendo  $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - 2 f_2(D_4, D_5)$  e  $f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$ .

O tensor de dano apresenta duas variáveis escalares na sua composição ( $D_1$  e  $D_4$ ) e uma terceira variável de dano  $D_5$ , ativada somente se tiver havido compressão prévia com danificação correspondente. A variável  $D_1$  representa a danificação na direção

perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material e  $D_4$  é a variável representativa da danificação gerada pelo cisalhamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano.

Na Equação (10), o tensor  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor  $A$  é, por definição de Curnier et al. (1995), formado pelo produto tensorial do versor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. As operações produtos tensoriais entre os tensores de segunda ordem  $I$  e  $A$  que aparecem na Equação (10) e que serão utilizadas durante toda a formulação estão descritas em Pituba (2006).

Para estados predominantes de compressão, propõe-se para o tensor de dano a relação:

$$\begin{aligned} D_C &= f_1(D_2, D_4, D_5) (A \otimes A) + f_2(D_3) \\ &[(I \otimes I) - (A \otimes A)] + 2f_3(D_4, D_5) \\ &[(A \otimes I + I \otimes A) - (A \otimes A)] \end{aligned} \quad (11)$$

sendo  $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - 2f_3(D_4, D_5)$ ,  $f_2(D_3) = D_3$  e  $f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$ .

Notam-se três variáveis escalares na sua composição:  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_5$ , além de  $D_4$ , relacionada a efeitos de tração pré-existent. A variável  $D_2$  (danificação perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção e, juntamente com  $D_3$  (representante da danificação no plano de isotropia transversal), penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal.

Finalmente, os tensores constitutivos resultantes são descritos por:

$$\begin{aligned} E_T &= \lambda_{11}[I \otimes I] + 2\mu_1[I \otimes I] - \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) \\ &[A \otimes A] - \lambda_{12}^+(D_1)[A \otimes I + I \otimes A] \\ &- \mu_2(D_4, D_5)[A \otimes I + I \otimes A] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E_C &= \lambda_{11}[I \otimes I] + 2\mu_1[I \otimes I] \\ &- \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5)[A \otimes A] \\ &- \lambda_{12}^-(D_2, D_3)[A \otimes I + I \otimes A] - \lambda_{11}^-(D_3)[I \otimes I] - \\ &\frac{(1-2\nu_0)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3)[I \otimes I] - \mu_2(D_4, D_5) \\ &[A \otimes I + I \otimes A] \end{aligned} \quad (13)$$

em que:  $\lambda_{II} = \lambda_0$  e  $\mu_I = \mu_0$ . Os outros parâmetros só existem para dano não-nulo, evidenciando dessa forma a anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano, e são definidos por:

$$\begin{aligned} \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) &= (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_1 - D_1^2) - 2\lambda_{12}^+(D_1) - 2\mu_2(D_4, D_5) \\ \lambda_{12}^+(D_1) &= \lambda_0 D_1; \quad \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0[1 - (1-D_4)^2(1-D_5)^2] \\ \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) &= (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_2 - D_2^2) - 2\lambda_{12}^-(D_2, D_3) \\ &+ \frac{(\nu_0 - 1)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) - 2\mu_2(D_4, D_5) \\ \lambda_{12}^-(D_2, D_3) &= \lambda_0[(1-D_3)^2 - (1-D_2)(1-D_3)] \\ \lambda_{11}^-(D_3) &= \lambda_0(2D_3 - D_3^2); \\ \mu_2(D_4, D_5) &= 2\mu_0[1 - (1-D_4)^2(1-D_5)^2] \end{aligned} \quad (14)$$

Em Curnier et al. (1995), define-se uma hipersuperfície, no espaço das tensões ou das deformações, a ser empregada como critério para a identificação das respostas constitutivas de compressão ou de tração. Neste modelo, adota-se uma forma particular para a hipersuperfície no espaço das deformações: um hiperplano  $g(\varepsilon)$ , caracterizado por sua normal unitária  $N$  ( $\|N\| = 1$ ). Para a versão uniaxial do modelo, vale a seguinte relação:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon, D_T, D_C) &= N(D_T, D_C) \cdot \varepsilon^e = \gamma_1(D_1, D_2) \varepsilon_V^e + \\ &+ \gamma_2(D_1, D_2) \varepsilon_{II}^e \end{aligned} \quad (15)$$

em que:  $\gamma_1(D_1, D_2) = \{1 + H(D_2)[H(D_1) - 1]\}\eta(D_1) + \{1 + H(D_1)[H(D_2) - 1]\}\eta(D_2)$  e  $\gamma_2(D_1, D_2) = D_1 + D_2$ .

As funções de Heaveside empregadas na última relação são dadas por:

$$H(D_i) = 1 \text{ para } D_i > 0; \quad H(D_i) = 0 \text{ para } D_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

As funções  $\eta(D_1)$  e  $\eta(D_2)$  são definidas, respectivamente, para os casos de tração, supondo que não tenha danificação prévia de compressão, e de compressão, supondo que não tenha havido danificação prévia de tração.

$$\begin{aligned} \eta(D_1) &= \frac{-D_1 + \sqrt{3 - 2D_1^2}}{3}; \quad \eta(D_2) \\ &= \frac{-D_2 + \sqrt{3 - 2D_2^2}}{3} \end{aligned} \quad (17)$$

Com relação ao critério de danificação, é conveniente separá-lo em critério para início de danificação, quando o material deixa de ser isotrópico; e critério para carga e descarga, entendido aqui num sentido de evolução, ou não, das variáveis de dano, quando o material já se apresentar como transversalmente isotrópico.

O critério para ativação inicial da danificação em tração ou compressão é dado por:

$$f_{T,C}(\sigma) = W_e^* - Y_{0T,0C} < 0 \quad (18)$$

em que:  $W_e^*$  é a energia de deformação elástica complementar, considerando-se o meio inicialmente íntegro, isotrópico e puramente elástico e  $Y_{0T} = \frac{\sigma_{0T}^2}{2E_0}$  ou  $Y_{0C} = \frac{\sigma_{0C}^2}{2E_0}$  são valores de referência obtidos de ensaios uniaxiais de tração, ou de compressão, respectivamente, sendo  $\sigma_{0T}$  e  $\sigma_{0C}$  as tensões dos limites elásticos.

Portanto,  $D_T = 0$  (ou seja,  $D_1 = D_4 = 0$ ) para estados predominantes de tração ou  $D_C = 0$  (ou seja,  $D_2 = D_3 = D_5 = 0$ ) para estados de compressão, em que o regime de resposta do material é elástico linear e isotrópico.

Para o caso de  $g(\varepsilon, D_T, D_C) > 0$  e  $g(\varepsilon, D_T, D_C) < 0$ , as energias elásticas complementares do meio danificado são dadas, respectivamente, pelas relações:

$$W_{e+}^* = \frac{\sigma_{II}^2}{2E_0(1-D_I)^2} \text{ e } W_{e-}^* = \frac{\sigma_{II}^2}{2E_0(1-D_2)^2} \quad (19)$$

Considerando-se, então, uma situação geral de meio danificado em regime predominante de tração, o critério para a identificação de acréscimos de danificação é representado pela seguinte relação:

$$f_T(\sigma) = W_{e+}^* - Y_{0T}^* \leq 0 \quad (20)$$

em que: o valor de referência  $Y_{0T}^*$  é definido pela máxima energia elástica complementar, determinada ao longo do processo de danificação até o estado atual. Para o meio danificado em regime predominante de compressão, valem relações análogas ao caso de tração.

Nos casos em que se configura carregamento, isto é, em que  $\dot{D}_T \neq 0$  ou  $\dot{D}_C \neq 0$ , é necessário atualizar os valores das variáveis escalares de dano que aparecem nos tensores  $D_T$  e  $D_C$ , considerando-se suas leis de evolução.

Limitando-se a análise ao caso de carregamento monotônico crescente e versão uniaxial do modelo, as leis de evolução propostas para as variáveis escalares de dano são resultantes de ajustes sobre resultados experimentais e apresentam características similares às encontradas nos modelos de Mazars e La Borderie. A forma geral proposta é:

$$D_i = 1 - \frac{1 + A_i}{A_i + \exp[B_i(Y_i - Y_{0i})]} \text{ com } i = 1, 2 \quad (21)$$

em que:  $A_i$ ,  $B_i$  e  $Y_{0i}$  são parâmetros a serem identificados. Os parâmetros  $Y_{0i}$  são entendidos como limites iniciais para a ativação da danificação, os mesmos utilizados na Equação (18).

Existe a necessidade de se definir a localização do plano local de isotropia transversal do material, que, na versão uniaxial do modelo, será um caso particular expresso por:

No espaço das deformações principais, se duas das três taxas de deformação forem de alongamento, de encurtamento ou nulas, o plano definido por elas será o plano local de isotropia transversal do material.

Tanto no caso de tração uniaxial como compressão uniaxial, resulta que o plano de isotropia transversal é perpendicular à direção da tensão de tração ou de compressão.

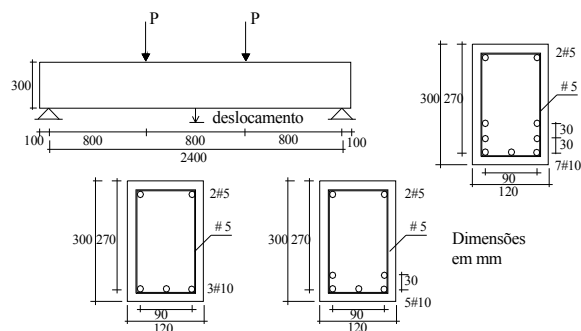
Os modelos abordados foram implementados num programa para análise de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos de pórtico clássico estratificados em camadas, sendo assumidas, como hipóteses de cálculo, a negligência de deformações por distorção e a perfeita aderência entre aço e concreto. Para o concreto, valem os modelos de danificação em estudo e, para as barras de aço longitudinais, admite-se um comportamento elastoplástico.

## Resultados e discussão

### Vigas em concreto armado

As vigas em questão (Figura 1) são biapoiadas, com 2,40 m de vão, seção transversal retangular (12 x 30 cm) e o carregamento é constituído por duas forças concentradas iguais, aplicadas nos terços dos vãos. Na confecção das vigas, foi utilizado um concreto com  $E_c = 29.200$  MPa. Para o aço das armaduras, adotou-se  $E_a = 196.000$  MPa e tensão de escoamento de 420 MPa, admitindo-se um comportamento elastoplástico perfeito.

Os parâmetros de compressão de todos os modelos foram identificados a partir das medidas de ensaios experimentais em corpos de prova submetidos à compressão uniaxial (PITUBA; PROENÇA, 2005). Já os parâmetros de tração foram identificados sobre uma resposta em tração uniaxial descrita pelo modelo de Mazars para o concreto das vigas.



**Figura 1.** Geometria e armação das vigas.

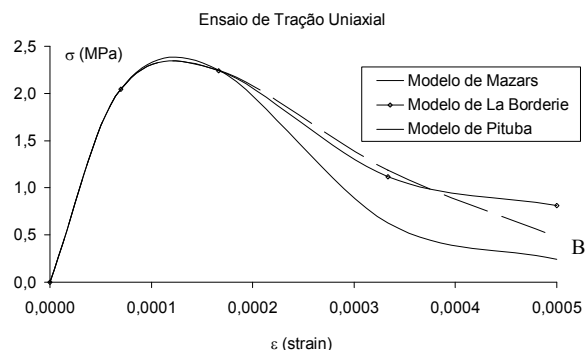
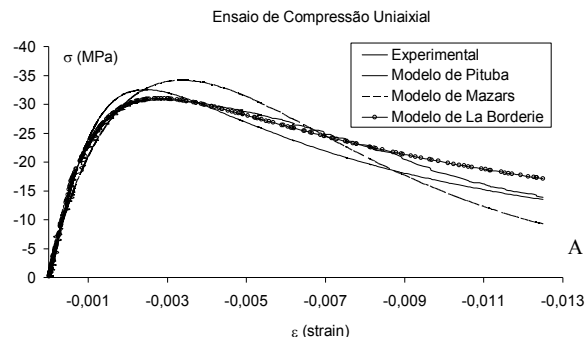
Na Tabela 1 são fornecidos os valores dos parâmetros utilizados em cada modelo. A Figura 2 representa a identificação paramétrica dos modelos nos casos uniaxiais, em que um código de cálculo foi elaborado para ajustar, por mínimos quadrados, a curva numérica fornecida pelos modelos, comparando-a com a curva experimental ou com aquela tomada como referência.

**Tabela 1.** Valores obtidos da identificação paramétrica.

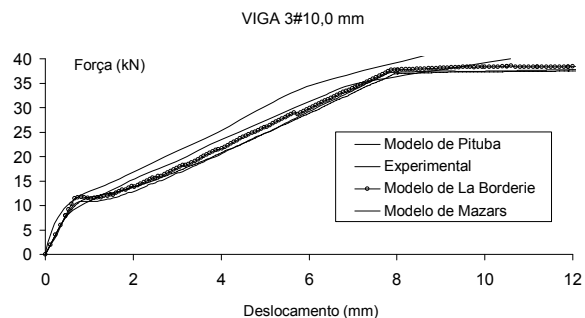
Mazars	La Borderie		Pituba	
	Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão	Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão
$A_T = 0,995$	$Y_{01} = 3,05 \times 10^{-4}$ MPa	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-2}$ MPa	$Y_{01} = 0,72 \times 10^{-4}$ MPa	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-2}$ MPa
$B_T = 8000$	$A_1 = 3,50 \times 10^{-13}$ MPa $^{-1}$	$A_2 = 6,80$ MPa $^{-1}$	$A_1 = 50$	$A_2 = -0,9$
$A_C = 0,85$	$B_1 = 0,95$	$B_2 = 0,7705$	$B_1 = 6700$ MPa $^{-1}$	$B_2 = 0,4$ MPa $^{-1}$
$B_C = 1050$	$\beta_1 = 1,00$ MPa	$\beta_2 = -10,00$ MPa		
$\varepsilon_{u0} = 0,00007$	$\sigma_T = 3,50$ MPa			

Fazendo-se uso das simetrias de carregamento e de geometria, analisaram-se apenas as metades das vigas, impondo-se incrementos de deslocamentos. Nas análises foram utilizados 20 elementos finitos, as seções foram divididas em 15 camadas, sendo uma camada de aço e concreto na viga com 3#10,0 mm, duas na viga com 5#10,0 mm e três na viga com 7#10,0 mm, conforme a disposição das armaduras mostrada na Figura 1. Os confrontos entre os resultados numéricos e experimentais, mediante curvas carga aplicada (P) por deslocamento vertical no meio do vão das vigas, estão ilustrados nas Figuras 3 a 5.

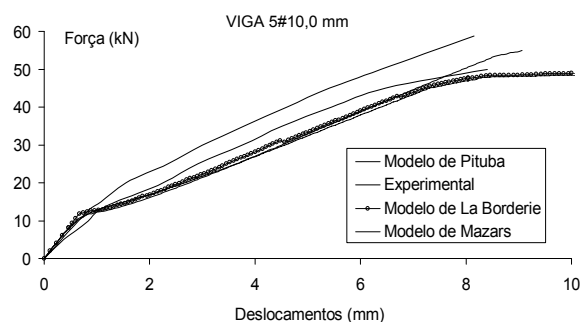
Pode-se observar que as respostas numéricas tendem a reproduzir forte quebra de rigidez inicial das vigas, seguida de recuperação de rigidez subsequente à redistribuição de esforços. Os próprios resultados experimentais apontam que esse processo é mais evidente no caso da viga pouco armada em razão da menor interação entre concreto e armadura, o que leva a um panorama de fissuração mais localizado entre as forças aplicadas.



**Figura 2.** Identificação paramétrica em compressão (A) e tração uniaxiais (B).



**Figura 3.** Resultados numéricos da viga 3#10,0 mm.



**Figura 4.** Resultados numéricos da viga 5#10,0 mm.

Em regime de serviço, observa-se ainda que os modelos de dano isótropo de Mazars e de La Borderie apresentam respostas similares às obtidas com o emprego do modelo de Pituba. Nesse regime, pelo tipo simplificado de análise (unidimensional),

não é possível verificar possível vantagem de emprego do modelo anisótropo sobre modelos isotrópos.

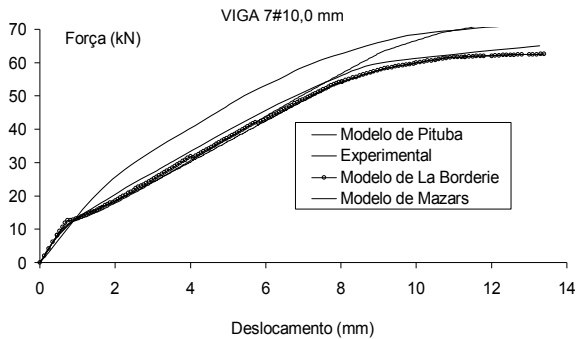


Figura 5. Resultados numéricos da viga 7#10,0 mm.

Já em regime próximo da ruptura, os critérios de danificação adotados são um dos fatores contribuintes para as diferentes respostas entre os modelos. No modelo de Mazars, o critério é expresso em termos de alongamentos equivalentes, enquanto que, nos modelos de La Borderie e Pituba, os critérios estão escritos em termos de energia. Além disso, outro fator de influência é que o modelo de Pituba utiliza o princípio de equivalência de energia. Esses fatores implicam evoluções diferentes para as variáveis de danificação.

No modelo de Pituba, em regime de ruptura, o concreto acaba por resistir aos esforços solicitantes de maneira mais eficiente, fazendo com que as armaduras das vigas, com cinco e sete barras de aço, venham a plastificar em níveis mais elevados de solicitação do que nos casos em que os modelos isotrópos foram empregados. Observa-se que as respostas numéricas indicam que a plastificação das armaduras ocorrem em diferentes níveis de solicitação, quando comparadas com as respostas experimentais, principalmente nos casos das vigas com cinco e sete barras de aço. Isso pode ser explicado pelo fato de ser assumida perfeita aderência entre a armadura e o concreto como hipótese para a simulação numérica.

Pórtico em concreto armado

As características geométricas do pórtico, assim como a distribuição das armaduras, estão ilustradas na Figura 6. O concreto utilizado na confecção do pórtico tem módulo de elasticidade  $E_c = 30.400$  MPa; o aço possui  $E_a = 192.500$  MPa, tensão de início de plastificação de 418 MPa e tensão última de 596 MPa. Foi adotado um modelo elastoplástico bilinear com um módulo de elasticidade reduzido no segundo trecho:  $E_{a2} = 0,009 E_a$ .

No ensaio experimental realizado por Vecchio e Emara (1992), inicialmente se aplicou uma força axial total de 700 kN para cada coluna, mantida então constante durante toda a aplicação em estágios da força lateral até a capacidade última do pórtico ser atingida.

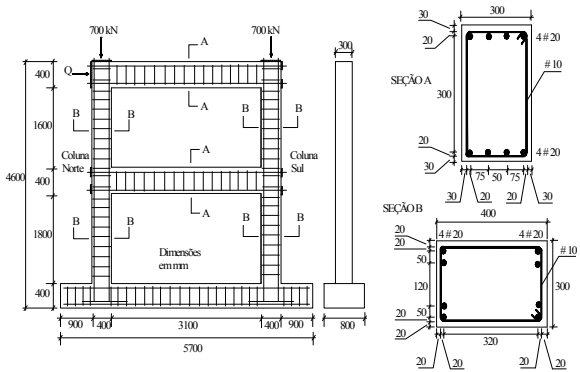


Figura 6. Geometria e armadura do pórtico.

Os parâmetros de compressão dos modelos testados foram identificados a partir de ensaios experimentais de corpos de prova em compressão uniaxial, realizados por Vecchio e Emara (1992). Por outro lado, para os parâmetros de tração, tanto do modelo de Mazars quanto de Pituba, foram adotados aqueles mesmos utilizados no exemplo anterior, por se tratarem de valores médios representativos para concretos normais. Contudo, vale ressaltar que os parâmetros do modelo de La Borderie foram alterados com o objetivo de se simular o comportamento do pórtico durante a fase de descarregamento.

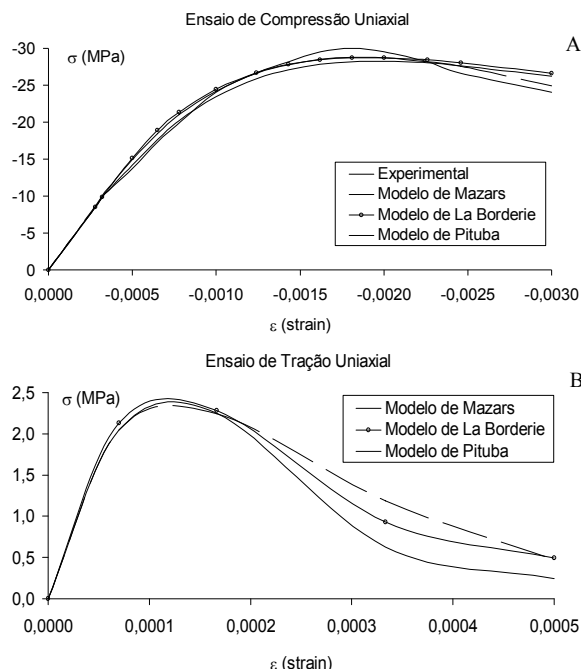
Na Tabela 2 e na Figura 7 são apresentados os valores dos parâmetros utilizados em cada modelo, além das respostas numéricas nos ensaios uniaxiais.

Para a análise numérica foram impostos incrementos de deslocamentos no ponto de aplicação da força horizontal. Utilizaram-se 30 elementos finitos na discretização, sendo empregados dez por coluna e cinco elementos por viga. As seções transversais foram estratificadas em dez camadas. As camadas de aço foram definidas em número de duas, de acordo com as disposições das armaduras nas seções (Figura 6).

Tabela 2. Valores obtidos da identificação paramétrica.

Mazars	La Borderie		Pituba	
	Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão	Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão
$A_1 = 0,995$	$Y_{01} = 2,25 \times 10^{-4}$ MPa	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-2}$ MPa	$Y_{01} = 0,72 \times 10^{-4}$ MPa	$Y_{02} = 1,7 \times 10^{-3}$ MPa
$B_1 = 8000$	$A_1 = 2,78 \times 10^{-3}$ MPa <sup>-1</sup>	$A_2 = 14,00$ MPa <sup>-1</sup>	$A_1 = 50$	$A_2 = -0,8$
$A_c = 1,30$	$B_1 = 0,93$	$B_2 = 0,90$	$B_1 = 6700$ MPa <sup>-1</sup>	$B_2 = 1,1$ MPa <sup>-1</sup>
$B_c = 1890$	$\beta_1 = 0,50$ MPa	$\beta_2 = -2,00$ MPa		
$\varepsilon_{a0} = 0,00007$	$\sigma_c = 3,50$ MPa			



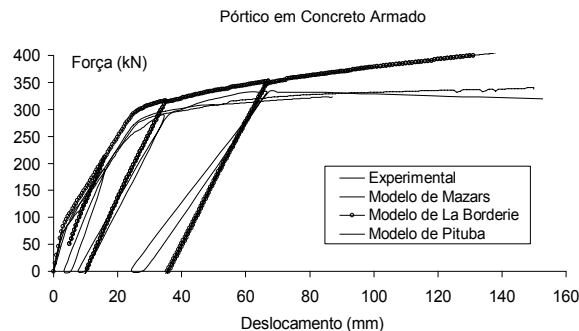


**Figura 7.** Identificação paramétrica em compressão (A) e tração uniaxiais (B).

Na Figura 8, apresentam-se as respostas numéricas obtidas confrontadas com a experimental, relacionando-se a força e o deslocamento horizontal no andar superior do pórtico.

Os resultados obtidos pelos modelos são julgados satisfatórios apesar da limitada identificação paramétrica. Por permitir considerar deformações permanentes na sua formulação, reproduziram-se com o modelo de La Borderie, inclusive, os deslocamentos residuais gerados.

Analisando-se a resposta global da estrutura ensaiada com o modelo de Mazars (sem se considerar as etapas de descarregamento), o refinamento da discretização em camadas não leva a uma mudança significativa do resultado. Isso talvez seja consequência da definição de uma única variável de dano, que combina os efeitos de danificação em tração e compressão, assumindo, desde logo, valor muito alto em todas as camadas dos elementos mais solicitados. Entretanto, no modelo de La Borderie há a definição de duas variáveis independentes de dano, e, com o refinamento da discretização em camadas, é possível colher, de forma melhor, a influência da danificação na seção. O mesmo acontece com o modelo de Pituba, porém a diferença em relação ao modelo de La Borderie é a possibilidade de se colher boa resposta numérica, sem a necessidade de custo computacional maior com o refinamento da discretização.



**Figura 8.** Resultados numéricos do pórtico em concreto armado.

Em Vecchio e Emara (1992), relata-se que o pórtico evidenciou um primeiro estágio de fissuração com força lateral de 52,50 kN. Na simulação com o modelo de Mazars, o pórtico apresentou uma primeira perda de rigidez ao atingir a força de 92,58 kN. Com o modelo de La Borderie, a mesma perda se manifestou com a força de 91,06 kN. Já com o modelo de Pituba, a força obtida foi de 45,58 kN. Considera-se que a previsão de início de fissuração pelo modelo de Pituba está de acordo com a realidade experimental.

Numa etapa posterior da análise numérica, o modelo de Mazars indicou força de 260 kN em correspondência à primeira plastificação de armaduras. O mesmo fenômeno aconteceu com La Borderie, em 263,90 kN, e com o modelo de Pituba, em 254,8 kN. A força última observada durante o experimento foi de 332 kN. Na simulação numérica, tanto com Mazars quanto com La Borderie, o pórtico suportaria ulteriores incrementos de deslocamentos, porém, com Mazars, evidenciou-se força máxima de 340,10 kN. A força máxima obtida com o modelo de Pituba foi de 323 kN.

Em suma, no tipo de análise executada aqui (análise unidimensional), todos os modelos se apresentaram muito eficientes durante toda a simulação do comportamento mecânico das estruturas, com destaque para o modelo de Pituba, que já se mostrou mais apropriado para a análise de estruturas em concreto armado em simulações bidimensionais quando comparado com modelos isotropos (PITUBA, 2006).

## Conclusão

De modo geral, o emprego dos modelos constitutivos na análise de estruturas de barras se mostrou bastante satisfatório, ressaltando-se o modelo de Pituba pela potencialidade das características que o mesmo possui, tal como a penalização seletiva da rigidez, que reduz problemas de mau condicionamento numérico, observados

com modelos escalares isotrópicos em análises bidimensionais e tridimensionais. Pode-se concluir, pelos exemplos unidimensionais apresentados, a validade do emprego de modelos de dano em combinação com a técnica de discretização adotada na simulação do comportamento de estruturas lineares em concreto armado.

Contudo, a aplicação de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano. Acredita-se que esforço deve ser feito no sentido de torná-los mais práticos em seu emprego, pois existe a potencialidade de aplicação em projetos para o cálculo de carga de colapso e identificação de todo o mecanismo, na verificação do comportamento de elementos sob fadiga e na análise de estruturas em concreto armado, sujeitas a cargas provenientes de sismos, além da verificação da deformabilidade das estruturas em serviço. Trata-se, portanto, de temas interessantes e que deverão ser explorados pelo autor em trabalhos futuros.

## Referências

- BIELSKI, J.; SKRZYPEK, J. J.; KUNA-CISKAL, H. Implementation of a model of coupled elastic-plastic unilateral damage material to finite element code. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 15, n. 1, p. 5-39, 2006.
- COMI, C.; PEREGO, H. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 6427-6454, 2001.
- CURNIER, A.; HE, Q.; ZYSET, P. Conewise linear elastic materials. **Journal of Elasticity**, v. 37, n. 1, p. 1-38, 1995.
- DASCALU, C.; BILBIE, G.; AGIASOFITOU, E. K. Damage and size effects in elastic solids: a homogenization approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, p. 409-430, 2008.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; JEHEL, P.; DAVENNE, L. Coupled damage-plasticity constitutive model and direct stress interpolation. **Computational Mechanics**, v. 42, p. 1-11, 2008.
- MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory: application to concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 2, p. 345-365, 1989.
- PIRONDI, A.; BONORA, N.; STEGLICH, D.; BROCKS, W.; HELLMANN, D. Simulation of failure under cyclic plastic loading by damage models. **International Journal of Plasticity**, v. 22, p. 2146-2170, 2006.
- PITUBA, J. J. C. Formulation of damage models for bimodular and anisotropic media. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, v. 3, n. 2, p. 7-29, 2006.
- PITUBA, J. J. C. Método do estado local aplicado na formulação de modelos constitutivos de dano para o concreto. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 31, n. 1, p. 15-23, 2009.
- PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.
- VECCHIO, F. J.; EMARA, M. B. Shear deformations in reinforced concrete frames. **ACI Structural Journal**, v. 89, n. 1, p. 46-56, 1992.

*Received on May 11, 2009.*

*Accepted on August 11, 2009.*

License information: This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.