



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Alan De, Genaro Dario

Apreciação de Ativos Referenciados em Volatilidade

Revista Brasileira de Finanças, vol. 4, núm. 2, 2006, pp. 203-228

Sociedade Brasileira de Finanças

Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824756005>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# Apreçamento de Ativos Referenciados em Volatilidade

Alan De Genaro Dario\*

## Resumo

Um *swap* de volatilidade é um ativo contingente que negocia a volatilidade realizada no futuro. Um *swap* de variância é um contrato similar que negocia a variância de um ativo. Diferentemente de uma opção, cuja exposição à volatilidade está contaminada pela dependência ao preço do ativo, um *swap* de volatilidade fornece uma exposição pura à mesma. Adota-se uma forma funcional para descrever a dinâmica da variância, conforme sugerido por Heston (1993), permitindo a determinação, sob uma medida *Q-martingale*, do preço livre de arbitragem para os *swaps* de volatilidade e de variância. Como um resultado adicional, o modelo de Heston é calibrado as opções de dólar negociadas na BM&F e seus parâmetros são utilizados para o apreçamento dos *swaps* de volatilidade e variância para a taxa de câmbio R\$ / USD.

**Palavras-chave:** apreçamento de ativos; *swap* de volatilidade; volatilidade estocástica; modelo de Heston, calibração do modelo.

**Códigos JEL:** G12; G13.

## Abstract

Volatility swaps are contingent claims on future realized volatility. Variance swaps are similar instruments on future realized variance, the square of future realized volatility. Unlike a plain vanilla option, whose volatility exposure is contaminated by its asset price dependence, volatility and variance swaps provide a pure exposure to volatility alone. This article discusses the risk-neutral valuation of volatility and variance swaps based on the framework outlined in the Heston (1993) stochastic volatility model. Additionally, the Heston (1993) model is calibrated for foreign currency options traded at BM&F and its parameters are used to price swaps on volatility and variance of the BRL / USD exchange rate.

**Keywords:** asset pricing; volatility swap; stochastic volatility; Heston model; model calibration.

---

Submetido em Maio de 2006. Revisado em Dezembro de 2006. As opiniões expressas neste artigo são única e exclusivamente atribuídas ao seu autor e não da instituição a que ele pertence. Este artigo está baseado na dissertação de mestrado do autor defendida no Departamento de Economia da FEA-USP. Agradeço os comentários de Márcio Garcia (PUC-Rio) e José Carlos Santos (FEA-USP) membros da minha banca e especialmente ao meu orientador Milton Barossi Filho. Agradeço também ao Editor Chefe, Ricardo Leal, e a um editor associado pelas contribuições que permitiram aperfeiçoar este artigo. As conversas com Luiz Fernando Lins e Alan Lewis contribuíram para o aperfeiçoamento deste artigo. Uma versão anterior deste trabalho foi apresentada no 6º Encontro Brasileiro de Finanças – Vitória 2006

\*Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F e Instituto de Matemática e Estatística - IME/USP.  
Endereço para correspondência: Alan De Genaro Dario, Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F,  
Praça Antonio Prado, 48, São Paulo, Brasil. CEP 01010-901. E-mail: adario@bmf.com.br

## 1. Introdução

Nos últimos dez anos o interesse em produtos e estratégias que permitam a negociação da volatilidade realizada de um ativo, ou carteira, cresceu consideravelmente, haja vista a vasta quantidade de textos acadêmicos, bem como a oferta destes produtos por parte das grandes instituições financeiras. Remonta a este período a criação e difusão dos índices de volatilidade, em que o *VIX*, calculado pela *Chicago Board Option Exchange, CBOE*, é o mais notório expoente desta família de índices que ao longo dos anos teve o *VDAX* da *Deutsche Börse* e o *VXN* da própria *CBOE* como novos integrantes. O objetivo destes índices é expressar de modo bastante sucinto a volatilidade implícita de uma carteira de opções com maturidade fixa. O *VDAX* reflete a volatilidade implícita de uma carteira de ações de empresas européias, enquanto o *VXN* referencia-se em uma carteira teórica de opções de empresas que pertencem ao *NASDAQ-100*.

Dentre as formas mais utilizadas para assumir uma posição em volatilidade, pode-se considerar o *straddle*, por meio de posições estáticas em opções; as operações dinâmicas de delta *hedge*, ou por meio de contratos de *swap* e/ou futuros de volatilidade. Enquanto os dois primeiros instrumentos sofrem influência do nível do ativo subjacente os últimos permitem uma exposição pura à volatilidade e passam a ser denominados derivativos de volatilidade.

Os *swaps* de volatilidade são contratos a termo que negociam a volatilidade realizada do ativo subjacente durante um período de tempo no futuro. Analogamente, os *swaps* de variância são contratos que negociam o quadrado da volatilidade realizada em um período. Ambos os instrumentos fornecem uma alternativa aos investidores que desejam assumir uma posição em relação ao nível de incerteza do preço de um determinado ativo.

Historicamente, segundo Gatheral (2002), os *swaps* de volatilidade apareceram após a crise envolvendo o *Long-Term Capital Management, LTCM*, no final de 1998, quando a volatilidade implícita dos índices de ações elevou-se abruptamente a níveis nunca dantes observados. Os *hedge funds* iniciaram uma operação de venda de volatilidade realizada através dos *swaps* de volatilidade. Estas operações se deram por meio de *swaps* de variância, mas poderiam ter sido realizadas através de uma operação estruturada por meio de uma venda de uma opção. Entretanto, a última alternativa envolve rebalancear o *portfolio* dinamicamente para a obtenção de uma estratégia delta neutra. Os *dealers* estavam satisfeitos com a compra do *vega*, mesmo em níveis elevados, uma vez que, estruturalmente, estavam vendidos em *vega* em outras operações e precisavam neutralizar este risco.

No que se refere ao apreçamento de derivativos de volatilidade, em especial dos *swaps* de variância, este foi tratado de maneira pioneira em Demeterfi et alii (1999), por meio da construção de um *portfolio* replicante. Desde então, as literaturas acadêmica e profissional sobre o tema têm crescido de maneira consistente e dentre os trabalhos de qualidade sobre o tema, podem ser citados, Carr e Madan (2002), Carr e Lee (2003), Carr e Lewis (2004).

O primeiro trabalho voltado ao mercado brasileiro, em particular, ao mercado acionário, foi Kapotas et alii (2004), focaram unicamente no apreçamento de *swap* de variância. Como veremos a seguir, a estratégia de tentar sintetizar o *payoff* do *swap* de volatilidade com o uso de um *swap* de variância pode gerar resultados insatisfatórios caso a volatilidade realizada situe-se afastada de seu valor esperado. Por esta razão, é necessária a determinação do valor justo de *swap* de volatilidade quando o propósito for a negociação de volatilidade e não a da variância.

Como será visto ao longo deste artigo, o apreçamento dos *swaps* de variância pode ser feito por meio da construção de um *portfolio* replicante, enquanto que os *swaps* de volatilidade dependem fundamentalmente da especificação de uma forma funcional para descrever a variância instantânea do ativo subjacente. Para tanto, adota-se a estrutura padrão para descrever modelos com volatilidade estocástica introduzido por Heston (1993).

Desta forma, o objetivo deste artigo é derivar o preço livre de arbitragem para os *swaps* de variância e de volatilidade assumindo que a variância instantânea assume a especificação desenvolvida por Heston (1993). Como um objetivo complementar, o modelo de Heston (1993) é calibrado para as opções de dólar negociadas na BM&F e seus parâmetros utilizados para o apreçamento de *swaps* de variância e de volatilidade com prazos variados.

Além desta introdução o artigo é composto de sete seções e um anexo. A seção dois define conceitualmente os *swaps* e os futuros de volatilidade e de variância. Na seqüência, a seção três, mostra como é possível replicar o *payoff* de um *swap* de variância por meio de operações em um contrato a termo e um continuum de opções. A seção quatro descreve os fundamentos subjacentes ao apreçamento sob a medida *Q-martingale*, bem como, o preço livre de arbitragem dos *swaps* de volatilidade e de variância. A seção cinco apresenta o gerenciamento de risco de um *swap* de variância. Por sua vez, a seção seis apresenta um exemplo com dados calibrados do mercado brasileiro. Ao final, na seção sete, reportam-se as considerações finais.

## 2. Derivativos em Volatilidade

Nesta seção apresentam-se os principais derivativos que negociam diretamente a incerteza futura de um determinado ativo. Dentre os mais conhecidos temos os *swaps* de variância e de volatilidade, sendo que recentemente a *CBOE* autorizou a negociação dos futuros de volatilidade. Enquanto os *swaps* são tipicamente negociados entre as partes (*OTC*) e algumas vezes registrados em uma *clearing*, os contratos futuros, basicamente sobre índices de ações, são negociados em pregão. Até o momento, não há negociação de nenhum dos instrumentos acima no Brasil, entretanto, devido ao grande volume negociado no exterior, é provável que dentro em breve comece a ser negociado no Brasil, justificando a existência deste artigo.

## 2.1 O que são swap de volatilidade e swap de variância?

Teoricamente, um *swap* de volatilidade não é estruturalmente definido como um *swap*, mas como um contrato a termo de volatilidade realizada em base anual, uma vez que seu *payoff* na maturidade é igual a:

$$N (\sigma_R (S) - K_{vol}) \quad (1)$$

sendo  $\sigma_R (S)$  a volatilidade realizada cotada em termos anuais no período de vigência do contrato, algebricamente:

$$\sigma_R (S) \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s ds} \quad (2)$$

em que:

$\sigma_S$  é a variância instantânea do ativo;

$K_{vol}$  é a volatilidade anual contratada;

$N$  é o valor nocional da operação.

Enquanto que um *swap* de variância é estruturalmente equivalente ao de volatilidade com a seguinte alteração para:

$$N (\sigma_R^2 (S) - K_{var}) \quad (3)$$

em que  $\sigma_R^2 (S)$  é a variância realizada cotada em base anual ao longo da vida do contrato, calculada como:

$$\sigma_R^2 (S) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s ds \quad (4)$$

Em ambos os casos a ponta ativa do *swap* recebe a diferença entre a volatilidade ou variância realizada e o valor contratado. Dessa forma, em uma circunstância neutra ao risco um *swap* de variância é apreçado segundo a seguinte expressão:

$$P_t = E^Q \{ e^{-rT} (\sigma_R^2 (S) - K_{var}) \} \quad (5)$$

A determinação do valor livre de arbitragem de um contrato a termo no momento de sua contratação é tal que o valor  $K_{var}$  é escolhido de forma que o fluxo financeiro seja nulo, isto é, escolhe-se o valor de  $K_{var}$  de forma que:

$$K_{var} = E^Q \{ \sigma_R^2 (S) \} \quad (6)$$

Então, para calcular o valor de *swap* de variância, é necessário determinar a seguinte esperança  $E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}$ , ou seja, o valor esperado da variância acumulada. Analogamente, para o apreçamento de um *swap* de volatilidade faz-se uso da seguinte expressão:

$$P_t = E^Q \{ e^{-rT} (\sigma_R(S) - K_{vol}) \}$$

Da mesma maneira que o *swap* de variância, o valor da ponta fixa,  $K_{vol}$ , do *swap* de volatilidade deve ser tal que no lançamento do mesmo, seu custo seja nulo. Isto ocorre quando:

$$K_{vol} = E^Q \{ \sigma_R(S) \} \quad (7)$$

Nas circunstâncias em que um processo para a volatilidade seja definido, o valor de um *swap* pode ser calculado por meio das expressões (6) e (7). Este procedimento está incluído na seção quatro a partir da adoção de um processo *CIR* para descrever a dinâmica da variância.

Adicionalmente, como será feito na seção três, a seguir, é possível calcular o preço livre de arbitragem de um *swap* de variância através da construção de um *portfolio* replicante, sem a necessidade de assumir um processo para a volatilidade, exigindo apenas que o processo de preço seja difusivo.

## 2.2 Futuros de volatilidade

Outra possibilidade de negociação de derivativos com exposição pura à volatilidade são os contratos futuros de volatilidade. Neste caso, o ativo subjacente é a volatilidade realizada esperada de certo ativo e/ou índice em uma data futura  $T_1$  para um horizonte de tempo  $T_2 > T_1$ . O principal exemplo destes contratos são os contratos futuros de *VIX* e *VDAX* negociados, respectivamente na CBOE *Futures Exchange* (*CFE*) e na *EUREX*. Assim como no caso de um *swap* de volatilidade, um contrato futuro de volatilidade não pode ser sintetizado por meio da construção de um *portfolio* replicante.

Dessa forma, quando o propósito for determinar um preço livre de arbitragem para o contrato futuro de volatilidade, tem-se, numa circunstância neutra ao risco, a seguinte expressão:

$$F_0 = E_0^Q (\sigma_{T_1}(S))$$

Em que  $\sigma_{T_1}(S)$  é a volatilidade realizada esperada no instante  $T_1$ , isto é:

$$\sigma_{T_1}(S) \equiv E^Q \left( \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma_s ds} \right)$$

Finalmente, o preço de um contrato futuro de volatilidade é dado por:

$$F_0 = E_0^Q \left\{ E^Q \left( \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma_s ds} \right) \right\}$$

Até o momento não está disponível uma forma fechada para o preço de um futuro de volatilidade. Entretanto é possível estabelecer limites de preços para o futuro de volatilidade. Para tanto, basta utilizar a desigualdade de Jensen e a lei das expectativas iteradas para obtermos os limites de preço:

$$E_0^Q \left( \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma_s ds} \right) \leq F_0 \leq \sqrt{E_0^Q \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \sigma_s ds}$$

Em que o limite inferior pode ser identificado como um *swap* de volatilidade *forward* e o limite superior como um *swap* de variância *forward*. Para aplicações destes limites na prática veja EUREX (2006).

### 3. Apreçamento de Swaps de Variância por Meio de um *Portfolio* Replicante

Conforme o arcabouço teórico desenvolvido, pioneiramente, por Demeterfi et alii (1999) e adotado desde então como referência, discuti-se o apreçamento de um *swap* de variância por meio da construção de um *portfolio* replicante, sem a imposição de uma forma funcional para a dinâmica da volatilidade. Torna-se necessário apenas assumir que o processo determinante do preço seja contínuo à direita. Portanto, tem-se o seguinte:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, \dots) dt + \sigma(t, \dots) dw_t^x \quad (8)$$

A essência de um *portfolio* replicante é a construção de uma carteira que no instante de tempo posterior a sua construção seja capaz de gerar um *payoff* proporcional ao incremento da variância do ativo durante aquele período, conforme colocado de maneira pioneira por Derman et alii (1996).

Ao aplicar o Lema de Ito em  $\log S_t$ , tem-se o seguinte:

$$d(\log S_t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dw_t^x \quad (9)$$

Subtraindo a equação (9) de (8), obtém-se:

$$\frac{dS_t}{S_t} - d(\log S_t) = \frac{\sigma^2}{2} dt \quad (10)$$

Integrando ambos os lados, tem-se a variância continuamente amostrada:

$$\begin{aligned}\sigma_R^2(S) &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds \\ \sigma_R^2(S) &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0} \right]\end{aligned}\quad (11)$$

A expressão acima é a representação de uma estratégia que replica a variância realizada de um ativo. O primeiro termo entre colchetes representa o resultado do rebalanceamento contínuo de uma posição de quem está, instantaneamente, comprado em  $1/S_t$  ativos de valor unitário. O segundo termo representa uma posição do tipo estática vendida em um ativo, conhecido como contrato log (*log contract*), que no seu vencimento paga o logaritmo do retorno total.<sup>1</sup>

A expressão (11) acima fornece um outro método para calcular o valor de um *swap* de variância sem a necessidade de imposição de uma forma funcional para a dinâmica da variância.

Sob a hipótese de neutralidade ao risco, pode-se aplicar o operador esperança na equação (11) para determinar o custo do *portfolio* replicante, que sintetiza a variância do ativo no intervalo  $[0, T]$ .

$$K_{var} = \frac{2}{T} E^Q \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0} \right] \quad (12)$$

Antecipando o que será visto na seção 4.1 o *drift* do processo de preço sob uma medida **Q-martingale** é expresso pela taxa de juros livre de risco. Aliado ao fato de que a integral  $\int_0^t \sigma dw_s^x$  é um *martingale*, implica que o primeiro termo da expressão (12) seja dado por:

$$E^Q \left[ \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right] = rT$$

Como os contratos que pagam o logaritmo do retorno total (*log contracts*) não são negociados em bolsa seu *payoff* deverá ser também sintetizado por meio da negociação de um contrato a termo e um conjunto de opções de compra e venda.

Para replicar da melhor forma possível o *payoff* de contrato logaritmo é importante utilizar os contratos mais líquidos. Dessa forma, opções de compra e venda são utilizadas, sendo o novo parâmetro  $S_*$  o limiar na escolha entre as opções de compra e de venda. Assim, o *payoff* do contrato pode ser escrito como:

---

<sup>1</sup>Este contrato foi introduzido por Neuberger (1994).

$$\log \left( \frac{S_T}{S_0} \right) = \log \left( \frac{S_T}{S_*} \right) + \log \left( \frac{S_*}{S_0} \right)$$

Em que o segundo termo independente do preço final do ativo e pode ser tratado como uma constante. Com o objetivo de sintetizar o termo  $\log(S_T/S_*)$  basta utilizar a seguinte identidade matemática:

$$\begin{aligned} -\log \left( \frac{S_T}{S_*} \right) &= -\frac{S_T - S_*}{S_*} + \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0) dk \quad (13) \\ &+ \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0) dk \end{aligned}$$

A equação acima representa a decomposição do contrato logaritmo no seguinte *portfolio*:

- a) Uma posição vendida em um contrato a termo com valor de entrega de  $S_*$
- b) Uma posição comprada em  $(1/K^2)$  opções de venda com preços de exercício no intervalo  $[0, S_*]$ ;
- c) Uma posição comprada em  $(1/K^2)$  opções de compra com preços de exercício no intervalo  $[S_*, \infty)$ .

Combinando os resultados acima, é possível determinar o valor do *swap* de variância como o valor de mercado de cada um dos termos que compõem a expressão (12), assim:

$$\begin{aligned} K_{\text{var}} &= \frac{2}{T} \left[ rT - \left( \frac{S_0}{S_*} e^{rT} - 1 \right) - \log \left( \frac{S_*}{S_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{rT} \left( \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} P(K) dk + \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dk \right) \right] \quad (14) \end{aligned}$$

A equação (14) acima reflete o mesmo resultado encontrado na equação (26) do artigo seminal de Demeterfi et alii (1999), em que  $C(K)$  e  $P(K)$ , denotam, respectivamente, o preço livre de arbitragem de *calls* e *puts* com preços de exercício  $K$ . Sendo os valores para  $C(K)$  e  $P(K)$  obtidos a partir de sua negociação, obtém-se o valor de mercado de um contrato de variância.

A estrutura teórica utilizada para apreçar um *swap* de variância nesta seção utiliza apenas o conceito de *portfólio* replicante, pois do ponto de vista da dinâmica do processo de preço, foi necessário apenas assumir uma trajetória capaz de se ajustar a um processo contínuo.

De forma distinta a um *swap* de variância, o *swap* de volatilidade não pode ter seu *payoff* sintetizado com a construção de um *portfolio* replicante. Dessa forma, para o cálculo do preço livre de arbitragem de um *swap* de volatilidade é necessário adotar uma forma funcional para a dinâmica da volatilidade.

#### **4. Apreçamentos do contrato de volatilidade e do contrato de variância em um modelo de Heston**

O objetivo dessa seção é apresentar o procedimento de apreçamento de um *swap* de variância, bem como de um *swap* de volatilidade quando a forma funcional difundida por Heston (1993) é admitida para descrever a dinâmica da variância. Destaca-se que este último não poderia ser apreçado sem a imposição de uma forma funcional para descrever a dinâmica da variância instantânea.

##### **4.1 Fundamentos para o apreçamento**

Da análise precedente verifica-se que para apreçar um *swap* de volatilidade é necessária uma representação paramétrica que descreva a evolução da volatilidade do ativo. Neste ponto, inseri-se uma estrutura representativa dos processos padrão na literatura acadêmica, quando o intuito for tratar com modelos da classe de volatilidade estocástica. Tratam-se de processos de preço em economia em que são caracterizados como volatilidade estocástica *alla* Heston (1993). Dessa forma, tem-se uma formulação teórica que descreve a dinâmica da volatilidade que referencia o *swap*.

O problema de apreçamento dos ativos contingentes referenciados em volatilidade e variância trata-se, inicialmente, de apreçar ativos em mercado incompletos. Entretanto, pode ser transportado para um arcabouço de mercado completo com a introdução de um conjunto de derivativos artificiais. Esta abordagem foi realizada por Pham e Touzi (1996), Romano e Touzi (1997), Oliveira (2003) e Dario e Barossi-Filho (2006) em um arcabouço de apreçamento de ativos em equilíbrio geral na presença de um agente representativo.

Uma característica importante é que os preços dos ativos contingentes que se deseja calcular sejam independentes dos derivativos introduzidos. Como este novo ativo tem oferta total igual a zero, então não é capaz de modificar a utilidade marginal de equilíbrio do agente representativo em um modelo de equilíbrio geral.

De volta aos fundamentos desta economia, admite-se incerteza, descrita por  $w = \{w^g, w^x\}$ , um movimento browniano bidimensional, definido num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , em que  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  é uma filtragem e  $P$  é uma medida de probabilidade sendo que os processos tem uma estrutura de correlação dada por  $\langle dw_x, dw_g \rangle = \rho$ .

Definem-se os processos, da seguinte forma:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sqrt{V_t} dw_t^x \\ dV_t &= \kappa_V (\theta_V - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dw_t^g\end{aligned}$$

Com estrutura de correlação dada por  $\langle dw_x, dw_g \rangle = \rho$ .

Para a utilização da teoria dos *martingales* é necessário definir uma medida de probabilidade  $\mathbf{Q}$  definida em  $(\Omega, \mathcal{S})$ , que é equivalente a  $\mathbf{P}$ , tal que o preço dos ativos negociados na economia, descontado pelo numeraire, sejam  $\mathbf{Q}$ -*martingales*.

Seja  $\Lambda$  o conjunto de medidas equivalentes a  $\mathbf{P}$ , pode-se afirmar que, sob todas as condições formuladas, se o conjunto  $\Lambda$  for não vazio as oportunidades de arbitragem são excluídas (definição 0.2.3 em Karatzas (1997)) e a recíproca também é verdadeira (Teorema 0.2.4 em Karatzas (1997)). Finalmente, o conjunto  $\Lambda$  será unitário se e somente se os mercados forem completos.

O modelo como definido inicialmente não é completo, mas a inclusão do ativo artificial é capaz de completar o mercado e justificar a presença de um agente representativo em um arcabouço de equilíbrio geral.

Dessa forma, define-se uma medida única  $\mathbf{Q}$  pertencente a  $\Lambda$  por:

$$Q(A) = \int_{\Omega} 1_{\{\omega \in A\}} \eta_t P(d\omega) \quad A \in F \quad (15)$$

sendo  $\eta_t = \frac{dQ}{dP}$  a derivada de Radon-Nikodym.

Segundo Fouque et alii (2000) é possível caracterizar a derivada de Radon-Nikodym como:

$$\eta_t = \frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s dW_s^x - \int_0^T v_s dW_s^g - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^T v_s^2 ds \right\} \quad (16)$$

em que  $(\lambda, v)'$  é um processo adaptado em relação a filtragem  $\{\mathcal{G}_t\}$  e adicionalmente atende as condições de integração  $\int_0^T \lambda_s^2 ds < \infty$  e  $\int_0^T v_s^2 ds < \infty$ . O vetor  $(\lambda, v)'$  é o prêmio de risco associado a cada fonte de risco dessa economia.

Pode-se mostrar como em Dario e Barossi-Filho (2006) que a derivada de Radon-Nikodym expressa acima pode ser obtida como um processo endógeno em um modelo de equilíbrio geral em que o *state price deflator* é a taxa marginal de substituição intertemporal do agente representativo.

---

<sup>2</sup>Em relação à notação anterior, tem-se que  $\sigma_t \equiv V_t$  denota a variância instantânea do ativo.

Dessa forma, para prosseguir com a mudança de medida, é necessário determinar os prêmios de risco associados. Para que o processo de preço, descontado, do ativo de risco seja um  **$\mathbf{Q}$ -martingale**, isto é, um processo sem *drift* sobre a medida risco neutra  **$\mathbf{Q}$** , pode-se afirmar que:

**Proposição 1** *O prêmio de risco  $\lambda_s$  deve ser:*

$$\lambda_t = \frac{r_t - \mu^S}{\sigma_t^s} \quad (17)$$

**Prova** Para que o processo descontado do preço do ativo seja um  **$\mathbf{Q}$ -martingale**, reescrevendo a sua dinâmica como:

$$\begin{aligned} \bar{S}_t &= S_t \exp(-r_t) \\ d\bar{S}_t &= \bar{S}_t [(\mu^S - r_t) dt + \sigma_t^S dw_t^x] \end{aligned} \quad (18)$$

em que  $\sigma_t^s = \sqrt{V_t}$ , que tem sua dinâmica expressa por (15).

De acordo com o Teorema de Girsanov, o processo  $w^Q = \{w_t^Q\}$ , definido por:

$$dw_t^{x,Q} = dw_t^x + \lambda_t^x dt \quad (19)$$

é um movimento browniano padrão sob a medida  **$\mathbf{Q}$** . Substituindo a expressão acima em (19), resulta em:

$$d\bar{S}_t = \bar{S}_t \left[ (\mu^S - r_t - \lambda_t^x \sigma_t^s) dt + \sigma_t^s dw_t^Q \right] \quad (20)$$

Logo, para que o processo  $\bar{S}_t$  seja um  **$\mathbf{Q}$ -martingale** deve-se ter  $\lambda_t \sigma_t^s = r_t - \mu^S$ , em que  $\lambda_t = \frac{r_t - \mu^S}{\sigma_t^s}$  é o *market price of risk*. ■

É necessário então obter o processo descritivo da dinâmica do prêmio de risco para a volatilidade  $v_t^s$ .

Existe na literatura uma série de formulações para o prêmio de risco para a volatilidade. Dentre essas, as mais comuns são aquelas em que o valor do mesmo é zero, como colocado por Hull e White (1987) e Stein e Stein (1991), ou como uma função afim da própria volatilidade, conforme adotado por Heston (1993). Entretanto, diferentemente dos trabalhos anteriores, seu valor pode ser endogematicamente determinado em um modelo de equilíbrio geral. Dessa forma, apresenta-se a seguinte proposição:

**Proposição 2** *Em um modelo de equilíbrio geral, o prêmio de risco para a volatilidade é obtido endogenamente por:*

$$v_t^s = \rho \sqrt{V_t^s} \quad (21)$$

**Prova** Ver Dario e Barossi-Filho (2006). ■

O valor do prêmio de risco encontrado é uma função afim da volatilidade, o que facilita sobremaneira os cálculos para o apreçamento dos ativos contingentes em um arcabouço neutro ao risco. Diante dos resultados acima, pode-se lançar mão do Teorema de Girsanov, para afirmar que o processo  $W_t^Q = (W_t^{x,Q}, W_t^{g,Q})'$ , definido por:

$$W_t^{x,Q} = W_t^x + \int_0^T \lambda_s ds \quad \text{e} \quad W_t^{g,Q} = W_t^g + \int_0^T v_s ds$$

é um movimento browniano bidimensional sob a medida  $\mathbf{Q}$  e adaptado à filtragem  $\{\mathfrak{F}_t\}$ .

Dessa forma, semelhante a Davis (2001) e Fouque et alii (2000), pode-se definir o drift para o processo de volatilidade sob a medida  $\mathbf{Q}$ -martingale, como:

$$\beta = \kappa_V (\theta_V - V_t) + \sigma \sqrt{V_t} \rho \left( \frac{r - \mu}{\sqrt{V_t}} \right) + \sqrt{1 - \rho^2} \rho \sqrt{V_t} \sigma \sqrt{V_t} \quad (22)$$

Finalmente, pode-se descrever a dinâmica dos processos para o ativo de risco sob a medida  $\mathbf{Q}$ -martingale como:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{V_t} dw_t^{x,Q} \\ dV_t &= \kappa_V^\circ (\theta_V^\circ - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dw_t^{g,Q} \end{aligned}$$

em que

$$\kappa_t^\circ = \kappa_t + \sigma \rho \sqrt{1 - \rho^2} \quad \text{e} \quad \theta_t^\circ = \frac{\kappa \theta + \rho \sigma (r - \mu)}{\kappa_t + \sigma \rho \sqrt{1 - \rho^2}}$$

Dessa forma, os processos estão definidos em um arcabouço neutro ao risco e os parâmetros corrigidos em relação ao prêmio de risco. Pode-se então prosseguir com o apreçamento do swap de volatilidade.

#### 4.2 Preço livre de arbitragem de um swap de volatilidade e de variância

Seja a seguinte representação para a dinâmica do preço de um ativo, admitindo-se neutralidade ao risco:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sqrt{V_t} dw_t^{x,Q} \\ dV_t &= \kappa_V^\circ (\theta_V^\circ - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dw_t^{g,Q} \end{aligned}$$

Com uma estrutura de correlação dada por  $\langle dw^{x,Q}, dw^{g,Q} \rangle = \rho$ .

Utilizando os resultados anteriores envolvendo medidas risco-neutras, sabe-se que o apreçamento de um *swap* de variância, em condições de neutralidade ao risco, é dado por:

$$P_t = E^Q \{ e^{-rT} (\sigma_R^2(S) - K_{var}) \} \quad (23)$$

Dessa forma, é necessário calcular a esperança acima, para o apreçamento do *swap*. Entretanto, como visto anteriormente, o cálculo da esperança, assumindo uma estrutura temporal da taxa de juros estocástica, mas independente das demais variáveis de estado da economia, resume-se a  $E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}$ , ou seja, o valor esperado da variância entre os instantes zero e  $T$ . Com a representação admitida para a variância do preço, pode-se enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 3** *O valor de um swap de variância é dado por:*

$$P_t = E^Q \{ e^{-rT} (\sigma_R^2(S) - K_{var}) \} \quad (24)$$

sendo  $K_{var} = E^Q \{ \sigma_R^2(S) \} = \frac{1 - e^{\kappa T}}{\kappa T} (V_t - \theta) + \theta$ .

**Prova** Valendo-se do Teorema da Convergência Dominada:

$$E^Q \{ \sigma_R^2(S) \} = \frac{1}{T} \int_0^T E(V_t) dt$$

Para calcular a esperança da variância, deve-se reescrever o processo na forma de integral:

$$V_t = V_0 - \kappa \int_0^t (V_u - \theta_V) du + \gamma \int_0^t V_t dw_V$$

A média do processo de Wiener é zero, logo a esperança da expressão acima é dada por:

$$E[V_t] = V_0 - \kappa \int_0^t (E[V_u] - \theta_V) du$$

que pode ser expressa em uma forma diferencial por:

$$\frac{\partial}{\partial t} E[V_t] = -\kappa (E[V_t] - \theta_V)$$

que é uma equação diferencial separável e solucionada por:

$$\frac{dE[V_t]}{E[V_t] - \theta_V} = -\kappa dt$$

Resolvendo a expressão acima, tem-se:

$$E[V_t] = e^{-\kappa t} (V_0 - \theta_V) + \theta_V$$

Finalmente, utilizando:

$$E^Q \{ \sigma_R^2(S) \} = \frac{1}{T} \int_0^T E(V_t) dt$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned} E^Q \{ \sigma_R^2(S) \} &= \frac{1}{T} \int_0^T [e^{-\kappa t} (V_0 - \theta_V) + \theta_V] dt \\ E^Q \{ \sigma_R^2(S) \} &= \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa T} (V_0 - \theta_V) + \theta_V \end{aligned}$$

Ao substituir a expressão  $E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}$  na fórmula, obtém-se o seguinte:

$$P_t = E^Q \{ e^{-rT} (\sigma_R^2(S) - K_{var}) \}$$

que é a expressão para o apreçamento de um *swap* de variância. ■

Entretanto, para apreçar um *swap* de volatilidade o cálculo é um pouco mais complexo. Conforme já colocado, não é possível de maneira trivial sintetizar o *payoff* de um *swap* de volatilidade por meio da construção de um *portfolio* replicante a partir do uso das opções disponíveis, uma vez que é a variância que emerge naturalmente de uma operação de *hedge* com opções.

Segundo Demeterfi et alii (1999), ao visualizar o problema do apreçamento de derivativos em volatilidade, sob a ótica de um ativo contingente, pode-se dizer que é a variância o ativo subjacente a todos os outros derivativos que negociam volatilidade, por exemplo, *swap* de volatilidade. Neste caso, os *swaps* de volatilidade, por serem uma função não linear das variâncias dos contratos de volatilidade, são mais difíceis de serem apreçados e utilizados para o *hedge*, tanto de forma teórica, como prática.

Para ilustrar as questões acima, considere a estratégia de aproximar um *swap* de volatilidade com o uso de um *swap* de variância. Seja  $K_{vol}$  o *strike* de um *swap* de volatilidade que gera, na maturidade, o seguinte *payoff*  $\sigma_R - K_{vol}$ . Assim incorre-se na seguinte aproximação:

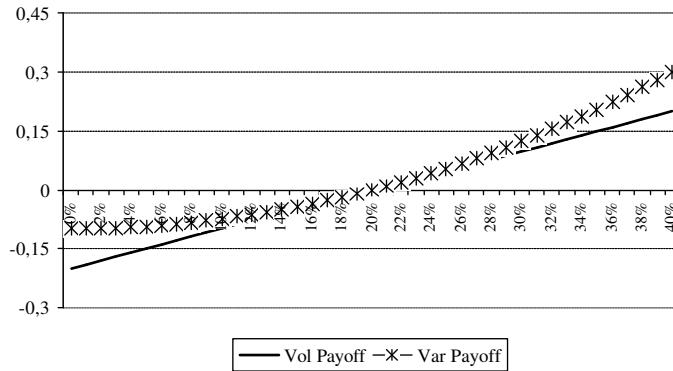
$$\sigma_R - K_{vol} \approx \frac{1}{2K_{vol}} (\sigma_R^2 - K_{vol}^2) \quad (25)$$

que representa a posse de  $\frac{1}{2K_{vol}}$  *swaps* de variância com *strike*  $K_{vol}^2$ .

Seguindo a aproximação adotada, o preço livre de arbitragem de um *swap* de volatilidade é dado por:

$$\sigma_R = \sqrt{K_{\text{var}}} \quad (26)$$

A figura 1 abaixo compara os dois lados da equação (25) com  $K_{\text{vol}} = 20\%$  para diferentes valores da volatilidade realizada.



**Figura 1**  
Comparação de *payoff* entre os *swaps* de variância e de volatilidade

Percebe-se da análise acima que a estratégia de sintetizar o *payoff* do *swap* de volatilidade com o uso de um *swap* de variância pode gerar resultados insatisfatórios, se a volatilidade realizada ficar distante de  $K_{\text{vol}}$ .

A diferença no *payoff* que surge sistematicamente entre os contratos de volatilidade e de variância é proveniente da convexidade, uma vez que, implicitamente, adota-se a seguinte aproximação  $E^Q \left\{ \sqrt{\sigma_R^2(S)} \right\} \approx \left\{ \sqrt{E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}} \right\}$  para apreçar o contrato e, sabe-se que pela desigualdade de Jensen<sup>3</sup> o valor esperado de uma função convexa é menor ou igual à função do valor esperado.

Caso seja desejável internalizar uma correção para a convexidade, pode-se seguir Brockhaus e Long (2000) e realizar uma aproximação de seu valor por meio de uma expansão de Taylor de segunda ordem<sup>4</sup> aproveitando os resultados encontrados no apreçamento do *swap* de variância:

$$E^Q \left\{ \sqrt{\sigma_R^2(S)} \right\} \approx \sqrt{E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}} - \frac{\text{Var} (\sigma_R^2(S))}{8E^Q \{ \sigma_R^2(S) \}^{3/2}} \quad (27)$$

<sup>3</sup>Se  $h(\cdot)$  é uma função convexa e  $E(X) < \infty$ , então  $E(h(X)) \geq h(E(X))$

<sup>4</sup>O anexo I apresenta a derivação para esta expressão, a qual consta no anexo por se tratar de uma aproximação e o objetivo deste artigo é a obtenção de fórmulas fechadas.

Finalmente, sendo o objetivo calcular o valor exato de um *swap* de volatilidade, sem a necessidade de incorrermos em aproximações como a dada pela expressão (27) pode-se adotar a transformada de Laplace da variância total  $\sigma_R^2(S) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_S^2 ds$ , quando a variância instantânea segue um processo *CIR*. Dessa forma, pode-se enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 4** O valor de um swap de volatilidade é dado por:

$$P_t = E^Q \left\{ e^{-rT} \left( \sqrt{\sigma_R^2(S)} - K_{vol} \right) \right\} \quad (28)$$

sendo

$$K_{VOL} = E^Q \left\{ \sqrt{\sigma_R^2(S)} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - E^Q [e^{-s\sigma_R^2(S)}]}{s^{3/2}} ds \quad (29)$$

$$E^Q [e^{-s\sigma_R^2(S)}] = A(t, T) e^{-B(t, T)V_s} \quad (30)$$

com

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)T/2}}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma(T)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \quad (31)$$

e

$$B(t, T) = \left[ \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]$$

Adicionalmente,  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2s\sigma^2}$ .

**Prova** Define-se  $\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  como uma função gama com  $\alpha > 0$ .

Sabe-se que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , ou seja:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Considere a mudança de variável  $s = \frac{t}{q}$ . Então:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{e^{-sq}}{\sqrt{s}q} q ds = \sqrt{q} \int_0^\infty \frac{e^{-sq}}{\sqrt{s}} ds$$

Resolvendo em função de  $\sqrt{q}$ , tem-se:

$$\sqrt{q} = \frac{\sqrt{\pi}}{\int_0^\infty \frac{e^{-sq}}{\sqrt{s}} ds}$$

Realizando a integração por partes, resulta em:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow du = \frac{1}{2t^{3/2}} dt$$

$$dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = 1 - e^{-t}$$

Assim:

$$\sqrt{\pi} = \frac{1 - e^{-t}}{\sqrt{t}} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t^{3/2}} dt$$

ou

$$2\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t^{3/2}} dt$$

Usando a mudança de variável  $s = \frac{t}{q}$  e resolvendo a expressão acima se tem:

$$\sqrt{q} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sq}}{s^{3/2}} ds$$

Ao avaliar em  $q \equiv \sigma_R^2(S) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds$  e tomado a esperança sob a medida risco neutra, encontra-se:

$$E^Q \left\{ \sqrt{\sigma_R^2(S)} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - E^Q [e^{-\sigma_R^2(S)s}]}{s^{3/2}} ds$$

O termo  $E^Q [e^{-\sigma_R^2(S)s}]$  pode ser obtido com a transformada de Laplace da variância total e pode ser encontrado em Cox et alii (1985) ou na proposição 3.1 de Dario e Barossi-Filho (2006), assumindo que o prêmio de risco,  $\lambda$ , é igual a zero. Substituindo o seu valor na expressão acima, o resultado desejado é obtido.

■

O valor encontrado na expressão (29) acima representa a ponta fixa do *swap* de volatilidade, que foi calculada de tal forma que o contrato tenha custo zero em sua emissão. A integral da expressão (29) pode ser calculada rapidamente por meio de integração numérica.

## 5. Gerenciamento de Risco para Derivativos de Volatilidade

Nas seções anteriores verificou-se como é possível sintetizar o *payoff* de um *swap* de variância por meio de um *portfolio* composto por uma posição estática em opções e uma dinâmica em ações, sendo dessa forma possível imunizar o risco de variância realizada no vencimento do *swap*. Entretanto, para o gerenciamento do risco entre a data da contratação do *swap* até o seu vencimento é necessário realizar a marcação a mercado do *swap* e, consequentemente, determinar o *Profit and Loss, P&L*, da posição.

Dessa forma, apresenta-se nesta seção, segundo Chriss e Morokoff (1999), o valor de mercado de um *swap* em um instante de tempo  $t$  que se situa entre o momento da emissão  $t_0$  e o vencimento  $T$ . Seja  $V(t_0, t)$  a variância realizada entre os instantes  $t_0$  e  $t$ . A variável  $V(t_0, T)$  obedece a seguinte relação de linearidade:

$$V(t_0, T)(T - t_0) = V(t_0, t)(t - t_0) + V(t, T)(T - t) \quad (32)$$

Logo, é justamente a linearidade da variância realizada o que a torna mais fácil de ser modelada do que a volatilidade realizada. Reescrevendo a expressão acima como:

$$V(t_0, T)(T - t_0) = \lambda V(t_0, t) + (1 - \lambda)V(t, T)$$

em que  $\lambda$  é a fração de tempo do *swap* transcorrida até o momento  $t$ ; i.e.:

$$\lambda = \frac{t - t_0}{T - t_0}$$

Dessa forma, o valor de mercado do *swap* é dado pelo valor da variância realizada até o instante  $t$  e um termo adicional que reflete a variância futura. Esta fonte de risco remanescente pode ser imunizada, se um novo *swap* com valor nocional de  $(1 - \lambda)N$  e valor de  $K_t$  for admitido.

Portanto o valor de mercado do *swap* é dado por:

$$MTM = Ne^{-r(T-t)} [\lambda(V(t_0, t) - K_{var}) + (1 - \lambda)(V(t, T) - K_{var})]$$

em que  $r$  é a taxa de juros livre de risco. A expressão acima fornece uma forma intuitiva para interpretar o valor de mercado de um *swap* em um instante  $t$  ao longo da sua vida. Assim, o valor de mercado do *swap* é dado por uma média ponderada entre a variância realizada do *swap* e a mudança no *fair price* do *swap*, em que o fator de ponderação é o tempo transcorrido da vigência do *swap*.

Dessa forma, podem-se identificar as principais fontes de incerteza que impactam no valor de  $K$  alterando o valor de mercado do *swap*. Considerando a construção de um *swap* de variância por meio de um conjunto de opções, o valor de  $K$  é determinado por:

$$\begin{aligned} K_{var} &= \frac{2}{T} \left[ rT - \left( \frac{S_0}{S_*} e^{rT} - 1 \right) - \log \left( \frac{S_*}{S_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{rT} \left( \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} P(K) dk + \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dk \right) \right] \end{aligned}$$

Desconsiderando os termos que permanecem constantes pode-se reescrever a expressão acima como:

$$K_{var} = f \left[ \left( \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} P(K, \sigma(k)) dk + \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K, \sigma(k)) dk \right) \right]$$

em que  $f()$  define uma função implícita da volatilidade implícita das opções necessárias para calcular a ponta fixa de um *swap* de variância. Verifica-se da expressão anterior que o risco do *swap* de variância pode ser mapeado na superfície de volatilidade implícita. Logo, alterações no formato do smile afetam o valor de mercado do *swap* de variância e, consequentemente, o *P&L* da posição.

## 6. Calibragem para os Dados Brasileiros<sup>5</sup>

Usando dados do dia 16/12/2005 da operação estruturada de volatilidade de dólar (VTC), negociado na BM&F, o modelo de Heston é calibrado. A negociação na BM&F da operação estruturada de volatilidade de taxa de câmbio (VTC)<sup>6</sup> dá-se da seguinte forma: a BM&F informa o preço do contrato futuro de dólar de mesmo vencimento da opção e seu respectivo delta. As operações realizadas, como mencionado, são transformadas em negócios de opções de dólar, na quantidade de contratos de VTC negociada, e em negócios de futuro de dólar, cuja quantidade será igual ao resultado da multiplicação do delta pela quantidade de opções. Dessa forma, não há posições em aberto de VTC, sendo que as operações realizadas sob esse código serão automaticamente desmembradas em operações de opções e em operações de futuro de taxa de câmbio.

Por meio da operação estruturada de volatilidade, realizada por meio da construção de um *portfolio* instantaneamente *delta* neutro, tem-se que ao comprar volatilidade o titular recebe uma opção com o delta escolhido e uma posição vendida no contrato futuro de dólar. Adicionalmente, esta estratégia de negociação de vola-

---

<sup>5</sup>Todos os procedimentos foram implementados em MATLAB e estão disponíveis por solicitação ao autor.

<sup>6</sup>Para maiores detalhes ver: [http://www.bmf.com.br/portal/pages/frame.asp?idioma=1&area=contratos&link\\_char=financeiro9](http://www.bmf.com.br/portal/pages/frame.asp?idioma=1&area=contratos&link_char=financeiro9)

tilidade pode ser feita na BM&F utilizando as opções com ajuste.<sup>7</sup> em detrimento das opções convencionais, sendo negociadas por meio de operação estruturada de volatilidade de dólar com ajuste (VCA).<sup>8</sup>

O processo de calibragem consiste em determinar os parâmetros do modelo de Heston (1993), que geram os prêmios teóricos mais próximos aos valores negociados para as opções de dólar, provenientes da estratégia de VTC. No caso do modelo de Heston (1993), para o conjunto de parâmetros  $\Psi = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho\}$ , escolhe-se um valor inicial,  $\Psi_0$ , calculando-se o erro resultante da aplicação deste vetor no modelo em relação ao valor de mercado. Prossegue-se, então, com este processo até que o erro seja minimizado. Na prática, uma vez obtido os parâmetros  $\Psi = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho\}$  que minimizam o erro para uma data arbitrária, deve-se recalibrar o modelo de tempos em tempos.

Utilizando os valores oriundos da negociação com VTC para opções com delta entre 10 e 90 e maturidade de até 200 dias úteis o modelo de Heston (1993) é calibrado para o dia 16/12/2005 obtendo os seguintes resultados:

**Tabela 1**  
Modelo de Heston calibrado às opções de dólar negociadas na BM&F

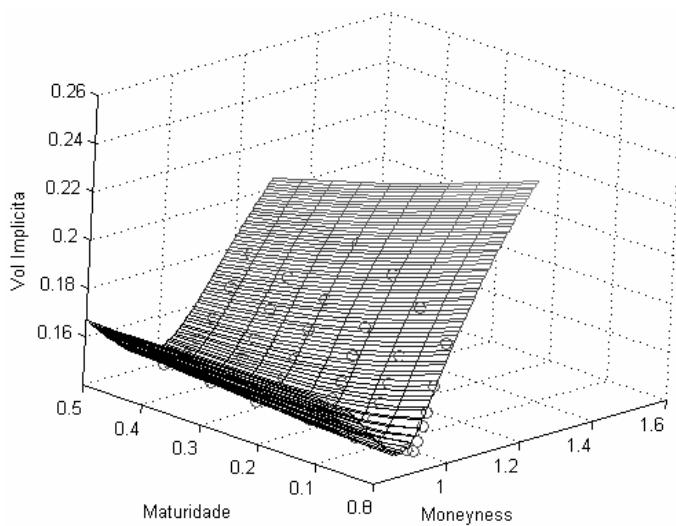
Parâmetro	Valor
$V_0$	0,0234
$\theta$	0,039
$K$	2,108
$\sigma$	0,5348
$\rho$	0,4463

Com os dados do modelo calibrado é possível reconstruir toda a superfície de volatilidade, endogenamente, a partir do modelo de Heston (1993), sem a necessidade de recorrer a métodos de interpolação tais como *cubic spline*. Estes métodos puramente numéricos são notoriamente caracterizados por não preservar as relações de não-arbitragem, necessárias em qualquer modelo de apreçamento de ativos. Uma alternativa à interpolação da superfície de volatilidade, capaz de preservar as relações de não-arbitragem pode ser encontrada em Wang et alii (2004).

---

<sup>7</sup>A BM&F autorizou em 24/11/2005 à negociação das opções com ajuste sobre dólar disponível, as quais representam uma nova classe de ativos contingentes que são caracterizados por fluxos financeiros diários, assim como os contratos futuros, mas que sintetizam o *payoff* de uma opção. Uma descrição quanto às principais características e exemplos de negociação, bem como em relação ao apreçamento deste produto podem ser encontradas em Dario (2006).

<sup>8</sup>Para maiores detalhes da operação estruturada com volatilidade envolvendo as opções com ajuste: [http://www.bmf.com.br/portal/pages/contratos1/Financeiros/PDF/DOLvolatilidade\\_ajuste.pdf](http://www.bmf.com.br/portal/pages/frame_home.asp?idioma=1&link=http://www.bmf.com.br/portal/pages/contratos1/Financeiros/PDF/DOLvolatilidade_ajuste.pdf)



**Figura 2**  
Superfície de volatilidade do dólar em 16/12/2005 considerando o modelo de Heston

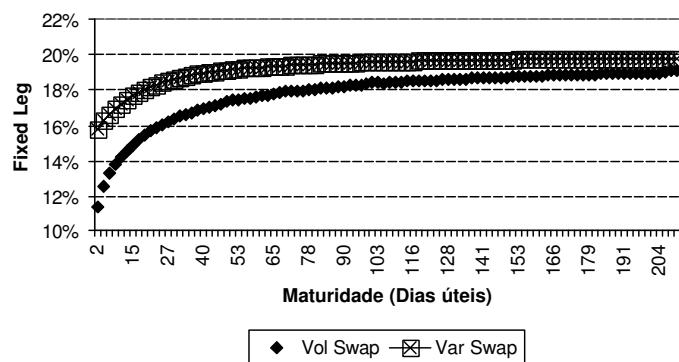
Os valores marcados com círculos representam a volatilidade implícita negociada na estratégia de VTC. A partir dos valores obtidos na tabela acima é possível calcular a ponta fixa de um *swap* que vence em 21 e 189 dias.

**Tabela 2**  
Ponta fixa dos *swaps* de volatilidade e de variância

Maturidade	Volatilidade	Variância
21	15,69%	18,18%
189	18,92%	19,78%

Assim, para um *swap* de volatilidade que vence em 21 dias, calculado pela equação (29), encontra-se que a ponta fixa é 15,69%. No entanto, utilizando a aproximação de um *swap* de volatilidade por meio de *swap* de variância, expresso pela equação (26), o valor da ponta fixa é de 18,18%.

Pode-se calcular a ponta fixa de um *swap* de volatilidade com maturidades variadas com uso da expressão (29) e seu valor calculado pela aproximação expressa em (26), representado na figura 3.



**Figura 3**  
Ponta fixa dos swaps de volatilidade e de variância para maturidades variadas

Adicionalmente, utilizando os valores calibrados para o modelo de Heston (1993), obtém-se os seguintes parâmetros:

**Tabela 3**  
Volatilidade do dólar de curto e longo prazos, segundo o modelo de Heston

Parâmetro	Valor
$\sigma_{\text{inicial}}$	15,30%
$\theta$	19,75%

Assim, considerando o modelo de Heston (1993), calibrado às opções de Dólar, têm-se que as volatilidades: de curto e longo prazos, expressas em base anual são, respectivamente, 15,30% e 19,75%.

Por último, é possível comparar os valores calculados do swap de volatilidade com os valores negociados nas operações de volatilidade (VTC).

**Tabela 4**  
Operação estruturada de volatilidade *versus* o swap de volatilidade

DU	VTC	Delta
18	15,08%	50
200	18,10%	75

Ao comparar os valores calculados pelo *swap* de volatilidade com os valores negociados na operação de volatilidade (VTC) das opções *at-the-money*, ATM, percebe-se que são próximos, portanto, alinhados ao resultado apresentado em Carr e Lee (2003), que afirma ser a volatilidade implícita das opções ATM um bom previsor para a volatilidade realizada. A vantagem do *swap* de volatilidade está em fornecer uma exposição pura à volatilidade, enquanto que a operação estruturada sofre a influência do valor do ativo subjacente.

## 7. Considerações Finais

O desenvolvimento de novos contratos contingentes visa prover meios alternativos à negociação de determinado ativo, que pode ser o preço de um ativo ou, como neste artigo, o nível da incerteza futura. De acordo com essa filosofia, os contratos de *swap* de volatilidade e de variância, apresentam-se como uma saída viável aos investidores que tenham por objetivo negociação pura da incerteza de um ativo.

Para o apreçamento do *swap* de variância não é necessária a imposição de nenhuma forma funcional para a dinâmica da variância instantânea, uma vez que é possível sintetizar seu *payoff* no vencimento por meio de um *portfolio* replicante estático composto por um contrato a termo e um *continuum* de opções. Entretanto, os *swaps* de volatilidade não são passíveis de apreçamento de forma semelhante aos contratos de variância sendo necessária a imposição de uma forma funcional para a volatilidade.

Dessa forma, adotou-se a forma funcional usual na literatura pertinente aos modelos em que a volatilidade é estocástica. Tratam-se de processos de preço em economia em que são caracterizados como volatilidade estocástica *alla Heston* (1993), permitindo que o preço livre de arbitragem dos *swaps* de variância e volatilidade sejam obtidos com o uso de uma medida de probabilidade **Q-martingales**. Implícito à adoção desta metodologia, está a determinação dos prêmios de risco associados a cada fonte de incerteza da economia.

Ao final, têm-se expressões para determinar a parte fixa (*fixed leg*) de *swaps* de volatilidade e de variância de tal maneira que seu valor na emissão tenha custo igual a zero. O *payoff* final do *swap* dependerá do valor da ponta flutuante (*floating leg*), que será expressa por meio da volatilidade e da variância realizadas, respectivamente, para os *swaps* de volatilidade e de variância.

Por último, com as informações disponíveis, o modelo de Heston (1993) é calibrado às opções de dólar futuro e os parâmetros encontrados são utilizados para calcular a ponta fixa de um *swap* de volatilidade com várias maturidades. Ao comparar o valor calculado pelo *swap* de volatilidade com os valores negociados na operação de volatilidade (VTC), com as opções *at-the-money*, ATM, percebe-se que os valores são próximos, portanto, alinhado ao resultado apresentado em Carr e Lee (2003), que afirma ser a volatilidade implícita das opções ATM um bom previsor para a volatilidade realizada. A vantagem do *swap* de volatilidade é que este fornece uma exposição pura à volatilidade, enquanto que a operação

estruturada sofre a influência do valor do ativo subjacente.

Alternativamente, Carr e Lee (2003) argumentam ser possível apreçar um *swap* de volatilidade sem a determinação da forma funcional para a variância instantânea, mas em contrapartida impõem a restrição de que a correlação entre a volatilidade e o ativo deve ser nula, isto é,  $\langle dw^{x,Q}, dw^{g,Q} \rangle = \rho = 0$ . Entretanto, conforme os resultados da calibragem do modelo de Heston (1993), expressos na tabela 1, a correlação entre os processos tende a ser, significativamente, diferente de zero justificando a adoção da estrutura expressa neste artigo para o apreçamento dos *swaps* de volatilidade.

## Referências

- Brockhaus, O. & Long, D. (2000). Volatility swaps made simple. *Risk*, pages 92–95.
- Carr, P. & Lee, R. (2003). Robust replication of volatility derivatives. Courant Institute of Mathematical Sciences – New York University. Working Paper.
- Carr, P. & Lewis, K. (2004). Corridor variance swaps. *Risk*.
- Carr, P. & Madan, D. (2002). Towards a theory of volatility trading. *Handbooks in Mathematical Finance*.
- Chriss, N. & Morokoff, W. (1999). Market risk for volatility and variance swaps. *Risk*.
- Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407.
- Dario, A. (2006). Opções com ajuste diário: Características e apreçamento. *Resenha BM&F*, (167):50–64.
- Dario, A. & Barassi-Filho, M. (2006). Asset pricing in a monetary open economy with incomplete markets: A general equilibrium approach. Anais do 6º Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças – Vitória, ES.
- Davis, M. (2001). Mathematics of financial markets. In Engquist, B. & Schmid, W., editors, *Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond*. Springer-Verlag, Berlin.
- Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., & Zou, J. (1999). A guide to volatility and variance swaps. *Journal of Derivatives*, 6:9–32.
- Derman, E., Kamal, M., Kani, I., & Zou, J. (1996). The local volatility surface. *Financial Analyst Journal*, pages 25–36.
- EUREX (2006). Volatility futures at eurex. Disponível em: <http://www.eurexchange.com/download/presentations/EurexVolaFutures.pdf>.

- Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., & Sircar, K. R. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press.
- Gatheral, J. (2002). Case studies and financial modelling. Class Notes – Courant Institute of Mathematical Sciences – New York University.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6:327–343.
- Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 3:281–300.
- Kapotas, J. C., Schirmer, P. P. S., & Manteiga, S. M. (2004). Apreçamento de contratos de volatilidade a termo no mercado brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, 2(1):1–21.
- Karatzas, I. (1997). *Lectures on the Mathematics of Finance*, volume 8. Mathematical Society, Providence, Rhode Island. CRM Monograph series.
- Neuberger, X. (1994). The log contract: A new instrument to hedge volatility. *Journal of Portfolio Management*, pages 74 –80.
- Oliveira, R. D. (2003). Tópicos em finanças, apreçamento de derivativos e mercados incompletos. Prêmio BM&F em Derivativos.
- Pham, X. & Touzi, N. (1996). Equilibrium state prices in a stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 6:215–236.
- Romano, M. & Touzi, N. (1997). Contingent claim and market completeness in a stochastic volatility model. *Mathematical Finance*, 7:399–410.
- Stein, E. & Stein, J. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *The Review of Financial Studies*, 4:727–752.
- Wang, Y., Yin, H., & Qi, L. (2004). No-arbitrage interpolation of the option price function and its reformulation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3:627–649.

## Anexo

O objetivo é aproximar a seguinte função:

$$F(x) = \sqrt{x} \quad (\text{A.1})$$

Utilizando uma expansão de Taylor de segundo ordem de  $F(x)$  em torno de  $x_0$  tem-se:

$$F(x) \cong F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (\text{A.2})$$

sendo

$$F'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } F''(x_0) = \frac{1}{4x^{3/2}}$$

Substituindo os valores acima na expansão:

$$F(x) \cong \sqrt{x_0} + \frac{(x - x_0)}{2\sqrt{x_0}} - \frac{(x - x_0)^2}{8x_0^{3/2}} \quad (\text{A.3})$$

$$F(x) \cong \frac{(x - x_0)}{2\sqrt{x_0}} - \frac{(x - x_0)^2}{8x_0^{3/2}}$$

Assumindo que  $x = V$  e  $x_0 = E[V]$ , obtém-se:

$$\sqrt{V} \cong \frac{(V + E[V])}{2\sqrt{E[V]}} - \frac{(V - E[V])^2}{8E[V]^{3/2}} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando o operador esperança em ambos os lados da expressão acima, encontra-se:

$$E[\sqrt{V}] \cong \frac{(E[V] + E[V])}{2\sqrt{E[V]}} - \frac{E[(V - E[V])^2]}{8E[V]^{3/2}} \quad (\text{A.5})$$

Resultado finalmente:

$$E[\sqrt{V}] \cong \sqrt{E[V]} - \frac{\text{Var}[V]}{8E[V]^{3/2}} \quad (\text{A.6})$$