



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

de Melo Ferraz, José Euclides; Johannes Zimmer, Christian
Inclusão de Custos de Transação Não-lineares na Otimização Média-variancia
Revista Brasileira de Finanças, vol. 3, núm. 2, 2005, pp. 195-221
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824718003>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Inclusão de Custos de Transação Não-lineares na Otimização Média-variância

José Euclides de Melo Ferraz*

Christian Johannes Zimmer**

Resumo

Neste artigo apresentamos uma nova forma para incluir custos de transação na otimização por média-variância de carteiras. Consideramos custos de corretagem, *bid/ask spread* e o impacto no mercado da transação. Propomos um algoritmo pragmático que aproxima a carteira ótima considerando os custos e mostramos no caso sem restrições que a abordagem converge. Um exemplo do uso da abordagem no mercado brasileiro é fornecido e comparamos os resultados com aqueles criados por um otimizador não-linear.

Abstract

In this article we propose a new way to include transaction costs into a mean-variance portfolio optimization. We consider brokerage fees, *bid/ask spread* and the market impact of the trade. A pragmatic algorithm is proposed, which approximates the optimal portfolio, and we can show that it converges in the absence of restrictions. Using Brazilian financial market data we compare our approximation algorithm with the results of a non-linear optimizer.

Palavras-chave: otimização de carteiras; custos de transação; *bid/ask spread*; impacto de mercado.

Códigos JEL: G11; C61.

Submetido em Março de 2005. Revisado em Setembro de 2005.

*Banco Itáu S.A., Área de Mercado Capitais, Superintendência de Pesquisa Quantitativa e IME-USP. E-mail: jose.ferraz@itau.com.br

**Banco Itáu S.A., Área de Mercado Capitais, Superintendência de Pesquisa Quantitativa e FEA-USP. E-mail: christian.zimmer@itau.com.br

1. Introdução e Metodologia

A inclusão dos custos de transação em mercados com relativamente pouca liquidez é um tema crucial para a decisão de alocação. A incorporação dos custos influencia a determinação dos preços (e retornos) esperados dos ativos, a base para o *asset allocation*, mas também a análise dos comportamentos econométricos – a base para as estratégias de arbitragem estatística. Chamamos de *custos de transação* os custos incorridos ao comprar ou vender ativos de uma carteira. Segundo Grinold e Kahn (1995), estes custos podem ser classificados em três categorias:

1. *Custos de processamento*, que são os custos diretos incorridos ao efetuar as transações, tais como os emolumentos (*fixo* por ordem) e a corretagem (*variável* por valor transacionado). Neste trabalho não vamos considerar os custos *fixos* associados às transações, pois sua modelagem envolveria o uso de variáveis binárias, mas vamos considerar apenas os custos *variáveis*, assumidos proporcionais ao volume da transação.
2. *Bid/ask spread*, que é a diferença entre o preço de compra e o preço de venda. Assumimos que as transações sejam efetuadas sempre pelo “pior” preço, isto é, as compras são feitas pelo preço *ask* e as vendas pelo preço *bid*.
3. *Impacto de mercado incremental*, que é o efeito que o tamanho da transação tem no preço de mercado. A idéia aqui é que o volume negociado influencia o preço de mercado na direção da transação iniciadora. Isto é, se a transação é de compra, o preço de mercado aumenta; se a transação é de venda, o preço de mercado diminui.

Chamamos os dois primeiros custos de custo de *execução*. A figura 1 abaixo ilustra esquematicamente o efeito do *bid/ask spread* e do impacto de mercado no preço final do ativo, para uma transação de compra.

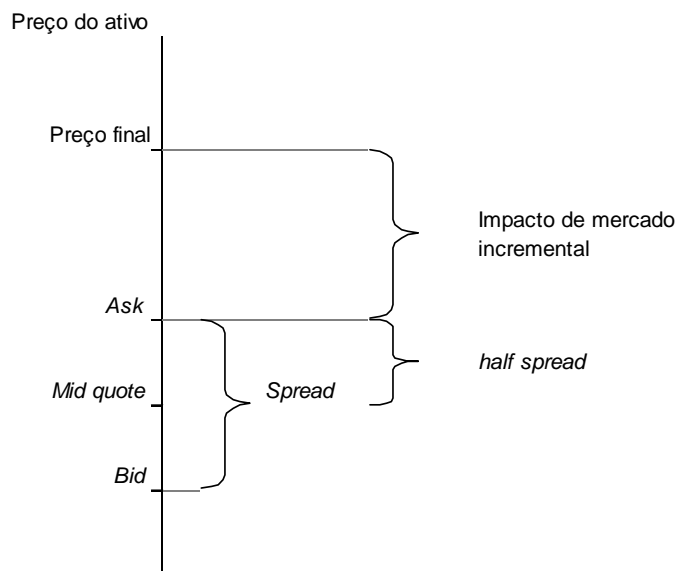


Figura 1
Efeito do *bid/ask spread* e do impacto incremental de mercado em uma operação de compra (Torre, 1997)

A incorporação dos custos de transação nos modelos de otimização de alocação é menos uniforme de que a própria definição dos custos. Mulvey (1993), por exemplo, propõe a especificação de uma rede na qual a mudança da posição atual para uma nova posição é representada por fluxos entre nós passando pelo nó de caixa. Apesar dessa representação do problema, uma função-objetivo para otimização não foi proposta. Programas explícitos de otimização foram propostos, entre outros, por Lobo et alii (2002), Bertsimas et alii (1999) e Mitchell e Braun (2002). Estes autores consideram somente custos de transação fixos e variáveis diretos, mas usam abordagens diferentes para incorporá-los na otimização de carteiras.

Lobo et alii (2002) usam valores absolutos aplicados (ao invés de pesos relativos) e pressupõem que o valor total transacionado mais os custos da transação devam somar 0. Esta hipótese entra como restrição na otimização. Por causa dos custos fixos o problema fica não-linear, o que dificulta a otimização. Mas, já que o problema ainda é convexo, os autores usam primeiro uma otimização não-linear que resulta numa solução exata, mas demorada. Para contornar o problema de desempenho do algoritmo, eles propõem também usar uma aproximação, resultando provalmente em soluções sub-ótimas. Nesta heurística usa-se uma função de custos ajustada e um algoritmo recursivo, que tem uma certa semelhança com a nossa proposta de implementação da subseção 2.4. Mitchell e Braun (2002) evitam restrições fixas para manter uma função-objetivo quadrática com restrições somente lineares. Num primeiro passo, equivalente às outras propostas, eles in-

corporam os custos nas restrições. Depois, eles mudam a função-objetivo para levar em conta que o valor total será diminuído pelos custos, já que o programa é em valores absolutos. Assim, a (co-) variância será ajustada. Com a nova função-objetivo obtém-se um programa quadrático fracional, que pode ser resolvido de forma eficiente após uma renomeação das variáveis. Os autores observam que uma alternativa de ajuste seria diminuir os retornos esperados. Mitchell e Braun (2002) mencionam também que, implicitamente, é assumido que (igual às outras abordagens) a realização dos custos acontece no final do período. Se os custos fossem incorporados no início do período, seria necessário um ajuste dos pesos por causa da perda do valor da carteira. Este ajuste nenhum dos autores faz.

No presente artigo, ao contrário dos artigos citados, incorporamos os custos incorridos na data inicial e na data final. Além disso, permitimos custos indiretos não-lineares causados pelo impacto no mercado da transação efetuada. Como explicamos na próxima seção, na nossa proposta tudo se passa como se os retornos esperados dos ativos fossem alterados pelas transações: na compra os retornos diminuem e na venda os retornos aumentam. O efeito disso no otimizador é gerar uma “inércia” em torno da carteira atual, pois ao tentar vender um ativo, seu retorno aumenta, o que o torna mais atrativo para o modelo; ao tentar comprar um ativo, seu retorno diminui, o que o torna menos atrativo.

No que se segue, vamos primeiro desenvolver as fórmulas para ajustar os retornos esperados dos ativos sob consideração. Neste passo chegaremos a uma recursão a ser resolvida, porque cada decisão de alocação cria custos de transação diferentes. A seção 3 se dedica a propor um algoritmo que aproxima a solução ótima do problema. Finalmente, na seção 4 desenvolvemos um exemplo para o mercado brasileiro.

2. Incorporação do custo de transação

O efeito prático dos custos de transação na data inicial é que as quantidades transacionadas são diferentes das quantidades teóricas (menores na compra, e maiores na venda). Ao final da transação o preço volta ao preço de mercado anterior (*mid-quote*), o que resulta em uma perda imediata à transação. Isso implica em que *o valor da carteira após a transação é menor que o valor da carteira antes da transação*. Além disso, vamos assumir que o impacto de mercado incremental produza uma mudança no preço médio de mercado, causando impacto *não apenas no valor transacionado, mas também em todo o estoque*, afetando assim o valor total da carteira. Em suma, ao comprar (vender) um ativo paga-se mais (recebe-se menos) do que o valor teórico usando o preço médio (*mid-quote*).

Para um melhor entendimento do desenvolvimento, propomos usar as seguintes notações, nas quais usamos o índice i para destacar os ativos, $i = 1, 2, \dots, n$, e a estrela (*) para variáveis vigentes após a transação. A data inicial é t_0 e a data horizonte da aplicação é $t_h > t_0$.

Para analisar o preço pelo qual será transacionado a mudança da carteira, introduzimos:

$$\begin{aligned}
\Delta p_i^{ba}(t_0) &= \text{half-spread do ativo } i \text{ em } t_0 \\
&\quad \Delta p_i^{ba}(t_0) \text{ é positivo para compras} \\
&\quad \text{e negativo para vendas;} \\
\Delta p_i^{mi}(t_0) &= \text{impacto de mercado incremental no preço do ativo, } i \\
&\quad \text{e, } t_0 \Delta p_i^{mi}(t_0) \text{ é positivo para compras} \\
&\quad \text{e negativo para vendas;} \\
p_i(t_0) &= \text{preço de mercado do ativo } i \text{ (mid-quote) em } t_0; \\
p_i(t_h) &= \text{preço de mercado do ativo } i \text{ (mid-quote) em } t_h.
\end{aligned}$$

A diferença entre os preços de compra e venda (o *spread*) é dada por

$$\begin{aligned}
s_i(t_0) &= \text{spread de preço do ativo } i \text{ (diferença entre os preços} \\
&\quad \text{ask e bid) em } t_0; \\
s_i(t_h) &= \text{spread de preço do ativo } i \text{ em } t_h.
\end{aligned}$$

As quantidades de cada ativo i que serão transacionadas são

$$\begin{aligned}
q_i(t_0) &= \text{quantidade do ativo } i \text{ na carteira em } t_0, \text{ antes da transação;} \\
q_i^*(t_0) &= \text{quantidade do ativo } i \text{ na carteira após a transação.}
\end{aligned}$$

Com os preços e as quantidades criam-se os valores da carteira:

$$\begin{aligned}
V(t_0) &= \text{valor da carteira em } t_0, \text{ antes das transações;} \\
V^*(t_0) &= \text{valor da carteira em } t_0, \text{ após as transações.}
\end{aligned}$$

Os custos de transação enfrentados, podem ser vistos como acréscimos nos preços, cujas mudanças relativas serão dadas por

$$\begin{aligned}
\eta_i(t_0) &= \frac{\Delta p_i^{ba}(t_0)}{p_i(t_0)} = \text{acrécimo percentual no preço devido} \\
&\quad \text{ao half-spread em } t_0; \\
\eta_i(t_h) &= \frac{\Delta p_i^{ba}(t_h)}{p_i(t_h)} = \text{acrécimo percentual no preço devido} \\
&\quad \text{ao half-spread em } t_h; \\
\zeta_i(t_0) &= \frac{\Delta p_i^{mi}(t_0)}{p_i(t_0)} = \text{acrécimo percentual no preço devido} \\
&\quad \text{ao impacto de mercado em } t_0; \\
\zeta_i(t_h) &= \frac{\Delta p_i^{mi}(t_h)}{p_i(t_h)} = \text{acrécimo percentual no preço devido} \\
&\quad \text{ao impacto de mercado em } t_h.
\end{aligned}$$

Finalmente, a decisão de alocação será tomada em pesos relativos que são

$$\begin{aligned}
w_i(t_0) &= \text{proporção alocada ao ativo } i, \text{ antes das transações;} \\
w_i^*(t_0) &= \text{proporção alocada ao ativo } i \text{ na data inicial} \\
&\quad \text{após as transações.}
\end{aligned}$$

Combinando os ativos, o valor da carteira antes das transações é dado por

$$V(t_0) = \sum_{i=1}^n q_i(t_0) p_i(t_0), \quad (1)$$

e as quantidades iniciais podem ser obtidas das proporções iniciais através de

$$q_i(t_0) = \frac{V(t_0) w_i(t_0)}{p_i(t_0)}. \quad (2)$$

Após as transações vamos assumir que o valor da carteira $V(t_0)$ inicial seja reduzido pelo custo total $C = \gamma V(t_0)$, onde γ é uma fração do valor da carteira antes das transações $V(t_0)$. Assim, o valor total da carteira após a transação será diminuído para

$$V^*(t_0) = V(t_0) \cdot (1 - \gamma). \quad (3)$$

Vamos assumir que ao final das operações o preço de mercado de cada ativo i tenha se alterado para o preço de mercado inicial mais o impacto de mercado incremental, $p_i(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0)$. Note que o novo preço do mercado diverge do preço transacionado, pois o investidor é exposto ao *bid/ask spread* $p_i(t_0) + \Delta p_i^{ba}(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0)$. Sabemos, do outro lado, que o valor final da carteira pode ser expresso pelo somatório das quantidades finais vezes o preço de mercado (após transações). Assim, podemos deduzir a quantidade final alocada a cada ativo a partir de sua alocação na carteira (marcada a mercado):

$$q_i^*(t_0) = \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0)} = \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) \cdot (1 + \zeta_i(t_0))}. \quad (4)$$

A mudança na carteira pode ser expressa em quantidade de cada ativo usando os pesos decididos

$$\Delta q_i(t_0) = q_i^*(t_0) - q_i(t_0) = \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) \cdot (1 + \zeta_i(t_0))} - \frac{V(t_0) \cdot w_i(t_0)}{p_i(t_0)}. \quad (5)$$

2.1 Efeito no retorno esperado

Para cálculo do retorno esperado na data do horizonte de investimento t_h vamos assumir que a carteira seja desfeita naquela data ao preço de mercado vigente, e inicialmente vamos assumir também que não haja impacto de custos de transação.¹ Nestas circunstâncias o retorno esperado do ativo i pode ser calculado por:

$$\mu_i = \frac{p_i(t_h)}{p_i(t_0)} - 1. \quad (6)$$

O retorno esperado da carteira, sem custos de transação na data t_h , mas com custos na data t_0 , pode ser calculado por:

¹ Isso significa que todas as posições, incluindo o estoque, serão liquidadas e se transformarão em caixa na data t_h .

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \frac{V^*(t_h)}{V(t_0)} - 1 \\
&= \frac{1}{V(t_0)} \sum_{i=1}^n q_i^*(t_0) \cdot p_i(t_h) - 1 \\
&= \frac{1}{V(t_0)} \sum_{i=1}^n \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) (1 + \zeta_i(t_0))} p_i(t_0) \cdot (1 + \mu_i) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \gamma) (1 + \mu_i)}{(1 + \zeta_i(t_0))} w_i^*(t_0) - \sum_{i=1}^n w_i^*(t_0) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(1 - \gamma) (1 + \mu_i)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - 1 \right) w_i^*(t_0).
\end{aligned}$$

Em resumo, o retorno da carteira com custos de transação na data inicial e sem custos no horizonte de investimento se escreve como

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(1 - \gamma) (1 + \mu_i)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - 1 \right) w_i^*(t_0) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu_i^* w_i^*(t_0),
\end{aligned}$$

sendo que

$$\mu_i^* = \frac{(1 - \gamma) (1 + \mu_i)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - 1. \quad (7)$$

é o retorno esperado incluindo os custos de transação da data inicial t_0 .

Além do custo de transação na data de decisão, podemos levar em conta também o custo de liquidar a carteira em t_h . A princípio, os custos afetam o valor da carteira de uma maneira equivalente aos custos ocorridos na data inicial t_0 . Para valores no horizonte usamos duas estrelas (**) para indicar que foram incorporados custos de transação no horizonte, além dos custos na data inicial. O valor total da carteira em t_h é dado pela soma dos produtos das quantidades totais (todo o estoque), com os preços obtidos em t_h após a ocorrência dos custos de transação, subtraindo o custo de processamento das operações, assumido proporcional aos valores transacionados (α_i):

$$\begin{aligned}
V^{**}(t_h) &= \sum_{i=1}^n \left\{ q_i^*(t_0) (p_i(t_h) + \Delta p_i^{ba}(t_h) + \Delta p_i^{mi}(t_h)) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_i |q_i^*(t_0) (p_i(t_h) + \Delta p_i^{ba}(t_h) + \Delta p_i^{mi}(t_h))| \right\}.
\end{aligned}$$

Substituindo mais uma vez $q_i^*(t_0)$ por (4), podemos derivar

$$\begin{aligned}
 V^{**}(t_h) &= \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) \cdot (1 + \zeta_i(t_0))} p_i(t_h) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h)) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_i \left| \frac{V(t_0) (1 - \gamma) w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) \cdot (1 + \zeta_i(t_0))} p_i(t_h) \cdot (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h)) \right| \right\} \\
 &= V(t_0) \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} w_i^*(t_0) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_i \left| \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} w_i^*(t_0) \right| \right\} \\
 &= V(t_0) \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (w_i^*(t_0) - \alpha_i |w_i^*(t_0)|) \right\} \\
 &= V(t_0) \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1 - \alpha_i \cdot \text{sign}(w_i^*(t_0))) w_i^*(t_0) \right\},
 \end{aligned}$$

sendo que

$$\eta_i(t_h) = \frac{1}{2} \frac{s_i(t_h)}{p_i(t_h)} \text{sign}(-w_i^*(t_0)), \quad (8)$$

$$\zeta_i(t_h) = \theta_i |w_i^*(t_0)|^\beta \text{sign}(-w_i^*(t_0)). \quad (9)$$

Portanto, o retorno esperado da carteira com custos de transação na data inicial e na data do horizonte de investimento pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
 \mu^{**} &= \frac{V^{**}(t_h)}{V(t_0)} - 1 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} \right\} \\
 &\quad (1 - \alpha_i \cdot \text{sign}(w_i^*(t_0))) w_i^*(t_0) - \sum_{i=1}^n w_i^*(t_0) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 + \mu_i) (1 - \gamma) (1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1 - \alpha_i \cdot \text{sign}(w_i^*(t_0))) - 1 \right\} w_i^*(t_0) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu_i^{**} w_i^*(t_0),
 \end{aligned}$$

com a definição do retorno individual após custos de transação na data inicial e final.

$$\mu_i^{**} = \left\{ \frac{(1 + \mu_i)(1 - \gamma)(1 + \eta_i(t_h) + \zeta_i(t_h))}{(1 + \zeta_i(t_0))} \right\} (1 - \alpha_i \text{sign}(w_i^*(t_0))) - 1. \quad (10)$$

Desta forma, o efeito final dos diferentes custos de transação pode ser incorporado ao retorno esperado de cada ativo (eq. 7 ou eq. 10). O retorno esperado da carteira pode então ser calculado da maneira usual $w' \mu^*$, para o caso de não haver custos no horizonte, ou $w' \mu^{**}$, para o caso de haver custos na data do horizonte. Como estes retornos esperados dependem da própria solução ótima w^* , é necessário utilizar algum procedimento iterativo de solução.

Para podermos ajustar os retornos individuais $\{\mu_i\}_{i=1,\dots,n}$ pelas fórmulas (7) ou (10) precisamos determinar os parâmetros $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$, $\{\zeta_i\}_{i=1,\dots,n}$ e γ . Os custos de execução, em geral, são observáveis no mercado. Para o custo de impacto no mercado precisamos uma forma funcional, cuja escolha será dada na subseção 2.3. Para determinar o parâmetro do custo total γ propomos uma abordagem recursiva na próxima seção.

2.2 Especificação dos custos de execução

Vamos assumir que os custos de processamento do ativo i sejam proporcionais (α_i) ao preço final do ativo transacionado (isto é, incluindo o efeito do *bid/ask spread* e do impacto de mercado). Como já mencionado, os custos fixos por transação são ignorados para evitar o uso de funções de escada. Portanto, o custo total do ativo i pode ser calculado como a soma do custo de processamento e da perda no preço causada pela marcação-a-mercado da operação ao final da transação.² O custo se compõe pelo *bid/ask spread* por unidade transacionada $|\Delta q_i(t_0)| |\Delta p_i^{ba}(t_0)|$ mais o custo variável por ativo, α_i , aplicado ao preço transacionado

$$|\Delta q_i(t_0)| \cdot \alpha_i (p_i(t_0) + \Delta p_i^{ba}(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0)).$$

Podemos formular os custos individuais de execução usando (5) da seguinte maneira:

²A “perda” deve ser vista de forma relativa ao preço atual: na compra, por exemplo, a perda é causada pelo fato do preço de compra ficar acima do preço médio.

$$\begin{aligned}
 C_i(t_0) &= |\Delta q_i(t_0)| [\alpha_i (p_i(t_0) + \Delta p_i^{ba}(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0)) + |\Delta p_i^{ba}(t_0)|] \\
 &= \left| \frac{V(t_0) \cdot (1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{p_i(t_0) \cdot (1 + \zeta_i(t_0))} - \frac{V(t_0) \cdot w_i(t_0)}{p_i(t_0)} \right| \\
 &\quad \cdot \{\alpha_i \cdot p_i(t_0) \cdot (1 + \eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) + p_i(t_0) |\eta_i(t_0)|\} \\
 &= V(t_0) \cdot \left| \frac{(1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \\
 &\quad \cdot \{\alpha_i \cdot (1 + \eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) + |\eta_i(t_0)|\}.
 \end{aligned}$$

Usando s_i , o *spread* do mercado do ativo i , sabemos que o efeito no preço do *bid-ask spread* é dado por:

$$\begin{aligned}
 \eta_i(t_0) &= \frac{1}{2} \frac{s_i(t_0)}{p_i(t_0)} \cdot \text{sign}(\Delta q_i(t_0)) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{s_i(t_0)}{p_i(t_0)} \cdot \text{sign} \left(\frac{(1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, o custo total de processamento pode ser calculado por:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \tag{12}$$

$$= \sum_{i=1}^n V(t_0) \left| \frac{(1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \tag{13}$$

$$\cdot \{\alpha_i \cdot (1 + \eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) + |\eta_i(t_0)|\} \tag{14}$$

Como $C = \gamma \cdot V(t_0)$ podemos obter agora uma fórmula de recorrência para o cálculo do fator γ :

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \left| \frac{(1 - \gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1 + \zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \{\alpha_i \cdot (1 + \eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) + |\eta_i(t_0)|\} \tag{15}$$

Note que o fator γ aparece dentro do módulo, fazendo com que seja necessário utilizar algum método iterativo para solução desta equação, conhecidas as composições w e w^* .

2.3 Impacto de mercado

Segundo alguns autores (Grinold e Kahn, 1995, Torre, 1997, Lillo et alii, 2003) o impacto de mercado seria aproximadamente proporcional à raiz quadrada do

volume transacionado. Neste caso o impacto de mercado é dado por uma função não-linear

$$\zeta_i(t_0) = \frac{\Delta p_i^{mi}(t_0)}{p_i(t_0)} = f(\Delta q_i(t_0)).$$

Por exemplo, usa-se a seguinte especificação:

$$\begin{aligned} \zeta_i(t_0) &= \lambda_i^* \left(|\Delta q_i(t_0) \cdot (p_i(t_0) + \Delta p_i^{ba}(t_0) + \Delta p_i^{mi}(t_0))| \right)^\beta \\ &\quad \cdot \text{sign}(\Delta q_i(t_0)) \\ &= \lambda_i \left(V(t_0) \cdot \left| \frac{(1-\gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \cdot (1+\eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) \right)^\beta \\ &\quad \cdot \text{sign} \left(\frac{(1-\gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right) \end{aligned}$$

onde λ_i é uma constante de proporcionalidade dependente do ativo (potencialmente dependente da sua volatilidade, segundo Grinold e Kahn (1995)) ou da sua capitalização de mercado (Lillo et alii, 2003), e β é uma constante conhecida: 0.5, para Grinold e Kahn (1995), e entre 0.5 e 0.3, para Lillo et alii (2003).

Neste trabalho vamos adotar a seguinte versão para função de impacto

$$\begin{aligned} \zeta_i(t_0) &= \lambda_i \left(\frac{V(t_0)}{\bar{V}_i(t_0)} \left| \frac{(1-\gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \right)^\beta \quad (16) \\ &\quad \cdot \text{sign}(\Delta q_i(t_0)) \\ &= \theta_i \left(\left| \frac{(1-\gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right| \right)^\beta \\ &\quad \cdot \text{sign} \left(\frac{(1-\gamma) \cdot w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right) \end{aligned}$$

onde $\bar{V}_i(t_0)$ é o volume médio transacionado do ativo i e definimos

$$\theta_i := \lambda_i \cdot \left(\frac{V(t_0)}{\bar{V}_i(t_0)} \right)^\beta.$$

Evidentemente as constantes de proporcionalidade λ_i devem ser estimadas empiricamente através de algum procedimento econométrico, mas isto vai além das pretensões deste trabalho. Aqui vamos simplesmente assumir que elas sejam conhecidas e os valores usados na aplicação ao mercado brasileiro são relatados na tabela 1.

2.4 O modelo de otimização com custos de transação

O modelo final com impacto de custo de transação em t_0 e t_h pode ser sumari-
zando por

$$\max_{w^*(t_0)} \left\{ (w^*(t_0))' \mu^{**} - \frac{k}{2} (w^*(t_0))' \Sigma (w^*(t_0)) \right\} \quad (17)$$

sob as condições que vale para todos os $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{s.a.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i^*(t_0) = 1 \\ \mu_i^{**} = \left\{ \frac{(1+\mu_i)(1-\gamma)(1+\eta_i(t_h)+\zeta_i(t_h))}{(1+\zeta_i(t_0))} \right\} \\ \quad \cdot (1 - \alpha_i \cdot \text{sign}(w_i^*(t_0))) - 1 \\ \gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| \frac{(1-\gamma)w_i}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i^*(t_0) \right| \\ \quad \cdot \{ \alpha_i (1 + \eta_i(t_0) + \zeta_i(t_0)) + |\eta_i(t_0)| \} \\ \eta_i(t_0) = \frac{s_i(t_0)/p_i(t_0)}{2} \cdot \text{sign} \left(\frac{(1-\gamma)w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_i(t_0))} - w_i(t_0) \right) \\ \eta_i(t_h) = \frac{s_i(t_h)/p_i(t_h)}{2} \cdot \text{sign}(-w_i^*(t_0)) \\ \zeta_i(t_0) = \theta_i \left(\left| \frac{(1-\gamma)w_i}{(1+\zeta_{i,0})} - w_i(t_0) \right| \right)^\beta \cdot \text{sign} \left(\frac{(1-\gamma)w_i^*(t_0)}{(1+\zeta_{i,0})} - w_i(t_0) \right) \\ \zeta_i(t_h) = \theta_i |w_i^*(t_0)|^\beta \cdot \text{sign}(-w_i^*(t_0)) \\ w_{i,l} \leq w_i^*(t_0) \leq w_{i,u} \end{array} \right. \quad (18)$$

Este problema deve ser resolvido numericamente através de procedimentos de busca com função objetivo não linear (não é quadrática, já que os μ_i^* dependem da solução $w_i^*(t_0)$), com restrições não lineares. Problemas deste tipo são notoriamente difíceis de serem resolvidos, por isso vamos propor na próxima seção um procedimento iterativo que utiliza os modelos de programação quadrática usual.

3. Um Algoritmo Iterativo para Aproximar a Carteira Ótima com Custos de Transação

Nesta seção propomos um algoritmo que pode ser usado para aproximar a solução ótima do problema (17 e 18). O objetivo é evitar a programação não-linear utilizando apenas a programação quadrática. Obviamente, a otimalidade não pode ser garantida, mas observamos nos exemplos práticos que chegamos bem perto como veremos na seção 4. Achamos importante lembrar que, posto a complexidade e configuração do problema, não deve ser surpresa que possam existir diversas composições ótimas.

Justificamos a convergência do algoritmo para o caso da inexistência de restrições na subseção 3.2. Porém, fica em aberto uma prova para o caso geral que inclui restrições de igualdade e desigualdade.

3.1 A formulação do algoritmo

O procedimento de otimização com custos de transação é uma forma de uma busca para a composição ótima que segue uma execução recursiva de um programa de otimização de média-variância:

1. Obter a solução ótima inicial ($j = 0$) sem custos de transação $w(t_0)$.
2. $j = j + 1$.
3. Calcular os seguintes fatores para cada ativo i :
 - $\eta_i(t_0)$ pela equação (11).
 - $\zeta_i(t_0)$ pela equação (18).
 - γ pela equação (15).
 - $\eta_i(t_h)$ pela equação (8).
 - $\zeta_i(t_h)$ pela equação (9).
 - μ_i^{**} pela equação (7), caso se deseje considerar apenas os custos na “entrada” (data inicial), ou pela equação (10), caso se deseje considerar os custos na “entrada” e na “saída” (no horizonte de investimentos).
4. Rodar o seguinte modelo de programação quadrática:

$$\begin{aligned} & \max_{w_{(j)}} (w^*(t_0))'_{(j)} \mu^{**} - \frac{k}{2} (w^*(t_0))'_{(j)} \Sigma (w^*(t_0))_{(j)} \\ & \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n (w_i^*(t_0))_{(j)} = 1, \\ w_{i,l} \leq (w_i^*(t_0))_{(j)} \leq w_{i,u} \quad , i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Repetir os passos 2 a 5, até convergência da solução ótima $w^*(t_0)$, em alguma medida, por exemplo até que $\|w_{(j)}^*(t_0) - w_{(j-1)}^*(t_0)\| \leq \varepsilon$.

3.2 Análise da convergência do ajuste pelo custo de transação

Assumimos que o retorno relativo inicial é dado por $\mu = \mu_{(0)} = \{\mu_{(0)}\}_{i=1,\dots,n}$. A posição atual é dada por $w_{(0)} = \{w_{i,(0)}\}_{i=1,\dots,n}$. Após otimização das posições foi decidido mudar a posição atual para uma nova posição $w_{(j)} = \{w_{i,(j)}\}_{i=1,\dots,n}$, onde j indica o passo da otimização. A nova posição implica no custo de transação $C(\Delta w_{(j)})$. Assim, o retorno realizado após custo de transação será

$$\mu_{(j)} = \mu_{(j-1)} - C(w_{(j)} - w_{(0)}).$$

No caso mais simples sem restrições na otimização, temos que

$$w_{(j)} = \arg \max_w \left\{ w' \mu_{(j-1)} - \frac{k}{2} w' \Sigma w \right\}$$

e surge

$$w_{(j)} = \mu_{(j-1)} \cdot \Sigma^{-1} k.$$

Para mostrar que o ajuste do retorno esperado pelo custo de transação é um algoritmo convergente, é suficiente provar que a função do retorno ajustado é um mapeamento contraente no espaço original, i.e., para $n < \infty$ vale que

$$\begin{aligned} f^{\text{Adj}} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \|f^{\text{Adj}}(\mu_{(j)}) - f^{\text{Adj}}(\mu_{(j-1)})\| &\leq C(\Delta w_{(j)}) \|\mu_{(j)} - \mu_{(j-1)}\|, \\ C(\Delta w_{(j)}) &< 1, \\ \mu_{(j)}, \mu_{(j-1)} &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A função do retorno ajustado é dada pela seguinte seqüência:

$$\begin{aligned} \mu_{(1)} &= f^{\text{Adj}}(\mu_{(0)}), \\ \mu_{(j)} &= f^{\text{Adj}}(\mu_{(j-1)}) \\ &= \mu_{(j-1)} - C(w_{(j)} - w_{(0)}) \\ &= \mu_{(j-1)} - C(\mu_{(j-1)} \cdot \Sigma^{-1} k - w_{(0)}) \\ &= (1 - \tilde{C}(\Delta w_{(j)})) \cdot \mu_{(j-1)} - w_{(0)}. \end{aligned}$$

Segue que f^{Adj} é um contrator:

$$\begin{aligned} &\|f^{\text{Adj}}(\mu_{(j)}) - f^{\text{Adj}}(\mu_{(j-1)})\| \\ &= \left\| (1 - \tilde{C}(\Delta w_{(j)})) \cdot \right. \\ &\quad \left. \mu_{(j-1)} - w_{(0)} - (1 - \tilde{C}(\Delta w_{(j)})) \cdot \mu_{(j-2)} + w_{(0)} \right\| \\ &= (1 - \tilde{C}(\Delta w_{(j)})) \cdot \|\mu_{(j-1)} - \mu_{(j-2)}\| \\ &\leq c \cdot \|\mu_{(j-1)} - \mu_{(j-2)}\|, \end{aligned}$$

e com $c \in [0, 1)$ se $\tilde{C}(\Delta w_{(j)}) \geq 0$ aplica-se o teorema de Banach que constata que f^{Adj} tem um ponto fixo. Observa-se que o caso que $\tilde{C}(\Delta w_{(j)}) = 0$ eliminaria o uso do teorema de Banach, mas, neste caso, também não teríamos custos de transação.³

³Para uma explicação elementar dos conceitos de análise usados, refere-se, por exemplo, a Kreyszig (1989).

Segue também uma estimativa do erro da iteração:

$$\|f^{\text{Adj}}(\mu_{(j)}) - f^{\text{Adj}}(\mu_{(j-1)})\| \leq \left(1 - \tilde{C}(\Delta w_{(j)})\right)^{j-1} \cdot \|\mu_{(1)} - \mu_{(0)}\|.$$

4. Exemplo dos Impactos dos Custos de Transação no Mercado Brasileiro

4.1 Descrição dos dados de mercado

Consideramos como exemplo o cenário hipotético na data 08 de Julho 2004 com horizonte de aplicação de 30 de Novembro de 2004 relatado na tabela A.1, junto com a matriz de correlação observada na tabela 5 no apêndice. Todos os valores são em moeda Selic. Os ativos são

Pré i	Vértice de taxa de juros pré-fixada com as maturidades 1=3,1 meses; 2=9,3 meses; 3=21 meses
Pós dólar i	Vértices de taxa de juros pós-fixada em PTAX com 1=9,3 meses; 2=21 meses; 3=33 meses
Pós IGP-M i	Vértice de taxa de juros pós-fixada em IGP-M com 1=9,3 meses; 2=21 meses; 3=45 meses; 4=69 meses
LFT i	Letras do Tesouro Nacional (pós-fixados em Selic) com 1=9,3 meses; 2=21 meses; 3=45 meses
Global 40	Título de dívida Brasileira externa - Global 2040

A fim de efetuar testes com o modelo proposto, definimos os parâmetros α (custo direto de processamento), $\frac{s(t_0)}{p(t_0)}$ (relação *bid-ask spread*/preço) e θ (impacto de mercado) com os valores ilustrados na tabela 1. Observamos na tabela A.1 que o ativo com maior risco é a bolsa (IBOVESPA), mas os custos de transação para este ativo também são os mais altos, segundo a tabela 1.

O impacto de mercado foi calculado de forma simplificada usando

$$\begin{aligned} \theta_i &= \lambda_i \cdot \left(\frac{V(t_0)}{\bar{V}_i(t_0)} \right)^\beta \\ &= \phi \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{252}} \cdot \left(\left| \frac{V(t_0)}{\bar{V}_i(t_0)} \right| \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

com σ_i o desvio-padrão ao ano do ativo i e $\phi = 0.5$ um fator multiplicativo que deveria ser estimado por ativo. Observamos na tabela 1 que o mercado de ativos de renda fixa pré-fixados e pós-fixados em dólar são bastante líquidos devido ao alto volume negociado em mercados futuros. Entretanto, para os mercados de renda fixa pós-fixados em IGP-M o impacto de mercado é maior, pois o volume do mercado secundário de títulos é pequeno e não existem mercados futuros.

Tabela 1Custo relativo (ao preço) dos diferentes ativos: direto (α), *bid/ask spread* ($s(t_0)/p(t_0)$) e impacto mercado (θ)

Vértice		Custo de Corretagem	Impacto Mercado	Bid-Ask Spread
1	SELIC	0,000%	0,000%	0,000%
2	Cambial swapada	0,100%	0,000%	0,194%
3	Ptax	0,100%	0,007%	0,379%
4	Euro	0,100%	0,006%	0,545%
5	Pré 1	0,100%	0,003%	0,012%
6	Pré 2	0,100%	0,006%	0,042%
7	Pré 3	0,100%	0,000%	0,168%
8	Bolsa	0,550%	0,280%	0,412%
9	Pós dólar 1	0,100%	0,005%	0,408%
10	Pós dólar 2	0,100%	0,001%	0,417%
11	Pós dólar 3	0,100%	0,003%	0,436%
12	Pós IGP-M 1	0,100%	0,234%	0,059%
13	Pós IGP-M 2	0,100%	0,176%	0,092%
14	Pós IGP-M 3	0,100%	0,258%	0,455%
15	Pós IGP-M 4	0,100%	0,897%	0,375%
16	LFT 1	0,100%	0,000%	0,023%
17	LFT 2	0,100%	0,001%	0,076%
18	LFT 3	0,100%	0,004%	0,282%
19	Global 40	0,100%	0,000%	0,832%

4.2 Discussão dos resultados

Num primeiro passo, otimizamos as composições das carteiras sem considerar os custos de transação. Na figura 2, plotamos as carteiras ótimas usando retorno esperado original (sem custos de transação), o retorno esperado incluindo custos em t_0 , e o retorno esperado incluindo custos em t_0 e t_h .

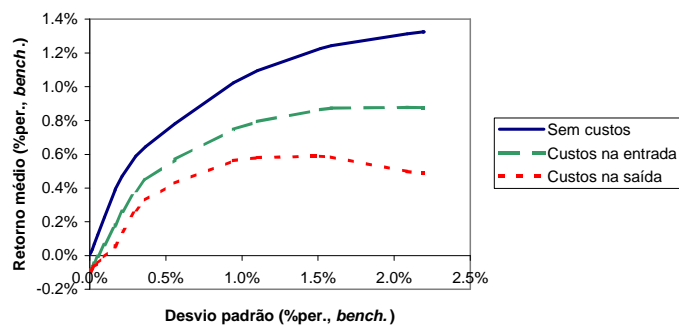
**Figura 2**

Diagrama retorno médio x desvio padrão, ilustrando o efeito dos custos de transação na “entrada” (data inicial) e na “saída” (horizonte de investimento)

A seguir rodamos o procedimento de otimização para as seguintes alternativas:

- sem custos de transação;
- com custos de transação somente na “entrada”(data inicial);
- com custos de otimização na “entrada”e na “saída”(horizonte de investimento).

Os resultados foram plotados na figura 3, considerando o retorno médio após custos de transação na entrada e na saída.

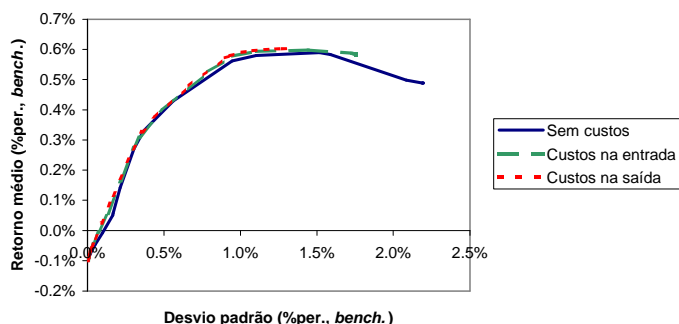


Figura 3

Carteiras *otimizadas* sem custo, com custo na “entrada” e com custo na “saída”, mas plotadas no diagrama de retorno médio *após* custos na “entrada” e na “saída” x desvio padrão

As tabelas A.3, A.4, A.5 e A.6 no apêndice ilustram as diferentes composições das carteiras ótimas obtidas nas três rodadas, para as carteiras de máximo índice de Sharpe e para as carteiras de máxima utilidade esperada com coeficientes de aversão relativo ao risco de 500, 50 e 5, respectivamente. A escolha dos parâmetros é feita para gerar carteiras ao longo de toda a fronteira eficiente. Quanto menor o coeficiente, tanto maior o apetite pelo risco do investidor.

Comparando as fronteiras eficientes com e sem custos de transação, observamos que a fronteira eficiente após custos de transação desvia-se mais da fronteira sem custos de transação na região de maior risco. A figura 3 visualiza este efeito cujos dados são mostrados nas tabelas A.3, A.4, A.5 e A.6.

Além de comparar as curvas com e sem custos de transação, é importante investigar as diferenças das curvas com custo de transação geradas a partir do algoritmo de aproximação e da otimização não-linear.⁴ Como esperado, parece que o problema tem diversos pontos ótimos ou, ao menos, pontos ótimos próximos: Na figura 4 e na tabela comparativa 6 no anexo pode-se observar que as fronteiras

⁴No nosso caso aplicamos a função “*fmincon*” do programa MATLAB.

com custos na entrada, criadas a partir dos dois métodos estão bem perto. Somente na região de menos aversão ao risco, a fronteira criada com a otimização não-linear consegue dominar a solução aproximada. É natural que a composição ótima seja melhor que a solução aproximada. Mas, é importante ressaltar que (no nosso caso) a partir de uma aversão ao risco menor que 200 os valores de risco e retorno estão próximos, enquanto as composições divergem de maneira não negligenciável. Achamos importante pesquisar em futuros trabalhos esta proximidade (em termos de pares risco-retorno) de composições diferentes, pois surgem algumas perguntas interessantes:

- Tendo em vista que os pesos por ativos não são necessariamente monótonos no nível de aversão ao risco⁵, talvez seja do interesse do investidor nem sempre seguir exatamente a composição proposta pelo otimizador não-linear.
- Como podem ser melhor analisadas as diferentes composições alternativas que criam pares de risco-retorno parecidos?
- Qual a estabilidade das composições ao longo da fronteira, levando em consideração os erros de estimação nos parâmetros das distribuições?⁶

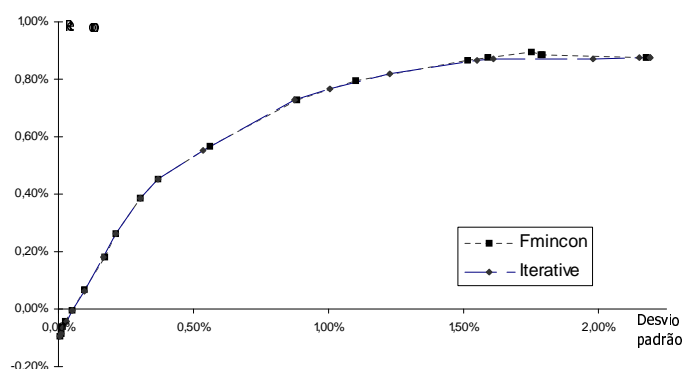


Figura 4
Comparação das fronteiras criadas por *fmincon* e o algoritmo iterativo

⁵ Isso significa que a quantidade alocada num ativo pode diminuir com a aversão ao risco num certo ponto na fronteira, e mais tarde ela volta a crescer. Este efeito não é possível numa fronteira eficiente sem custos de transação.

⁶ Vide Zimmer e Niederhauser (2004) para algumas alternativas como tratar os erros de estimação na criação de uma fronteira eficiente.

5. Conclusão

Neste artigo desenvolvemos uma possível formulação de programação matemática para o problema da alocação de média-variância de um estágio (unitemporal) com custos de transação. Os custos de transação foram divididos em:

- Custos (variáveis) de processamento,
- *Bid/ask spread*,
- Impacto de mercado incremental.

Assumimos aqui que os custos de processamento e o *bid/ask spread* causem uma perda imediata no valor da carteira mas não causem mudança no preço de mercado, enquanto que o impacto de mercado incremental cause uma mudança no preço de mercado e portanto em todo o estoque.

Sugerimos que o modelo seja rodado apenas com os custos de transação na “entrada”, isto é, na data inicial. O motivo é que na prática o modelo possui um horizonte de investimento muito mais longo do que o período de reprogramação (período entre rodadas do modelo para rebalanceamento da carteira). Ou seja, na realidade o modelo é usado miopicamente como solução do problema intertemporal do agente. Assim, ao rodar a carteira ao longo do caminho, não se desfaz inicialmente a carteira para em seguida formar uma nova carteira ótima; apenas uma parcela da carteira é vendida ou comprada em cada rebalanceamento. Mas o modelo com custos na “saída” assume que toda a carteira é desfeita, causando assim uma superestimação dos custos de transação. Parece-nos, portanto, que o modelo com custos na entrada representa melhor o processo de gestão utilizado na prática.

Para futuras pesquisas sugerimos testes mais amplos com diferentes números de ativos a fim de avaliar o desempenho do procedimento aqui proposto em relação a um algoritmo de programação não linear com restrições não lineares. Na pequena amostra utilizada, o tempo de processamento do modelo não linear foi menor do que o tempo de processamento do procedimento de programação quadrática iterativo.⁷ Porém, em amostras grandes, os problemas de convergência dos algoritmos de otimização não-linear podem ser críticos e vale a pena comparar os resultados com as aplicações geradas pela aproximação.

Finalmente, propomos que seja feito um estudo sobre as características das composições propostas pelos otimizadores, pois, como mencionado, a ausência de monotonia é um fato pouco intuitivo para o gerenciamento de carteiras.

⁷O tempo de processamento para a fronteira inteira num PC com processador Intel Pentium IV com 1GB de RAM do algoritmo iterativo aqui proposto foi de 4,6s. Em comparação, o algoritmo de otimização não-linear *fmincon* do MATLAB demorou 3,6s.

Referências

- Bertsimas, D., Darnell, C., & Soucy, R. (1999). Portfolio construction through mixed integer programming. *Interfaces*, 29:49–66.
- Grinold, R. C. & Kahn, R. N. (1995). *Active Portfolio Management*. Irwin, Chicago.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, Canada.
- Lillo, F., Farmer, J. D., & Mantegna, R. N. (2003). Single curve collapse of the price impact function for the New York stock exchange. *Nature*, 421:129–130.
- Lobo, M. S., Fazel, M., & Boyd, S. (2002). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. Working paper. California Institute of Technology, California.
- Mitchell, J. E. & Braun, S. (2002). Rebalancing an investment portfolio in the presence of transaction costs. Working paper. Rensselaer Polytechnic Institute, New York.
- Mulvey, J. M. (1993). *Incorporating Transaction Costs in Models for Asset Allocation*. Cambridge University Press, Cambridge. pages 243–259.
- Torre, N. (1997). BARRA market impact model handbook. Technical report, BARRA Inc., Berkeley, CA.
- Zimmer, C. J. & Niederhauser, B. M. (2004). Determining an efficient frontier in a stochastic moments setting. *Revista Brasileira de Finanças*, 2(1):91–116.

Apêndice

Tabela A.1

Parâmetros para otimização média-variância das carteiras. Retorno e risco na moeda SELIC ao período. A medida de risco é o desvio-padrão

No.	Vértice	Retorno	Risco	Lim. Inf	Lim. Sup
1	SELIC	0,0%	0,0%	0%	100%
2	Cambial swapada	0,2%	1,6%	0%	100%
3	Ptax	-2,4%	5,1%	0%	100%
4	Euro	-3,0%	6,9%	0%	100%
5	Pré 1	0,6%	0,3%	0%	100%
6	Pré 2	0,8%	1,1%	0%	100%
7	Pré 3	0,0%	3,2%	0%	100%
8	Bolsa	0,4%	13,4%	0%	49%
9	Pós dólar 1	0,3%	4,4%	0%	100%
10	Pós dólar 2	1,2%	3,7%	0%	100%
11	Pós dólar 3	2,2%	4,2%	0%	100%
12	Pós IGP-M 1	1,4%	2,1%	0%	100%
13	Pós IGP-M 2	0,2%	1,9%	0%	100%
14	Pós IGP-M 3	0,6%	2,5%	0%	100%
15	Pós IGP-M 4	0,6%	3,5%	0%	100%
16	LFT 1	0,0%	0,0%	0%	100%
17	LFT 2	0,2%	0,2%	0%	100%
18	LFT 3	0,0%	0,9%	0%	100%
19	Global 40	-6,3%	8,9%	0%	10%

Tabela A.2
Matriz de correlações histórica entre os ativos

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	1	-0,22	0,17	0,24	0,44	0,51	0,29	-0,21	-0,08	0,13	-0,11	-0,08	0,05	0,06	0,26	0,26	0,28	0,26
3	-0,22	1	0,68	-0,20	-0,57	-0,60	-0,68	0,98	0,78	0,29	0,08	-0,01	0,01	-0,02	-0,37	-0,38	-0,36	-0,05
4	0,17	0,68	1	-0,09	-0,38	-0,40	-0,27	0,67	0,58	0,31	0,15	0,09	0,18	0,16	-0,10	-0,07	-0,10	0,20
5	0,24	-0,20	-0,09	1	0,60	0,36	0,27	-0,21	-0,21	-0,14	0,55	0,60	0,68	0,65	0,34	-0,27	-0,10	0,29
6	0,44	-0,57	-0,38	0,60	1	0,92	0,56	-0,54	-0,37	-0,08	0,00	0,03	0,21	0,25	0,60	0,36	0,42	0,39
7	0,51	-0,60	-0,40	0,36	0,92	1	0,63	-0,55	-0,29	0,07	-0,15	-0,13	0,02	0,06	0,57	0,56	0,47	0,45
8	0,29	-0,68	-0,27	0,27	0,56	0,63	1	-0,68	-0,45	-0,08	0,08	0,16	0,15	0,19	0,61	0,54	0,42	0,58
9	-0,21	0,98	0,67	-0,21	-0,54	-0,55	-0,68	1	0,85	0,41	0,10	0,00	-0,01	-0,04	-0,37	-0,34	-0,32	-0,02
10	-0,08	0,78	0,58	-0,21	-0,37	-0,29	-0,45	0,85	1	0,82	0,04	-0,05	-0,05	-0,07	-0,38	-0,10	-0,12	0,23
11	0,13	0,29	0,31	-0,14	-0,08	0,07	-0,08	0,41	0,82	1	-0,02	-0,08	-0,09	-0,10	-0,29	0,19	0,13	0,40
12	-0,11	0,08	0,15	0,55	0,00	-0,15	0,08	0,10	0,04	-0,02	1	0,91	0,74	0,72	0,10	-0,37	-0,34	0,18
13	-0,08	-0,01	0,09	0,60	0,03	-0,13	0,16	0,00	-0,05	-0,08	0,91	1	0,84	0,83	0,18	-0,37	-0,33	0,13
14	0,05	0,01	0,18	0,68	0,21	0,02	0,15	-0,01	-0,05	-0,09	0,74	0,84	1	0,99	0,22	-0,28	-0,29	0,21
15	0,06	-0,02	0,16	0,65	0,25	0,06	0,19	-0,04	-0,07	-0,10	0,72	0,83	0,99	1	0,27	-0,23	-0,22	0,22
16	0,26	-0,37	-0,10	0,34	0,60	0,57	0,61	-0,37	-0,38	-0,29	0,10	0,18	0,22	0,27	1	0,60	0,58	0,40
17	0,26	-0,38	-0,07	-0,27	0,36	0,56	0,54	-0,34	-0,10	0,19	-0,37	-0,37	-0,28	-0,23	0,60	1	0,74	0,47
18	0,28	-0,36	-0,10	-0,10	0,42	0,47	0,42	-0,32	-0,12	0,13	-0,34	-0,33	-0,29	-0,22	0,58	0,74	1	0,31
19	0,26	-0,05	0,20	0,29	0,39	0,45	0,58	-0,02	0,23	0,40	0,18	0,13	0,21	0,22	0,40	0,47	0,31	1

Tabela A.3

Carteiras ótimas de máximo índice de Sharpe para os modelos sem custo, com custo na entrada e com custo na “entrada” e na “saída”.

Ativo	Comp. atual	Composição sem custos	C/custos em t_0	C/custos em t_h
SELIC	47%	1%	0%	0%
Cambial swapada	0%	0%	0%	0%
Ptax	1%	0%	0%	0%
Euro	0%	0%	0%	0%
Pré 1	6%	54%	0%	0%
Pré 2	2%	0%	82%	91%
Pré 3	0%	0%	2%	2%
Bolsa	2%	0%	0%	0%
Pós dólar 1	0%	1%	0%	0%
Pós dólar 2	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 3	0%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 1	4%	0%	1%	1%
Pós IGP-M 2	3%	0%	2%	0%
Pós IGP-M 3	2%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 4	9%	0%	0%	0%
LFT 1	12%	0%	0%	0%
LFT 2	3%	44%	2%	0%
LFT 3	9%	0%	3%	3%
Global 40	0%	0%	8%	2%
	100%	100%	100%	100%
Retorno esperado				
Sem custos	0,16%	0,39%	0,56%	0,58%
Com custo entrada	0,16%	0,17%	0,40%	0,39%
Com custo entrada e saída	0,02%	0,05%	0,28%	0,28%
Risco				
Desvio padrão	0,62%	0,17%	0,30%	0,30%

Tabela A.4

Carteiras ótimas de máxima utilidade esperada com coeficiente de aversão relativo ao risco de 500 para os modelos sem custo, com custo na “entrada” e com custo na “entrada” e na “saída”

Ativo	Comp. atual	Composição sem custos	C/custos em t_0	C/custos em t_h
SELIC	47%	0%	0%	11%
Cambial swapada	0%	0%	0%	0%
Ptax	1%	0%	0%	0%
Euro	0%	0%	0%	0%
Pré 1	6%	87%	78%	77%
Pré 2	2%	0%	1%	2%
Pré 3	0%	0%	0%	0%
Bolsa	2%	0%	0%	0%
Pós dólar 1	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 2	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 3	0%	1%	1%	1%
Pós IGP-M 1	4%	0%	2%	0%
Pós IGP-M 2	3%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 3	2%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 4	9%	0%	0%	0%
LFT 1	12%	0%	4%	4%
LFT 2	3%	12%	7%	3%
LFT 3	9%	0%	7%	2%
Global 40	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%
Retorno esperado				
Sem custos	0,16%	0,55%	0,52%	0,49%
Com custo entrada	0,16%	0,34%	0,36%	0,32%
Com custo entrada e saída	0,02%	0,23%	0,24%	0,22%
Risco				
Desvio padrão	0,62%	0,27%	0,28%	0,25%

Tabela A.5

Carteiras ótimas de máxima utilidade esperada com coeficiente de aversão relativo ao risco de 50 para os modelos sem custo, com custo na “entrada” e com custo na “entrada” e na “saída”

Ativo	Comp. atual	Composição sem custos	C/custos em t_0	C/custos em t_h
SELIC	47%	0%	0%	0%
Cambial swapada	0%	0%	0%	0%
Ptax	1%	0%	0%	0%
Euro	0%	2%	1%	1%
Pré 1	6%	0%	14%	23%
Pré 2	2%	55%	53%	53%
Pré 3	0%	0%	0%	0%
Bolsa	2%	0%	0%	0%
Pós dólar 1	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 2	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 3	0%	5%	3%	2%
Pós IGP-M 1	4%	38%	29%	21%
Pós IGP-M 2	3%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 3	2%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 4	9%	0%	0%	0%
LFT 1	12%	0%	0%	0%
LFT 2	3%	0%	0%	0%
LFT 3	9%	0%	0%	0%
Global 40	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%
Retorno esperado				
Sem custos	0,16%	1,06%	0,97%	0,90%
Com custo entrada	0,16%	0,77%	0,72%	0,68%
Com custo entrada e saída	0,02%	0,57%	0,55%	0,52%
Risco				
Desvio padrão	0,62%	1,02%	0,86%	0,78%

Tabela A.6

Carteiras ótimas de máxima utilidade esperada com coeficiente de aversão relativo ao risco de 5 para os modelos sem custo, com custo na entrada e com custo na “entrada” e na “saída”

Ativo	Comp. atual	Composição sem custos	C/custos em t_0	C/custos em t_h
SELIC	47%	0%	0%	0%
Cambial swapada	0%	0%	0%	0%
Ptax	1%	0%	0%	0%
Euro	0%	1%	0%	0%
Pré 1	6%	0%	0%	6%
Pré 2	2%	0%	18%	49%
Pré 3	0%	0%	0%	0%
Bolsa	2%	5%	3%	0%
Pós dólar 1	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 2	0%	0%	0%	0%
Pós dólar 3	0%	2%	1%	0%
Pós IGP-M 1	4%	92%	75%	44%
Pós IGP-M 2	3%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 3	2%	0%	0%	0%
Pós IGP-M 4	9%	0%	3%	1%
LFT 1	12%	0%	0%	0%
LFT 2	3%	0%	0%	0%
LFT 3	9%	0%	0%	0%
Global 40	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%
Retorno esperado				
Sem custos	0,16%	1,32%	1,23%	1,06%
Com custo entrada	0,16%	0,88%	0,90%	0,80%
Com custo entrada e saída	0,02%	0,50%	0,59%	0,60%
Risco				
Desvio padrão	0,62%	2,11%	1,73%	1,10%

Tabela A.7
Comparação das composições, riscos e retornos das carteiras criadas pelo otimizador não-linear e pelo algoritmo iterativo considerando custos de transação na entrada

Ativo	Max. Sharpe		k = 500		k = 50		k = 5	
	Fmincon	Iterativo	Fmincon	Iterativo	Fmincon	Iterativo	Fmincon	Iterativo
SELIC	0%	0%	0%	11%	0%	0%	0%	0%
Euro	0%	1%	0%	0%	1%	2%	1%	2%
Pré 1	96%	96%	87%	77%	4%	4%	0%	0%
Pré 2	0%	0%	0%	2%	55%	57%	15%	14%
Bolsa	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	1%
Pós dólar 3	2%	2%	1%	1%	4%	5%	3%	5%
Pós IGP-M 1	0%	0%	0%	0%	36%	32%	79%	78%
LFT 1	0%	0%	0%	4%	0%	0%	0%	0%
LFT 2	2%	2%	12%	3%	0%	0%	0%	0%
LFT 3	0%	0%	0%	2%	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
<i>Retorno esperado</i>	0,38%	0,38%	0,34%	0,32%	0,76%	0,75%	0,89%	0,87%
<i>Risco</i>	0,30%	0,30%	0,27%	0,25%	0,98%	0,94%	1,76%	1,70%

Obs.: Os ativos sem alocação foram omitidos para facilitar a leitura.