



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Fraga Lima de Melo, Eduardo; Franklin Jr., Sergio Luis; da Rocha Neves, César

Mensuração do Risco de Sorteio em Títulos de Capitalização

Revista Brasileira de Finanças, vol. 10, núm. 2, 2012, pp. 197-213

Sociedade Brasileira de Finanças

Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824777002>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Mensuração do Risco de Sorteio em Títulos de Capitalização

(Raffle Risk Valuation in With-Raffle Savings Account)

Eduardo Fraga Lima de Melo*

Sergio Luis Franklin Jr.**

César da Rocha Neves***

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma abordagem para mensuração do risco de sorteio presente em títulos de capitalização comercializados por sociedades de capitalização. O risco de sorteio é aquele relacionado à possibilidade de perdas advindas do compromisso de pagar premiação acima do valor esperado, associadas à eventual não venda da série completa de títulos e/ou com o sorteio de títulos cujo valor pago pelo subscritor tenha sido elevado. Os resultados obtidos fornecem uma fórmula de simples aplicação que pode ser facilmente utilizada na gestão de riscos em sociedades de capitalização.

Palavras-chave: risco de sorteio; título de capitalização; sociedade de capitalização.

JEL code: C13; G29.

Abstract

In this paper we present an approach for the assessment of raffle risk found in with-raffle savings account, a type of product offered by with-raffle savings societies. This risk can be defined as the possibility of losses due to the commitment to pay prizes above the expected value. It concerns the selling of the product to few investors and the uncertainty in the value paid by them, which is positively related to the prize the savings society must pay. Our results provide a simple valuation formula for practitioners involved in this specific industry. Keywords: Raffle risk; with-raffle savings account; with-raffle savings society.

Keywords: raffle risk; with-raffle savings account; with-raffle savings society.

Submetido em 31 de outubro de 2011. Reformulado em 16 de dezembro de 2011. Aceito em 27 de fevereiro de 2012. Publicado on-line em 25 de junho de 2012. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Eduardo Lemgruber. Os autores agradecem os comentários e as sugestões do editor e dos revisores da RBFin. Reprodução parcial ou total e trabalhos derivativos permitidos com a citação apropriada da fonte.

*SUSEP e UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: eduardoflm@yahoo.com.br

**SUSEP e PUC/RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: sergio.franklin@susep.gov.br

***PUC/RJ, UERJ e SUSEP, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: cesar.neves@susep.gov.br

1. Introdução

Neste artigo, derivamos uma fórmula para mensuração do que chamamos de risco de sorteio, presente na operação de venda de títulos de capitalização, realizada por sociedades de capitalização. Um exercício de simulação e uma aplicação com dados reais são executados. O risco de sorteio é aquele relacionado à possibilidade de perdas advindas do compromisso, por parte da sociedade, de pagar premiação acima do valor esperado, associadas à eventual não venda da série completa de títulos ou com o sorteio de títulos cujo valor pago pelo subscritor tenha sido elevado. A abordagem desenvolvida segue, em parte, os passos de Franklin Jr. *et al.* (2011). Entretanto, naquele trabalho os autores abordam o risco de subscrição de uma sociedade de capitalização como um todo, sem estudos de simulação nem aplicação com dados reais.

Tendo em vista ser um mercado com operações não tão bem compreendidas quanto o mercado bancário, de previdência e de seguros, entendemos ser importante uma descrição mais detalhada da operação e da natureza das sociedades que comercializam títulos de capitalização. Aliás, por conta deste fato, a literatura sobre risco nestes produtos praticamente inexiste no Brasil e também no mundo, até porque não se tem notícias sobre produtos similares a este que sejam comercializados em outros países. Apesar de ter sido exaustivamente pesquisada, não foi possível reunir literatura sobre mensuração de riscos nestes produtos. Por isso, entendemos que este artigo representa uma importante contribuição para este mercado.

Em um contexto onde é cada vez mais exigido de instituições financeiras, que lidam com poupança popular, práticas de gestão de riscos mais eficientes, a mensuração adequada do risco de sorteio, de forma simples e direta, ajuda de forma relevante na manutenção de companhias sólidas que possam cumprir com os compromissos assumidos junto aos poupadore. Esse tem sido o foco das atuais diretrizes de supervisão e de gestão de riscos de seguradoras, elaboradas tanto pela IAIS (*International Association of Insurance Supervisors*) quanto pela comunidade européia, por meio do Solvência II.¹ Atualmente, no mercado de capitalização, não há previsão de requerimento de capital regulatório ou econômico para cobrir os riscos associados às operações de venda de títulos de capitalização. A mensuração destes riscos tem o intuito de resguardar os interesses dos subscritores/titulares de planos, a solvência e a estabilidade financeira do mercado de capitalização como um todo.

Por conta da escassez de literatura sobre o tema, faremos, na subseção 1.1, um histórico sobre os planos de capitalização, incluindo alguns dados sobre a evolução deste mercado no Brasil. Na Seção 2, descrevemos o modelo construído para mensurar a incerteza associada às despesas com sorteios a realizar. Na Seção 3, com base em algumas premissas, o modelo desenvolvido é aplicado para quantificar o risco de sorteios de uma sociedade de capitalização. Na Seção 4, com base em

¹Para mais detalhes sobre diretrizes de solvência de seguradores e entidades de previdência, consultar IAIS (2011), UE (2009) e Sandström (2011).

experimentos de simulação, comparamos perdas advindas do risco de sorteios a realizar com os resultados obtidos com a formulação proposta neste artigo. Na Seção 5, uma aplicação com dados reais é apresentada e, após, são feitas considerações finais.

1.1 Histórico sobre planos de capitalização

De acordo com Funenseg (2010), a concepção inicial da capitalização é atribuída a Paul Viget (por volta do ano 1850), diretor de uma cooperativa de mineiros da França. Seu objetivo inicial foi montar um sistema que proporcionasse auxílio financeiro aos sócios por meio de suas próprias poupanças. De forma muito parecida a de algumas modalidades de planos existentes hoje, o sistema da época era baseado em contribuições mensais. O objetivo também era constituir um capital, previamente definido, a ser pago no final do período combinado, ou, por meio de sorteio, de forma antecipada.

No Brasil, a primeira sociedade de capitalização foi a Sul América Capitalização (Sulacap), fundada em 1929, mas a oficialização do funcionamento das sociedades de capitalização só se deu em 1932, através do Decreto 21.143, regulamentado em 1933 com o Decreto 22.456, que determinava os pré-requisitos para o funcionamento das sociedades de capitalização (aprovação por órgão competente, constituição de capital mínimo e prazo).

Segundo Contador & Ferraz (2003), em apenas 10 anos de atuação no Brasil, entre os anos 30 e 40, a carteira de capitalização passou a ocupar um importante destaque na economia do país. Sua carteira representava o dobro da produção de café no país, o equivalente a 0,2% do PIB (Produto Interno Bruto). Na década de 1950, a inflação se acelerou, comprometendo a viabilidade dos planos. Como ainda não existia a correção monetária, as reservas acumuladas pelos títulos de capitalização não contavam com cláusulas que garantissem a sua atualização monetária e, consequentemente, perdiam seu valor.

Na década de 1960, a inflação continuou, mas o Governo instituiu a correção monetária em 1964, criando condições para que a Capitalização ganhasse novo impulso. Apesar disto, a Capitalização teve o pior resultado desde sua criação no país, com a participação de menos de 0,01% do PIB. Com o advento da evolução tecnológica e do novo meio de pagamento – o débito automático, na década de 1980, os bancos passaram a ter interesse na venda deste produto através de parceiras com sociedades de capitalização. O débito automático representava um meio de evitar a inadimplência no pagamento das mensalidades e o título de capitalização, um meio de fidelização de clientes.

Desde a introdução do Plano Real, em 1994, o faturamento das empresas de capitalização no país aumentou. Este crescimento decorreu da estabilização econômica, queda das taxas de juros e do crescimento da renda dos brasileiros. Na Tabela 1, são apresentados os montantes de receitas e provisões técnicas de todo o mercado de capitalização para os anos 2002 a 2010.



Tabela 1

Série de valores de receita operacional e de provisões técnicas totais do mercado de títulos de capitalização entre os anos 2002 e 2010. Os valores estão em milhares de reais

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Receitas	3.891.589	4.173.902	5.484.089	6.169.009	6.462.022	7.002.439	7.912.657	9.863.779	11.882.185
Provisões Técnicas	5.486.416	6.212.185	8.136.690	9.559.880	10.264.783	10.687.880	11.819.626	14.936.963	17.253.893

Pode-se observar que em oito anos, a receita triplicou, assim como as provisões técnicas, o que tem representado um crescimento médio de 15% a.a. Apesar da crise financeira deflagrada em 2008, o mercado de capitalização continua em expansão na economia brasileira. Com relação às sociedades de capitalização, apresentamos na Tabela 2 alguns números do setor, com base em informações públicas disponíveis no sítio da SUSEP,² para a data-base de 31/12/2010.

Tabela 2

Valores de receita operacional em 2010 e de provisões técnicas em 31/12/2010 de todas as sociedades de capitalização. Os valores estão em milhares de reais

Sociedade de Capitalização	Receita	Provisões Técnicas
Aplub Capitalização S/A	443.132	16.477
Bradesco Capitalização S/A	2.438.558	3.727.655
Brasilcap Capitalização S/A	2.687.087	4.193.924
Caixa Capitalização S/A	1.033.140	2.097.227
Cardif Capitalização S/A	6.235	4.406
Cia Itau de Capitalização S/A	1.737.943	2.613.937
HSBC Empresa de Capitalização S/A	419.837	748.269
Icatu Hartford Capitalização S/A	794.739	1.550.207
Liderança Capitalização S/A	284.709	395.134
Mapfre Capitalização S/A	26.246	8.524
Santander Capitalização S/A	885.203	1.531.277
Sul América Capitalização S/A	922.819	365.666
TOTAL	11.882.185	17.253.893

Atualmente as sociedades de capitalização podem ser segregadas em dois grupos: as pertencentes a conglomerados financeiros e as independentes. Os principais clientes das primeiras são os clientes do(s) banco(s) do próprio conglomerado. As independentes não dispõem de canal de distribuição bancário próprio. Geralmente, utilizam como canais de distribuição: casas lotéricas, agências de correios, corretores, lojas de departamentos e o balcão de instituições financeiras com quem firmam parcerias.

De acordo com SUSEP (2006), o título de capitalização é uma forma de acumulação de dinheiro pela qual o subscritor constitui um capital, segundo cláusulas e regras aprovadas e mencionadas no próprio título (condições gerais), que será pago em moeda corrente em um prazo máximo estabelecido. Parte dos valores dos pagamentos dos subscritores é usada para custear os sorteios, quase sempre

²www.susep.gov.br (acessado em 21/10/2011).

previstos neste tipo de produto e as despesas administrativas das sociedades de capitalização. O título de capitalização só pode ser comercializado por sociedades de capitalização devidamente autorizadas a funcionar.

Os planos de capitalização podem ser subdivididos em quatro modalidades: tradicional, compra programada, popular e incentivo. Essa divisão é consequência da evolução mercadológica do título de capitalização. Isto significa dizer que ao longo destes anos, os títulos de capitalização foram se especializando em função do objetivo que o consumidor buscava para o título, por isso ocorreu a fragmentação em quatro modalidades.

Os títulos mais comuns são dos tipos PM (pagamento mensal) e PU (pagamento único). O título PM consiste em um plano em que os pagamentos, geralmente, são mensais e sucessivos. É possível que após o último pagamento o plano ainda continue em vigor, pois seu prazo de vigência pode ser maior do que o prazo de pagamento estipulado. Já o título PU é um plano em que o pagamento é único (realizado uma única vez), tendo sua vigência estipulada na proposta.

O prazo de vigência é o período durante o qual o título de capitalização está sendo administrado pela sociedade de capitalização, sendo o capital relativo ao título atualizado monetariamente, em geral, pela TR (ou por outro indexador informado no plano) e capitalizado pela taxa de juros informada nas condições gerais. Tal período deve ser igual ou superior ao período de pagamento.

Com relação aos prêmios oferecidos, é facultada à sociedade de capitalização a utilização dos resultados de loterias oficiais para a geração dos seus números sorteados. Caso a sociedade opte por não utilizá-los, ou se as loterias oficiais não se realizarem, a sociedade de capitalização se obriga a realizar sorteios próprios com ampla e prévia divulgação aos titulares, prevendo, inclusive, livre acesso aos participantes e a presença de auditores independentes.

As condições gerais do título deverão prever a forma de atribuição e apuração dos números em razão dos sorteios, além de definir os múltiplos dos prêmios dos sorteios. Tais múltiplos se referem ao valor do pagamento, ou seja, num título de valor de pagamento igual a R\$ 100,00, se o prêmio do sorteio for de 40 vezes o pagamento, ao título sorteado caberá R\$ 4.000,00 ($40 \times R\$ 100,00$). O título sorteado poderá permanecer em vigor ou não, segundo o que estiver disposto nas condições gerais. Porém, o fato de um título ser ou não sorteado em nada alterará o seu capital para resgate.

Os títulos de capitalização são estruturados com prazo de vigência igual ou superior a 12 meses e em séries cujo tamanho deve ser informado no próprio título. Por exemplo, uma série de 100.000 títulos poderá ser adquirida por até 100.000 clientes diferentes, que são regidos pelas mesmas condições gerais e concorrerão ao mesmo tipo de sorteio.



O título prevê pagamentos a serem realizados pelo subscritor. Cada pagamento apresenta, em geral, três componentes: cota de capitalização, cota de sorteio e cota de carregamento. Nos planos com vigência igual a 12 meses, os pagamentos são obrigatoriamente fixos. Já nos planos com vigência superior, é facultada a atualização dos pagamentos, a cada período de 12 meses, por aplicação de um índice oficial.

2. Modelo para Mensuração do Risco de Sorteio

Planos de capitalização de uma mesma modalidade/tipo, por estarem sujeitos às mesmas normas regulatórias, apresentam várias características semelhantes. Por conta deste fato e antes de apresentar o desenvolvimento teórico do modelo de mensuração de risco de sorteio, podemos adotar algumas premissas a respeito do comportamento de duas variáveis aleatórias relevantes para a mensuração deste risco: a proporção de títulos não vendidos e os valores de prêmios de sorteio. Além disso, tais considerações permitirão que a apuração do risco de sorteio seja executada por cada modalidade/tipo de títulos de capitalização, tornando sua mensuração mais simples, já que não será preciso levar em consideração cada série e cada plano. Considerando NSR como o número de sorteios a realizar de séries e planos de capitalização de uma determinada modalidade/tipo, as duas premissas que adotamos são as seguintes:

Premissa 1. No momento em que se realiza a mensuração do risco de sorteio, a proporção de títulos não vendidos³ no sorteio i ($i = 1, \dots, NSR$), de uma determinada série, de um determinado plano, de uma determinada modalidade/tipo⁴, antes da realização dos sorteios, é desconhecida.⁵ Por isso, consideramos esta proporção como uma variável aleatória Θ , cuja função densidade de probabilidade é única para cada modalidade/tipo de plano de capitalização e que assume valores no intervalo $[0, 1]$. Consideramos que Θ possui distribuição Beta. O domínio desta distribuição é exatamente no intervalo $[0, 1]$. Além disso, sua parametrização permite grande flexibilidade para a modelagem da proporção de títulos não vendidos, afinal dependendo do conjunto de parâmetros (α, β) utilizado, a distribuição Beta(α, β) modela bem baixos ou altos valores médios de proporção com alta ou baixa variabilidade em torno da média.

³Entende-se por número de títulos não vendidos, a diferença entre o tamanho da série e o número de títulos ativos no momento imediatamente anterior à realização do sorteio.

⁴Há quatro modalidades de plano de capitalização (modalidade tradicional, compra programada, popular e incentivo), e três tipos de planos (pagamento único/PU, pagamento mensal/PM e pagamento periódico/PP). Portanto, o número de modalidades/tipos de uma sociedade de capitalização deve ser menor ou igual a 12.

⁵Do momento em que se realiza o cálculo/mensuração do risco de sorteio até o momento imediatamente anterior à realização de um sorteio futuro (de um dado plano/série), novos títulos de capitalização terão sido vendidos pela sociedade de capitalização, outros títulos terão chegado ao fim de sua vigência, outros terão sido cancelados, e outros se tornarão inativos.

A variável I_i é o indicador para o evento de haver algum subscritor sorteado no sorteio i . Ou seja, é uma variável aleatória que assume o valor 1 (“um”) quando há um subscritor sorteado (isto é, o número sorteado foi vendido pela sociedade de capitalização para algum subscritor), e o valor 0 (“zero”) quando não há um subscritor sorteado (o número sorteado não foi vendido e o resultado do sorteio reverteu para a própria sociedade de capitalização). Assim:

$$I_i | \Theta = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade igual a } 1 - \Theta \\ 0, & \text{com probabilidade igual a } \Theta \end{cases}$$

Premissa 2. A despesa da sociedade de capitalização com cada sorteio futuro i ($i = 1, \dots, NSR$), caso haja um subscritor sorteado, ou seja, o prêmio de sorteio, de uma determinada série, de um determinado plano de capitalização, de uma determinada modalidade/tipo, é uma variável aleatória A_i , cuja função densidade de probabilidade é única para cada modalidade/tipo de plano de capitalização.

Por conta da natureza dos planos de capitalização, onde o valor do sorteio é igual ao pagamento realizado pelo subscritor sorteado (pg_i) multiplicado por um múltiplo, a seguinte relação pode ser definida: $A_i = pg_i \cdot \text{múltiplo}$. O “múltiplo do sorteio” (múltiplo) é uma quantidade conhecida e característica de cada modalidade/tipo. Aqui pode ser notado que a fonte de aleatoriedade da variável A_i (despesa da sociedade de capitalização com cada sorteio futuro i) vem do valor que o subscritor sorteado pagou (pg_i), uma vez que seu pagamento pode flutuar dentro do intervalo $[pg \min, pg \max]$.

Seja $pg_i | I_i = 1$ o valor pago à sociedade de capitalização pelo subscritor ganhador do sorteio i , de uma determinada série, de um determinado plano, de uma determinada modalidade/tipo. Aqui podem ser notados dois pontos importantes. Primeiro, sua distribuição é apenas de interesse quando há um subscritor sorteado ($I_i = 1$), afinal é quando a sociedade de capitalização deverá pagar o montante do valor do sorteio. Segundo, no momento em que se realiza a mensuração do risco de sorteio, este valor é desconhecido. Portanto, pg_i é uma variável aleatória que assume valores no intervalo $[pg \min, pg \max]$, já que os limites mínimos e máximos de pagamento por parte do subscritor são característicos de cada modalidade/tipo. Sua média e variância são dadas por: $E[pg_i | I_i = 1] = \mu$ e $Var(pg_i | I_i = 1) = \sigma^2$.

Conforme exposto por Kaas *et al.* (2004), a distribuição condicional $pg_i | I_i = 0$ é irrelevante, então por conveniência considera-se ela equivalente à distribuição de $pg_i | I_i = 1$. Já que as duas distribuições são equivalentes, então pode ser assumido que pg_i e I_i são independentes. Tal fato justifica considerarmos que a distribuição de pg_i seja igual à de $pg_i | I_i = 1$. Portanto, tendo em vista a relação entre A_i e pg_i , temos que $E[A_i] = \mu \cdot \text{múltiplo}$ e $Var[A_i] = \sigma^2 \cdot \text{múltiplo}^2$.

Seja $PagSort_i$ uma variável aleatória que representa a despesa da sociedade de capitalização com o sorteio i (de uma determinada série, de um determinado plano, de uma determinada modalidade/tipo). É importante conhecermos a distribuição de $PagSort_i$ ou, alternativamente, calcularmos $E[PagSort_i]$ e



$Var(PagSort_i)$, os quais possibilitam a aplicação do Teorema do Limite Central, via aproximação pela distribuição Normal.

Dentro da Teoria do Risco Individual (ver, por exemplo, Ferreira (2002), ou Bowers *et al.* (1997)), a variável aleatória $PagSort_i$ pode ser modelada como o produto entre outras duas variáveis:

$$PagSort_i = I_i \cdot A_i$$

Sabe-se que:

$$E[I_i] = E[E[I_i | \Theta]] = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

e

$$\begin{aligned} Var[I_i] &= E[Var[I_i | \Theta]] + Var[E[I_i | \Theta]] = \\ E[\Theta \cdot (1 - \Theta)] + Var(1 - \Theta) &= E[\Theta] - E[\Theta^2] + E[\Theta^2] - E[\Theta]^2 = \\ &\frac{\alpha(\alpha + \beta) - \alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \end{aligned}$$

O valor esperado do montante a ser pago pela sociedade de capitalização para o ganhador do sorteio i é dado por:

$$\begin{aligned} E[PagSort_i] &= E[I_i \cdot A_i] = E[E[I_i \cdot A_i | I_i]] \quad (1) \\ &= \mu.multiplo E[I_i] = \mu.multiplo \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \end{aligned}$$

A variância do valor pago pela sociedade de capitalização para o ganhador do sorteio i é dada por:

$$Var(PagSort_i) = Var(I_i \cdot A_i) = Var(E[I_i \cdot A_i | I_i]) + E[Var(I_i \cdot A_i | I_i)]$$

onde:

$$Var(E[I_i \cdot A_i | I_i]) = (\mu.multiplo)^2 Var(I_i) = (\mu.multiplo)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \quad (2)$$

e

$$E[Var(I_i \cdot A_i | I_i)] = E[multiplo^2 \sigma^2 \cdot I_i] = multiplo^2 \sigma^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (3)$$

Com base nos resultados obtidos em (1), (2) e (3), tem-se o valor esperado e a variância da despesa da sociedade de capitalização com o sorteio i de uma determinada modalidade/tipo:

$$E[PagSort_i] = \mu.multiplo \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \quad (4)$$

$$Var(PagSort_i) = (\mu.multiplo)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + multiplo^2\sigma^2 \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (5)$$

3. Risco de Sorteios a Realizar

Conforme estabelecido em diretrizes de supervisão de solvência,⁶ a provisão constituída pela sociedade de capitalização para sorteios a realizar (*ProvSR*) deve ser igual ao valor esperado do montante de despesa da sociedade de capitalização com os respectivos sorteios. Seja *PLIQ* a perda líquida da sociedade de capitalização com sorteios de uma determinada modalidade/tipo. Então:

$$PLIQ_k = PagSort - ProvSR$$

Ao se colocar o operador esperança $E[.]$, tem-se:

$$E[PLIQ] = E[PagSort] - ProvSR = 0$$

Uma vez que $E[PLIQ] = 0$, a estimativa da perda esperada da sociedade de capitalização com a realização de sorteios é 0 (zero), dado que a provisão esteja adequadamente constituída.

3.1 Resultado líquido da sociedade de capitalização

A variável aleatória que representa a despesa da sociedade de capitalização com todos os sorteios a serem realizados das séries e planos de uma determinada modalidade/tipo é definida como:

$$PagSort = \sum_{i=1}^{NSR} PagSort_i$$

Deve-se notar que $PagSort_i$ e $PagSort_j (i \neq j)$ são variáveis aleatórias independentes: o resultado de um sorteio em nada altera as probabilidades de resultados de outro sorteio. Considerando que NSR é o número de sorteios a realizar de todas as séries e planos de uma determinada modalidade/tipo, pelo Teorema do Limite Central (TLC), para um número de sorteios suficientemente grande, pode-se aproximar a função densidade de probabilidade de *PagSort* por uma Normal com média e variância definidas como segue:

$$E[PagSort] = \mu.multiplo \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right).NSR \quad (6)$$

⁶Ver IAIS (2011), UE (2009) e Sandström (2011).



$$Var(PagSort) = \left[(\mu.multiplo)^2 \cdot \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + multiplo^2\sigma^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right] \cdot NSR \quad (7)$$

A perda líquida da sociedade de capitalização ($PLIQ$) com a realização dos sorteios de uma determinada modalidade/tipo é igual à diferença entre o valor a ser pago pela sociedade de capitalização para os ganhadores de todos os sorteios dos planos e séries dessa modalidade/tipo, e o total arrecadado pela sociedade de capitalização a título de provisão de sorteios a realizar.

Conforme já visto, o valor da provisão para sorteios a realizar, pela própria forma como a provisão é constituída, é sempre igual ao valor esperado do valor a ser pago pela sociedade de capitalização para o ganhador de cada sorteio. Portanto, podemos aproximar a função densidade de probabilidade de $PLIQ$ por uma Normal com média e variância definidas como segue:

$$E[PLIQ] = 0 \quad (8)$$

$$Var(PLIQ) = \left[(\mu.multiplo)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + multiplo^2\sigma^2 \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right] NSR \quad (9)$$

3.2 Cálculo do valor em risco (VaR)

Tendo a média e a variância da variável aleatória $PLIQ$, obtida a partir das equações acima, pode-se avaliar a exposição da sociedade de capitalização ao risco com os sorteios a serem realizados. Para isto, podemos utilizar a seguinte medida de risco:

$$VaR_\alpha(PLIQ) = \inf \{z \in R : \Pr(PLIQ > z) \leq \alpha\}, 0 < \alpha < 1$$

Para se calcular, por exemplo, o capital econômico necessário para cobrir os riscos de sorteios a realizar associado aos planos de capitalização de uma determinada modalidade/tipo de uma sociedade de capitalização, podemos utilizar o VaR:

$$VaR_\alpha(PLIQ) = E[PLIQ] + Z_{1-\alpha} \cdot DVP(PLIQ) = Z_{1-\alpha} \cdot DVP(PLIQ) \quad (10)$$

onde $DVP(.)$ representa o desvio padrão e $Z_{1-\alpha}$ é o quantil $1 - \alpha$ da distribuição Normal padrão.

O montante total de risco de sorteios a realizar é o resultado da agregação dos riscos de todas as modalidades/tipos de todos planos que tenham sorteios a realizar. Cada modalidade/tipo tem o seu próprio risco quantificado. No sentido de simplificar e facilitar a aplicação pelas sociedades de capitalização e profissionais do mercado, o risco total poderia ser calculado aplicando uma matriz de correlação linear. Embora possua deficiências já documentadas na literatura (ver Denuit *et al.* (2005)), como a não captura de dependência nas caudas das distribuições, o uso de matrizes de correlação linear possibilita o uso de cálculos simples para agregação dos riscos.

4. Simulações

Nesta seção, são apresentados os resultados dos procedimentos de simulação realizados com a intenção de verificar a adequação da fórmula desenvolvida na Seção 3. Para a simulação de Θ foram considerados 3 grupos de parâmetros, conforme Tabela 3. Estes grupos de parâmetros denotam diferentes médias de proporção de títulos não vendidos e distintos valores de seu desvio padrão.

Tabela 3
Grupos de Parâmetros da distribuição $Beta(\alpha, \beta)$ de Θ

Grupo	Parâmetros		
	(1)	(2)	(3)
α	1,00	2,00	15,00
β	9,00	8,00	60,00
Média	10%	20%	20%
Desvio padrão	9,05	12,06	4,59

Para o número de sorteios a realizar (NSR) de uma determinada modalidade/tipo, foram considerados 3 cenários, com 5, 50 e 100 sorteios a realizar. Para os valores de $pg.\min$, $pg.\max$ e múltiplo, consideramos as características mais comuns ao planos das modalidades tradicional e popular. Assim, são dois conjuntos de valores para estas variáveis, conforme descrito na Tabela 4. Os planos da modalidade “Popular” costumam possuir faixas de pagamentos baixas e altos valores de múltiplo. Já os planos da modalidade “Tradicional” geralmente possuem faixas mais elevadas de pagamento e múltiplos não tão elevados quanto os da modalidade “Popular”.

Tabela 4
Grupos de parâmetros para a faixa de pagamentos e para o múltiplo

Grupo	Parâmetros	
	“Popular”	“Tradicional”
$pg.\min$	\$3	\$100
$pg.\max$	\$10	\$1.000
múltiplo	5.000	100



Como distribuição do valor da mensalidade paga pelo subscritor ganhador do sorteio (pg_i), consideramos uma distribuição Uniforme entre $pg.\min$ e $pg.\max$. Portanto, foi considerado que $pg_i \sim U(pg.\min, pg.\max)$. O número de simulações de Monte Carlo feitas foi 5.000. A medida de risco utilizada foi o VaR com probabilidades críticas nos valores de 97,5% e 99%. A combinação entre os 3 grupos de parâmetros da distribuição de Θ , 2 grupos para faixa de pagamentos e múltiplo, 3 números distintos de sorteios a realizar e dois níveis de VaR , nos possibilitou comparar 36 diferentes valores simulados com os respectivos modelados pela Fórmula (10) desenvolvida na Seção 3. O algoritmo para simulação seguiu os seguintes passos:

1. Geração de $\Theta \sim \beta(\alpha, \beta)$ utilizando um dos grupos de parâmetros descritos na Tabela 3.
2. Geração de $I_i \sim Bernoulli(\Theta)$ onde Θ foi simulado no passo 1.
3. Caso $I_i = 1$, o valor do sorteio é igual a $u.multiplo$, onde u é a realização de uma v.a. simulada de uma distribuição uniforme; $U \sim Uniforme(pg.\min, pg.\max)$, utilizando um dos grupos de parâmetros descritos na Tabela 4.
4. Caso $I_i = 0$, então o valor a ser pago pelo sorteio é nulo.
5. Os passos 1 a 4 são repetidos NSR vezes e os resultados obtidos de valores de sorteio são somados.

Os passos do algoritmo acima são replicados conforme o número de simulações desejadas. Baseado nas simulações realizadas, o VaR é calculado. O experimento foi executado no pacote estatístico S-Plus, versão 8.1.⁷ Os resultados estão na Tabela 5.

⁷Para 50 sorteios a realizar ($NSR = 50$) e 5.000 simulações, o algoritmo (passos 1 a 5) levou pouco mais de 1 minuto (65 segundos) em um computador com processador Intel® Core™ 2 Duo 3GHz e 2GB de RAM.

Tabela 5

Valores em risco, *VaRs*, com probabilidades críticas de 97,5% e (99%) obtidos por meio de simulação de Monte Carlo (Sim) e por meio da Fórmula (10) desenvolvida na Seção 3 (Mod)

		<i>NSR = 5</i>	
		“Popular”	“Tradicional”
Grupo 1: E[T]=10% ; DVP[T]=9,05%	Sim	55.145 (61.429)	125.989 (144.771)
	Mod	59.921 (71.122)	129.991 (154.291)
Grupo 2: E[T]=20% ; DVP[T]=12,06%	Sim	64.864 (73.112)	139.900 (159.929)
	Mod	69.388 (82.358)	140.244 (166.460)
Grupo 3: E[T]=20% ; DVP[T]=4,59%	Sim	63.848 (73.364)	140.234 (160.118)
	Mod	69.388 (82.358)	140.244 (166.460)
		<i>NSR = 50</i>	
		“Popular”	“Tradicional”
Grupo 1: E[T]=10% ; DVP[T]=9,05%	Sim	183.820 (215.782)	410.316 (497.741)
	Mod	189.488 (224.910)	411.067 (487.910)
Grupo 2: E[T]=20% ; DVP[T]=12,06%	Sim	216.411 (250.170)	437.526 (526.890)
	Mod	219.423 (260.440)	443.489 (526.392)
Grupo 3: E[T]=20% ; DVP[T]=4,59%	Sim	212.588 (251.567)	443.238 (536.537)
	Mod	219.423 (260.440)	443.489 (526.392)
		<i>NSR = 100</i>	
		“Popular”	“Tradicional”
Grupo 1: E[T]=10% ; DVP[T]=9,05%	Sim	260.801 (312.342)	573.718 (678.856)
	Mod	267.976 (318.070)	581.336 (690.008)
Grupo 2: E[T]=20% ; DVP[T]=12,06%	Sim	308.472 (369.392)	626.812 (755.864)
	Mod	310.310 (368.318)	627.188 (744.431)
Grupo 3: E[T]=20% ; DVP[T]=4,59%	Sim	308.292 (367.964)	625.828 (737.222)
	Mod	310.310 (368.318)	627.188 (744.431)

Pode-se observar que a aproximação com o uso da Fórmula (10) desenvolvida na Seção 3 funcionou bem, mesmo para pequenos números de sorteios a realizar. Além disso, verifica-se que sistematicamente o valor em risco proveniente da formulação desenvolvida (Fórmula (10)) com a aproximação normal excede ao valor calculado com base nas simulações. A soma de distribuições uniformes, como no caso do exercício de simulação, tende à distribuição normal quando o número de termos desta soma é suficientemente grande, conforme estabelece o teorema do limite central.

Entretanto, quando se soma poucas variáveis com distribuição uniforme, o resultado é uma distribuição chamada de triangular (ver Teodoro, 2011 e Evans et al, 2000). A função de probabilidade acumulada desta distribuição fica acima da função acumulada da distribuição normal para percentis acima de 50%, quando ambas possuem as mesmas médias e variâncias.

A distribuição da soma de distribuições Uniformes fica limitada inferior e superiormente. O limite superior da soma equivale à soma dos limites superiores individuais de cada distribuição Uniforme. Assim, sua acumulada atinge o ponto 100% de forma mais rápida que a distribuição Normal (que converge a 100% de forma assintótica), fazendo com que as medidas de risco, baseadas em altos quantis, com o uso desta aproximação sejam maiores que aquelas baseadas na distribuição da soma de Uniformes.

Por conta disto, o uso da aproximação normal neste experimento de simulação, onde o valor do sorteio advém de uma distribuição uniforme, acaba por superestimar o valor em risco, justificando os resultados apresentados na Tabela 5. A



diferença entre estas distribuições converge a zero à medida que o número de parcelas da soma cresce. Cabe ressaltar que a escolha da distribuição uniforme foi totalmente arbitrária. Na Seção 5, é apresentada uma aplicação com dados reais, onde mostramos a distribuição dos valores de sorteios pagos em uma base empírica para um determinado caso.

5. Aplicação a Caso Real

Nesta seção, aplicamos o modelo de mensuração de riscos, proposto na Seção 3, a um conjunto de dados reais de uma determinada sociedade de capitalização. Por motivos de confidencialidade, o nome da sociedade não será citado. Desta sociedade, possuímos uma amostra de 90 observações de proporções de títulos não vendidos, no momento do sorteio, da modalidade “tradicional” colhidas no ano de 2010. Além disso, também contamos com outra amostra de 65 valores de prêmios pagos a subscriptores sorteados desta mesma modalidade ao longo do mesmo ano. As estatísticas que resumem as amostras estão na Tabela 6.

É importante notar que, por não termos informações a respeito do múltiplo utilizado pela sociedade de capitalização nos planos desta modalidade, tivemos que modelar a variável aleatória A_i diretamente, ao invés de modelar pgi . Entretanto, por possuírem uma relação direta, tal fato não implica em nenhuma perda na aplicação da formulação desenvolvida na Seção 3, pois $E[A_i] = \mu \cdot multiplo$ e $Var[A_i] = \sigma^2 \cdot multiplo^2$.

Tabela 6

Estatísticas de resumo das amostras de proporções de títulos não vendidos e de valores de prêmios pagos, referentes a plano da modalidade Tradicional, de uma determinada sociedade de capitalização, para o ano de 2010

	Proporções de títulos não vendidos	Valores de prêmios pagos
Tamanho da amostra	90	65
Mínimo	4,00%	\$112.094
1º Quartil	10,9%	\$315.682
Média	21,9%	\$755.233
Mediana	19,0%	\$686.261
3º Quartil	30,3%	\$1.048.281
Máximo	58,0%	\$1.993.204
Desvio Padrão	14,5%	\$526.836

A partir destes dados foi possível construir os histogramas para a proporção de títulos não vendidos e para os valores efetivamente pagos em sorteio, ambos para o ano de 2010. Esses histogramas estão mostrados, respectivamente, na Figura 1.

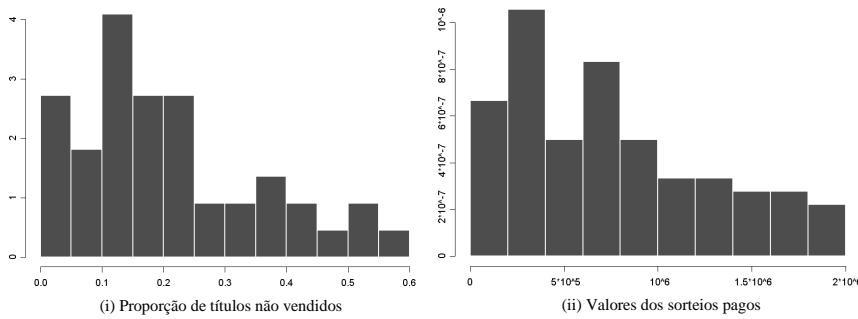


Figura 1
Histogramas das amostras de: (i) proporção de títulos não vendidos; e de (ii) valores de sorteios/prêmios pagos, de plano da modalidade Tradicional, de uma determinada sociedade de capitalização, para o ano de 2010

Com base nas amostras, os parâmetros da distribuição da proporção de títulos não vendidos, além da média e da variância dos valores dos sorteios pagos, foram estimados por meio do método dos momentos. Ao contrário do exercício de simulação executado na Seção 4, onde os parâmetros foram considerados conhecidos, na aplicação com dados reais incorremos no erro proveniente do processo de estimação. De forma a levar em consideração tal erro na mensuração do risco de sorteio, efetuamos um procedimento de *bootstrap* não paramétrico com 5.000 replicações (ver Efron & Tibshirani (1993)). Os resultados estão na Tabela 7.

Tabela 7
Estatísticas de resumo do procedimento de *bootstrap* executado para estimação dos parâmetros

Parâmetro	Valor pontual estimado	Média	Vício	Erro padrão
	1,57	1,62	0,05	0,31
	5,59	5,75	0,16	1,16
$E[A_i]$	755.233	755.025	-208	55.581
$DVP(A_i)$	526.836	522.140	-4.695	34.415

Para cálculo do valor em risco com probabilidade crítica de 97,5%, utilizamos as replicações (estimativas dos parâmetros resultantes da reamostragem) do procedimento de *bootstrap* realizando um ajuste para eliminar o vício.⁸ Posteriormente, estas estimativas foram sorteadas, com reposição, 5.000 vezes e utilizadas para o cálculo da variância conforme Fórmula (9). A partir de então, para cada variância gerada, foi simulado um valor da distribuição normal com média 0 (zero). Por fim, o $VaR_{97,5\%}$ foi calculado com base nas 5.000 simulações feitas.

Caso o número de sorteios a realizar (NSR) em 2011, da modalidade “Tradicional”, seja igual a 100, a estimativa de valor em risco equivaleria a: $Var_{97,5\%} = 11.318.889$. Caso o erro de estimação não fosse considerado, ou seja, caso a Fórmula (14) desenvolvida na Seção 3 considerasse apenas as estimativas pon-

⁸Para este ajuste, o valor do vício foi subtraído de cada uma das replicações.

tuais dos parâmetros ($\hat{\alpha} = 1,57$; $\beta = 5,59$; $\mu = 755.233$ e $\hat{\sigma} = 526.836$), o valor em risco seria igual a $Var_{97,5\%} = 10.988.737$.

Pelos resultados da aplicação com dados reais, a diferença decorrente da inclusão do erro de estimação é relativamente pequena. Neste caso, o uso da formulação proposta neste artigo apenas com estimativas pontuais dos parâmetros não subestimaria de forma relevante o risco. Tal fato evitaria a necessidade de se recorrer a métodos de simulação e/ou de reamostragem.

É prática comum nas diretrizes de solvência de sociedades seguradoras e entidades de previdência complementar o uso de fatores aplicados a provisões técnicas para o cálculo de requerimentos de capital regulatório baseado nos riscos (ver, por exemplo, o Solvência II – Sandström (2011)) em uma abordagem chamada de padronizada. Além disso, conforme definido também nestas diretrizes, o valor das provisões técnicas deve, de forma geral, equivaler ao valor esperado das obrigações. Portanto, para referência, o valor da provisão (valor esperado) de sorteios a realizar, considerando os dados utilizados nesta seção, seria igual a \$58.963.023. O capital em relação à provisão seria de aproximadamente 20%.

6. Considerações finais

Neste artigo, derivamos uma fórmula para mensuração do risco de sorteio, presente em títulos de capitalização. O risco de sorteio é aquele relacionado à possibilidade de perdas advindas do compromisso, por parte da sociedade, de pagar premiação acima do valor esperado, associadas à eventual não venda da série completa de títulos e/ou com o sorteio de títulos cujo valor pago pelo subscritor tenha sido elevado. Tendo em vista inexistir literatura sobre mensuração de riscos para produtos de capitalização, a fórmula desenvolvida no artigo pode ser de grande valor para ser aplicada por praticantes do mercado. Sua simplicidade e a necessidade de se estimar poucos parâmetros certamente a torna uma excelente opção para uma sociedade de capitalização utilizar em suas rotinas de gestão de riscos ou, ainda, no estabelecimento de requerimentos de capital, por parte do regulador, para fins de supervisão de solvência.

Referências

- Bowers, Newton L., Gerber, Hans U., Hickman, James C., Jones, Donald A., & Nesbitt, Cecil J. 1997. *Actuarial Mathematics*. 2nd edn. Public Society of Actuaries.
- Contador, Claudio, & Ferraz, Cláisse. 2003. *Os Mercados de Seguro e de Capitalização No Brasil: O Resgate Da História*. UFRJ/Coppead. Estudos Fuanseg.
- Denuit, Michel, Goovaerts, Marc, & Kaas, Rob. 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons, Ltd.

- Efron, Bradley, & Tibshirani, Robert J. 1993. *An Introducion to the Bootstrap*. New York: Chapman e Hall.
- Ferreira, Paulo P. 2002. *Modelos de Precificação e Ruína Para Seguros de Curto Prazo*. Funenseg.
- Franklin Jr., Sergio L., Neves, César R., & Melo, Eduardo F. L. 2011. *Cálculo Do Requerimento de Capital Regulatório Para Cobrir Os Riscos de Subscrição Das Sociedades de Capitalização*. Relatório disponível no sítio da SUSEP. Disponível em www.susep.gov.br. Acesso em 21/12/2011.
- Funenseg, Diretoria de Ensino e Pesquisa. 2010. *Capitalização*. Assessoria técnica de Alberto Eduardo Fernandes Ribeiro e Rodrigo Maia Jorge.
- IAIS. 2011. *Insurance Core Principles*. Disponível em www.iaisweb.org. Acesso em 30/09/2011.
- Kaas, Rob, Goovaerts, Marc, Dhaene, Jan, & Denuit, Michel. 2004. *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer.
- Sandström, Arn. 2011. *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers : Theory and Practice*. Chapman & Hall/CRC finance series.
- SUSEP. 2006. *Guia de Orientação e Defesa Do Segurado*. 2ed. Disponível em www.susep.gov.br. Acesso em 21/10/2011.
- UE. 2009. *Solvency II: Level 1 Directive*. Disponível em eiopa.europa.eu. Acesso em 30/10/2011.

