



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Alves Portela Santos, André; Tessari, Cristina
Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro
Revista Brasileira de Finanças, vol. 10, núm. 3, 2012, pp. 369-393
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824788004>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro

(Quantitative Portfolio Optimization Techniques Applied to the Brazilian Stock Market)

André Alves Portela Santos*

Cristina Tessari**

Resumo

Neste artigo examinamos a aplicabilidade e o desempenho fora da amostra das estratégias quantitativas de otimização por média-variância e mínima-variância com relação ao desempenho da carteira ingênua igualmente ponderada ($1/N$) e da carteira teórica do índice Ibovespa, bem como avaliamos a estabilidade das composições ótimas obtidas. Na obtenção de carteiras ótimas, restritas para venda a descoberto, foram empregadas matrizes de covariâncias estimadas com base em cinco abordagens alternativas: matriz de covariância amostral, matriz RiskMetrics, e três estimadores propostos por Ledoit & Wolf (2003, 2004a,b). Tomando como base diferentes frequências de rebalanceamento das carteiras, as medidas de desempenho fora da amostra indicam que as estratégias quantitativas de otimização proporcionam resultados estatisticamente significativos em termos de menor volatilidade e desempenho ajustado ao risco superior. Além disso, o uso de estimadores mais sofisticados para a matriz de covariâncias gerou carteiras com menor *turnover* ao longo do tempo.

Palavras-chave: otimização de carteiras; erro de estimação; volatilidade.

JEL code: G11; G32.

Abstract

In this paper we assess the out-of-sample performance of two alternative quantitative portfolio optimization techniques – mean-variance and minimum variance optimization – and compare their performance with respect to a naive $1/N$ (or equally-weighted) portfolio and also to the market portfolio given by the Ibovespa. We focus on short selling-constrained portfolios and consider alternative estimators for the covariance matrices: sample covariance matrix, RiskMetrics, and three covariance estimators proposed by Ledoit & Wolf (2003), Ledoit & Wolf (2004) and Ledoit & Wolf (2004a). Taking into account alternative portfolio re-balancing frequencies, we compute out-of-sample performance statistics which

Submetido em 5 de março de 2012. Reformulado em 2 de agosto de 2012. Aceito em 30 de agosto de 2012. Publicado on-line em 15 de outubro de 2012. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Ricardo P. C. Leal.

*Departamento de Economia. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, SC, Brasil. E-mail: andreportela@cse.ufsc.br

**Departamento de Economia. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, SC, Brasil. E-mail: tinatessari@gmail.com

indicate that the quantitative approaches delivered improved results in terms of lower portfolio volatility and better risk-adjusted returns. Moreover, the use of more sophisticated estimators for the covariance matrix generated optimal portfolios with lower turnover over time.

Keywords: optimization; estimation error; volatility.

1. Introdução

Os modelos quantitativos de otimização de carteiras têm ganhado notoriedade na área de finanças em virtude de sua aplicabilidade prática nos processos de alocação e gestão de carteiras de investimento. A abordagem da otimização de carteiras, proposta inicialmente por Markowitz (1952) em seu artigo seminal “Portfolio Selection”, deu origem ao que hoje é popularmente conhecido como Teoria Moderna do Portfólio e análise média-variância de carteiras de investimento, transformando o processo de alocação de ativos em um processo de otimização. A ideia introduzida em seu artigo é a que investidores deveriam considerar o *trade-off* fundamental entre retorno esperado e risco ao determinar qual a melhor alocação de suas carteiras, escolhendo a carteira com a menor variância entre um infinito número de carteiras que proporcionassem um determinado retorno ou, de forma equivalente, para um determinado nível de aversão ao risco, deveriam escolher a carteira que maximizasse o retorno esperado.

Essa abordagem revolucionou a teoria de finanças ao mudar o foco da análise de investimentos da seleção de ativos individuais em direção à diversificação, colocando pela primeira vez em bases sólidas e matemáticas a relação entre risco e retorno e mostrando que o risco da carteira não depende apenas do risco associado a cada ativo, mas da covariância entre ativos individuais. No entanto, apesar de sua grande influência, quase 60 anos após a publicação do artigo de Markowitz, ainda existe certa relutância entre gestores de recursos em adotar a estratégia quantitativa de otimização baseada no *trade-off* risco-retorno. Uma das razões é que a implementação destas estratégias na prática esbarra na dificuldade de se obter estimações acuradas dos retornos esperados dos ativos e da matriz de covariâncias desses retornos. Tais estimativas amostrais são usualmente obtidas via máxima verossimilhança (MV), supondo retornos normalmente distribuídos. No entanto, conforme argumentam DeMiguel & Nogales (2009), embora as estimativas de MV sejam muito eficientes para a distribuição normal presumida, seu desempenho é altamente sensível a desvios da distribuição empírica ou amostral da normalidade. Levando-se em consideração as amplas evidências na literatura financeira de que a suposição da normalidade dos retornos nem sempre é válida, é de se esperar que as estimativas amostrais estejam sujeitas a erros de estimação, os quais podem prejudicar a composição das carteiras obtidas com base nesses estimadores. Por exemplo, Michaud (1989), Best & Grauer (1991) e Mendes & Leal (2005), entre outros, observam que pequenas mudanças nos dados de entrada para o cálculo das

médias e da matriz de covariância dos retornos podem causar mudanças significativas nos pesos dos ativos das carteiras ótimas. Além disso, existem evidências empíricas que mostram a inferioridade destas carteiras instáveis em termos de desempenho fora da amostra (DeMiguel & Nogales, 2009).

Em virtude disso, a introdução de novos métodos para a obtenção de estimadores mais robustos para a solução de problemas de otimização tem sido um dos principais tópicos abordados em finanças nas últimas quatro décadas. Inúmeras soluções têm sido propostas na literatura para atenuar o erro de estimação nas médias e/ou nas covariâncias. Jagannathan & Ma (2003) propuseram a introdução de uma restrição de venda a descoberto em carteiras de mínima-variância como forma de induzir a estabilidade dos pesos. Eles argumentam que, como os erros de estimação nas médias são muito maiores do que os erros de estimação nas covariâncias, a estabilidade na composição da carteira de mínima-variância costuma ser maior em relação à carteira de média-variância. Jorion (1986) propôs um estimador mais robusto ao erro de estimação para as médias, enquanto Ledoit & Wolf (2003, 2004a,b) propuseram um estimador robusto de encolhimento para a estimação da matriz de covariância.

Ledoit & Wolf (2004a) colocaram-se contrários ao uso da matriz de covariância amostral para fins de otimização de carteiras. Os autores ressaltam que a matriz de covariância amostral clássica, estimada com os retornos históricos, apresenta baixo esforço computacional e ausência de vies, mas, em contrapartida, apresenta erro de estimação elevado, podendo comprometer o desempenho da otimização média-variância. Por outro lado, o uso exclusivo de estimadores mais sofisticados reduz o erro de estimação, mas introduz vieses. Assim, os autores sugerem a aplicação de técnicas Bayesianas de encolhimento para a estimação da matriz de covariância, combinando-se a matriz de covariância amostral com um estimador estruturado, a fim de encontrar os pesos ótimos da carteira com propriedades melhoradas Ledoit & Wolf (2003, 2004a,b)[ver].

Neste artigo buscamos examinar e comparar a aplicabilidade e o desempenho fora da amostra de diferentes técnicas de otimização de carteiras com relação ao desempenho da carteira ingênua igualmente ponderada $1/N$ e do índice Ibovespa. Para isso, foram utilizados os retornos de 45 ativos que fizeram parte do índice Ibovespa tanto na data inicial do período amostral, 02/03/2009, quanto na data final, 24/11/2011, totalizando $T = 677$ observações. Empiricamente, foram empregadas matrizes de covariância estimadas com base em cinco abordagens alternativas, amplamente empregadas por participantes do mercado e acadêmicos: matriz amostral, matriz RiskMetrics e três diferentes estimadores propostos por Ledoit & Wolf (2003), Ledoit & Wolf (2004a) e Ledoit & Wolf (2004b), respectivamente. O desempenho fora da amostra das diferentes técnicas de alocação de carteiras se baseou nas seguintes medidas: retorno médio, desvio-padrão, Índice de Sharpe (IS), turnover e custo *breakeven* das carteiras otimizadas e retorno acumulado em excesso ao CDI, considerando-se também diferentes frequências de rebalanceamento. Os resultados obtidos indicam que as estratégias quantitati-

vas de otimização representadas pelo modelo tradicional de média-variância de Markowitz e seu caso particular, o modelo de mínima-variância, são capazes de proporcionar resultados positivos tanto em termos absolutos como em termos de retorno ajustado ao risco, sobretudo quando comparados ao desempenho observado da estratégia ingênua de investimentos $1/N$ e do *benchmark* de mercado, dado pelo índice Ibovespa.

Vale observar que estudos anteriores avaliaram o desempenho de carteiras otimizadas utilizando dados do mercado acionário brasileiro. O trabalho de Thomé *et al.* (2011), por exemplo, propõe a construção de índices de variância mínima para o Brasil. Os autores concluem que o índice construído com base em carteiras de variância mínima irrestritas não consegue um desempenho superior ao índice de referência. Entretanto, os resultados das carteiras otimizadas melhoram à medida que uma restrição de alocação máxima em cada ativo é colocada. Nesse sentido, cabe ressaltar que este trabalho difere em vários aspectos em relação ao trabalho de Thomé *et al.* (2011). Primeiro, a especificação adotada neste artigo é mais flexível, pois não impõe uma restrição de alocação máxima em cada ativo. Segundo, a amostra e o período analisado são diferentes. Terceiro, consideramos um conjunto mais amplo de estimadores para a matriz de variâncias e covariâncias. Quarto, o algoritmo computacional utilizado para resolver o problema de otimização é distinto daquele usado pelos autores. Esses fatores podem explicar a diferença entre os resultados reportados neste trabalho em relação ao trabalho de Thomé *et al.* (2011).

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, expomos as diferentes técnicas de otimização de carteiras e de estimação da matriz de covariância usadas neste estudo. Na seção 3, descrevemos os conjuntos de dados, bem como a metodologia empregada na avaliação do desempenho fora da amostra. Na seção 4 apresentamos os resultados obtidos e, finalmente, na seção 5 expomos as considerações finais.

2. Otimização de Carteiras de Investimento

2.1 Métodos de otimização de carteiras

Esta seção buscará descrever brevemente dois modelos alternativos empregados nos procedimentos de otimização de carteiras de investimento, bem como a carteira ingênua, que será usada como *benchmark*. Inicialmente, apresentaremos a abordagem tradicional de Markowitz com base no modelo de otimização por média-variância, buscando-se uma alocação ótima ao longo da fronteira eficiente que minimize o risco da carteira para um dado nível de retorno esperado. A seguir, será apresentado o modelo de otimização por mínima-variância, que pode ser considerado um caso particular do modelo de média-variância, no qual a carteira ótima resultante é a de menor volatilidade. Finalmente, as duas estratégias apresentadas acima serão confrontadas com uma estratégia ingênua, na qual a carteira é formada atribuindo-se pesos iguais para todos os ativos.

Carteira de média-variância

A otimização média-variância de Markowitz (MEV) é a abordagem padrão para a construção de carteiras ótimas. A suposição básica por trás desse modelo é a de que as preferências de um investidor podem ser representadas por uma função (função de utilidade) dos retornos esperados e da variância da carteira. Santos (2010) ressalta que a escolha entre o prêmio de risco desejado (retorno esperado acima do CDI) depende da tolerância do investidor ao nível de risco. Indivíduos menos avessos ao risco podem estar dispostos a aceitar uma maior volatilidade em suas carteiras a fim de alcançar um maior prêmio de risco, enquanto investidores avessos ao risco preferirão carteiras menos voláteis, penalizando, portanto, o retorno esperado. Para incorporar o *trade-off* ótimo entre retorno esperado e risco, considere o problema enfrentado por um investidor que deseja alocar sua riqueza entre N ativos de risco, procurando saber que peso w_i deve dar a cada ativo de maneira a atingir o menor nível de risco para um dado nível de retorno esperado, conforme desenvolvido em Brandt (2010). A escolha do investidor está representada em um vetor $N \times 1$ de pesos, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)'$, onde cada peso representa o percentual do i -ésimo ativo mantido na carteira. Supomos que a carteira é totalmente investida, i.e., $\sum_{i=1}^N w_i = 1$, e $w_i \geq 0$, o que significa que não é permitido venda a descoberto.

Considerando os N ativos de risco com vetor de retorno aleatório \mathbf{R}_{t+1} , o retorno da carteira de t a $t+1$ é dado por $R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1}$, onde $R_{p,t+1}$ está condicionado aos pesos conhecidos em t . Suponha $\mathbf{R}_t \sim N(\mu_t, \Sigma_t)$, com $\mu_t = \{\mu_{1,t}, \dots, \mu_{N,t}\}$ e $\Sigma_t = \{\sigma_{ij,t}\}$ respectivamente, média e covariância. O excesso de retorno da carteira $R_{p,t} = \mathbf{w}'_t \mathbf{R}_t$ é normal com média $\mu_{p,t} = \mathbf{w}'_t \mu_t$ e variância $\sigma_{p,t}^2 = \mathbf{w}'_t \Sigma_t \mathbf{w}_t$.

Desta forma, de acordo com Markowitz (1952), o problema do investidor é um problema de minimização restrita, no sentido de que a carteira de média-variância é a solução do seguinte problema de otimização

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} - \frac{1}{\gamma} E[R_{p,t+1}] \quad (1)$$

sujeito a $\mathbf{l}' \mathbf{w} = 1$.

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

onde $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de pesos da carteira, $E[R_{p,t+1}]$ é a média amostral dos excessos de retorno da carteira, $\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}$ é a variância amostral dos retornos da carteira, γ é o parâmetro que mede o nível relativo de aversão ao risco e $w_i \geq 0$ representa a restrição de venda a descoberto. A restrição $\mathbf{l}' \mathbf{w} = 1$, onde $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor de uns, garante que a soma dos pesos da carteira é um. Para diferentes valores do parâmetro de aversão ao risco, obtêm-se diferentes carteiras na fronteira eficiente.

Matematicamente, o problema de média-variância descrito anteriormente é um problema de otimização quadrática. No caso restrito envolvendo restrições de de-

sigualdade, soluções analíticas não estão disponíveis e faz-se necessário empregar técnicas de otimização numérica.

Carteira de mínima-variância

A carteira de mínima-variância (MIV) corresponde a um caso especial da carteira de média-variância com parâmetro de aversão ao risco infinito ($\gamma = \infty$) e pode assim ser calculada a partir da resolução do seguinte problema de mínima-variância:

$$\min_w \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad (2)$$

sujeito a $\mathbf{l}' \mathbf{w} = 1$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Grande parte da literatura acadêmica recente tem se focado nas carteiras de mínima-variância, cuja estimação não leva em consideração o retorno esperado, sendo, portanto, menos sensível aos erros de estimação (Best & Grauer, 1992, Chan *et al.*, 1999, Ledoit & Wolf, 2003, DeMiguel & Nogales, 2009).

Carteira igualmente ponderada

A carteira ingênua $1/N$, como é amplamente conhecida, envolve manter uma carteira igualmente ponderada $w_i = 1/N$ em cada um dos ativos de risco disponíveis para investimento a cada data de rebalanceamento.

Neste artigo, a estratégia ingênua é usada como *benchmark* para monitoramento dos resultados, pois é de fácil implementação, não depende das estimativas dos momentos dos retornos dos ativos e de técnicas de otimização, além de ainda ser amplamente empregada como uma regra simples de alocação da riqueza entre ativos, apesar do desenvolvimento de modelos mais sofisticados e do aprimoramento dos métodos de estimação dos parâmetros desses modelos. Existem ainda evidências empíricas de que carteiras ingênuas igualmente ponderadas apresentam desempenho superior aos obtidos a partir de processos de otimização, como média-variância e mínima-variância (ver, por exemplo, Demiguel *et al.*, 2009).

Estimadores da matriz de covariância

A volatilidade e a correlação dos retornos dos ativos financeiros não são diretamente observáveis e devem ser calculadas a partir de dados amostrais. A alocação ótima de carteira depende dessas estimações e requer a resolução de um problema de otimização baseado em duas entradas: o retorno esperado para cada ativo, que representa a habilidade do gestor da carteira em prever movimentos futuros dos preços, e a matriz de covariância dos retornos dos ativos, que representa o controle do risco e o potencial de diversificação. Em função da presença de erros de estimação nessas entradas, a solução desses problemas pode ser instável e sensível a pequenas mudanças nas estimações, particularmente quando o número de ativos

excede o tamanho da amostra (ver Ledoit & Wolf, 2003). Nesta seção introduzimos diferentes métodos para estimar matrizes de covariâncias que serão empregadas no processo de otimização de carteiras.

Matriz de covariância amostral

A candidata mais usual para estimar a matriz de covariância é a matriz de covariância amostral empírica. Desta forma, seja R uma matriz $N \times T$ de N retornos de ativos em $T < L$ observações. A matriz de covariância amostral, Σ_t , pode ser calculada como

$$\Sigma_t = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \mu)(R_t - \mu)' \quad (3)$$

onde R_t é o vetor de retornos dos ativos no tempo t , T é o tamanho da janela de estimação, L é o número total de observações e $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ é a média amostral do retorno dos ativos.

A matriz de covariância amostral usa retornos históricos com igual ponderação e supõe que os retornos em t e $t-1$ não devem apresentar nenhum grau de correlação, com média e desvio-padrão constantes, ou seja, presumem-se retornos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), supondo-se, assim, que a matriz de covariância é constante ao longo do tempo. Apesar de atualmente em desuso, o objetivo desta aplicação será evidenciar o modelo clássico de otimização proposto por Markowitz, baseado nesse arcabouço teórico.

Entretanto, é amplamente conhecido na literatura que a hipótese de retornos *i.i.d* não se verifica na prática. Ledoit & Wolf (2004a) argumentam que, embora a matriz de covariância amostral seja sempre um estimador não-viesado, ela é um estimador extremamente ruidoso da matriz de covariância populacional quando N é grande. Neste sentido, o cálculo do estimador usando toda a amostra permite pouca adaptabilidade às informações mais recentes. Isto decorre do fato de que todas as observações da amostra recebem o mesmo peso. Para contornar este problema, utiliza-se, ao invés de toda a amostra, uma janela móvel (*rolling window*) com um número fixo de observações. Apesar de ainda manter peso igual para todas as observações usadas na janela, consegue-se alguma flexibilidade, pois se pode controlar a importância da observação mais recente a partir da escolha do tamanho da janela.

RiskMetrics

O J.P. Morgan & Reuters (1996) é uma metodologia desenvolvida pelo banco J. P. Morgan para estimar o risco de mercado em carteiras. Muito popular entre participantes do mercado, a abordagem RiskMetrics é apenas uma modificação da matriz de covariância amostral, baseada num método de média móvel exponencialmente ponderada para modelar covariâncias condicionais. Este método atribui maior importância às observações mais recentes, enquanto observações mais dis-

tantes no passado possuem pesos exponenciais menores. Neste modelo, a matriz de covariância condicional RiskMetrics, Σ_t , é dada por

$$\Sigma_t = (1 - \lambda)\mathbf{R}_{t-1}\mathbf{R}'_{t-1} + \lambda\Sigma_{t-1} \quad (4)$$

onde $0 < \lambda < 1$ é o fator de decaimento, com valor recomendado $\lambda = 0,94$ para dados diários.

A concepção do modelo do RiskMetrics baseia-se no fato de as variâncias dos retornos serem heterocedásticas e autocorrelacionadas. Além disso, as covariâncias são também autocorrelacionadas. Desta forma, conforme (4), verifica-se que a variância do retorno num dado instante t é composta por dois termos. O primeiro representa a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. O segundo, um termo autorregressivo, expressa a dependência temporal da variância dos retornos, fato estilizado encontrado em séries financeiras.

Método de encolhimento (shrinkage)

Devido à necessidade de estimar o risco das carteiras de ativos em mercados com milhares de ativos a partir de uma quantidade limitada de dados históricos de retornos, vem à tona a questão de quanta estrutura deve ser imposta para a matriz de covariância estimada. Por um lado, verifica-se que a estimação de uma matriz de covariância sem impor qualquer estrutura permite qualquer relação possível entre retornos de ativos individuais, mas tem como resultado um estimador com variância estimada alta. Já a imposição de uma estrutura na matriz de covariância leva à redução do número de parâmetros, podendo assim reduzir a variância da estimativa. No entanto, uma vez que é altamente improvável que a estrutura imposta reflita exatamente o processo gerador dos dados, esses estimadores estruturados são propensos a apresentar algum erro de especificação, conforme argumentam Ledoit & Wolf (2004b). Desta forma, avaliar quanta estrutura deve ser imposta sobre a matriz de covariância estimada equivale a explorar o *trade-off* entre variância estimada e erro de especificação do modelo.

Estimadores de encolhimento têm sido usados na literatura para reduzir o ruído inerente aos estimadores de médias e covariâncias. Em seu artigo seminal, Stein (1956), a partir da aplicação do método de encolhimento na estimação das médias, encontrou que o *trade-off* ótimo entre viés e erro de estimação pode ser manipulado simplesmente tomando uma média ponderada do estimador viesado e do não-viesado. Este método consiste em “encolher” o estimador não-viesado, mas que contém erro de estimação, em direção a um alvo fixo representado pelo estimador viesado, puxando-se os coeficientes mais extremos em direção aos valores centrais e, desta forma, produzindo uma matriz de covariância positiva-definida e bem condicionada. Já Ledoit & Wolf (2003), empregaram esta abordagem para diminuir a sensibilidade das carteiras ótimas de Markowitz à incerteza das entradas, propondo um método Bayesiano alternativo para controlar a quantidade ótima de estrutura em um estimador da matriz de covariâncias. Sendo assim,

podemos representar a estimativa encolhida da matriz de covariância Σ como uma média ponderada otimamente de dois estimadores existentes,

$$\Sigma_t = \alpha \mathbf{F}_t + (1 - \alpha) \hat{\Sigma}_t \quad (5)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$ é a intensidade de encolhimento otimamente escolhida, que pode ser interpretada como uma medida do peso que é dado ao estimador estruturado, \mathbf{F} é uma matriz positiva-definida que representa o estimador estruturado e $\hat{\Sigma}$ é a matriz de covariância amostral.

Dado que α não é observável, Ledoit e Wolf propuseram três estimadores altamente estruturados para serem usados no processo de estimação da matriz de covariância baseada no método de encolhimento. De acordo com Ledoit & Wolf (2004a), para ser considerado um estimador estruturado, a matriz \mathbf{F} deve envolver somente um pequeno número de parâmetros independentes, i.e., deve ser estruturada, e também deve refletir as características importantes da quantidade desconhecida sendo estimada. Desta forma, Ledoit & Wolf (2003) inicialmente sugeriram o modelo de um único fator de Sharpe (1963) como um possível estimador estruturado para a matriz \mathbf{F} , a ser combinado linearmente com a matriz de covariância amostral no processo de estimação da matriz de covariância (*LW1*). Neste processo, a matriz de covariância é dada por um modelo de fator único, enquanto a matriz de covariância amostral pode ser interpretada como um modelo N – fatorial (com cada ativo sendo um fator e não existindo resíduos). Já em Ledoit & Wolf (2004a), a matriz de covariância foi estimada a partir da combinação linear da matriz de covariância amostral com um estimador estruturado dado por uma matriz de covariância de correlação constante entre os ativos da carteira (*LW2*). O desempenho desse estimador mostrou-se comparável a do *LW1*, mas seus custos de implementação foram menores. Finalmente, Ledoit & Wolf (2004b) propuseram um estimador estruturado simples e fácil de ser calculado e interpretado. Trata-se da combinação linear da matriz de covariância amostral com a matriz identidade (*LW3*), a qual assume que todas as variâncias são iguais a 1 e as covariâncias são nulas. Em todos os casos (*LW1*, *LW2* e *LW3*) a intensidade de encolhimento α é obtida por meio de expressões em forma fechada, o que torna esta abordagem também muito atrativa do ponto de vista da implementação computacional.

3. Avaliação empírica

3.1 Dados

Para comparar as diferentes estratégias de alocação de carteiras foi usado um conjunto de dados que compreende as observações diárias de $N = 45$ ações que fizeram parte do índice Ibovespa ao longo do período compreendido entre 02/03/2009 a 24/11/2011, perfazendo um total de $L = 677$ retornos diários. Os retornos foram calculados como a diferença dos logaritmos de preços e a taxa livre de risco empregada para calcular os excessos de retorno foi o CDI diário. Os dados foram obtidos na base de dados Economática. Na Tabela 1 apresenta-

mos as 45 ações negociadas na BMF&Bovespa que foram usadas neste estudo, a classificação destas ações quanto ao tipo em ordinárias (ON) ou preferenciais (PN), bem como as principais estatísticas descritivas obtidas a partir da amostra dos retornos diários de cada ativo.

Tabela 1

Estatísticas descritivas dos retornos dos ativos usados no processo de otimização média-variância e mínima-variância

Código	Empresa	Tipo	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
AMBV4	AMBEV	PN	36,6	10,75	15,82	58,04	0,14	-1,01
BBAS3	BANCO DO BRASIL	ON ED	24,31	4,15	10,71	31,58	-1,23	1,28
BBDC4	BRADESCO	PN	27,19	3,91	14,86	34,94	-0,84	0,54
BRAP4	BRADESPAR	PN	33,52	6,06	18,08	45,06	-0,62	-0,36
BRKM5	BRASKEM	PNA	13,48	4,75	4,07	23,93	0,03	-0,74
BTOW3	B2W VAREJO	ON	30,98	10,71	9,77	54,91	0,13	-0,7
BVMF3	BMF BOVESPA	ON	10,47	1,52	5,05	14,33	-0,84	1,61
CCRO3	CCR RODOVIAS	ON	9,3	2,02	4,52	12,33	-0,53	-0,75
CESP6	CESP	PNB	23,22	4,72	11,79	31,93	-0,5	-0,53
CMIG4	CEMIG	PN	18,31	2,44	13,66	23,44	0,3	-0,86
CPFE3	CPFL ENERGIA	ON	17,15	2,92	11,68	22,26	-0,03	-1,27
CPLE6	COPEL	PNB	33,62	5,84	18,48	43,9	-0,6	-0,42
CRUZ3	SOUZA CRUZ	ON	13,74	3,7	7,31	22,49	0,18	-1,04
CSAN3	COSAN	ON	21,45	4,28	9,12	28,25	-1	0,4
CSNA3	SID NACIONAL	ON	22,15	4,63	11,8	32	-0,48	-0,72
CYRE3	CYRELA REALT	ON	17,85	4,23	6,07	26,23	-0,44	-0,54
ELET3	ELETROBRAS	ON	18,83	2,45	14,1	26,03	-0,03	-0,74
ELET6	ELETROBRAS	PNB	22,55	2,34	17,34	28,49	0,03	-0,85
EMBR3	EMBRAER	ON	10,27	1,81	5,37	14,01	-0,02	-0,61
GFA3	GAFISA	ON	10,33	2,68	4,15	15,11	-0,42	-0,91
GGBR4	GERDAU	PN	20,54	4,8	10,6	30,27	-0,23	-0,91
GOAU4	GERDAU MET	PN	25,04	5,57	13,63	37,31	-0,14	-0,89
GOLL4	GOL	PN	19,03	6,12	6,32	30,13	-0,49	-0,85
ITSA4	ITAUSA	PN ED	9,32	1,48	4,62	11,92	-0,74	0,03
JBSS3	JBS	ON	6,94	1,69	3,53	10,77	0,12	-0,74
KLBN4	KLABIN S/A	PN	4,56	1,03	2,28	6,88	-0,48	-0,39
LAME4	LOJAS AMERIC	PN INT	10	1,95	4,02	14,3	-0,88	0,51
LIGT3	LIGHT S/A	ON	20,45	3,28	15,82	27,74	0,66	-1,02
LREN3	LOJAS RENNER	ON INT	41,2	13,65	12,16	62,46	-0,51	-0,98
NATU3	NATURA	ON EDJ	33,84	7,23	17,34	46,32	-0,31	-0,78
PCAR4	P.ACUCAR-CBD	PN	56,23	11,07	27,5	72,59	-1,12	0,16
PETR3	PETROBRAS	ON	30,71	5,41	19,18	41,13	-0,12	-1
PETR4	PETROBRAS	PN	26,52	4,15	17,61	35,95	0,11	-0,64
RDCD3	REDECARD	ON	22,47	2,3	16,63	29,83	0,28	0,63
RSID3	ROSSI RESID	ON	11,71	2,92	2,82	17,25	-1,21	1,27
SBSP3	SABESP	ON	34,48	7,29	19,01	48,15	0,16	-1,13
TAMM4	TAM S/A	PN	29,05	7,34	11,63	41,64	-0,5	-0,6
TMAR5	TELEMAR N L	PNA	49,39	5,37	35,54	64,72	0,58	0,16
TNLP3	TELEMAR	ON	32,1	5,09	18,35	41,55	-0,83	0,2
TNLP4	TELEMAR	PN	25,75	3,52	16,15	34,11	-0,41	0,4
TRPL4	TRAN PAULIST	PN	40,61	4,56	31,01	48,76	-0,03	-1,27
USIM3	USIMINAS	ON	22,65	3,84	10,29	31,53	-0,89	1,54
USIM5	USIMINAS	PNA	19,35	4,87	9,99	30,44	-0,23	-0,83
VALE3	VALE R DOCE	ON	43,07	6,93	25,56	56,13	-0,59	-0,46
VALE5	VALE R DOCE	PNA	37,77	6,32	21,89	48,94	-0,7	-0,42

3.2 Descrição da avaliação fora da amostra

Na comparação do desempenho fora da amostra dos modelos de otimização de carteiras foi empregada a metodologia de janelas móveis, similar a de DeMiguel & Nogales (2009) e Santos (2010). Inicialmente foram realizadas as estimações das médias e da matriz de covariância dos retornos dos 45 ativos com uma janela de estimação de $T = 252$ observações que, em dados diários, corresponde a um ano. Segundo, usando estas estimativas amostrais, seguimos DeMiguel & Nogales (2009) e calculamos a carteira ótima de média-variância para um parâmetro de aversão ao risco $\gamma = 1$ bem como a carteira ótima de mínima-variância. Terceiro, repetimos esse procedimento “rolando” a janela de estimação para frente um período, incluindo a informação mais recente e eliminando a observação mais antiga, e seguimos com esse processo até atingir o final do conjunto de observações. Ao final desse processo teremos gerado 425 ($L - T$) vetores de pesos para cada estratégia, onde L é o número total de observações. É importante notar que, como na implementação dos modelos foram empregadas estimações com janelas móveis, as primeiras 252 observações não foram incluídas quando avaliamos o desempenho das diferentes estratégias. Além disso, note que a abordagem Risk-Metrics da matriz de covariância não envolve nenhum parâmetro desconhecido, uma vez que estabelecemos $\lambda = 0,94$.

Todas as simulações fora feitas em um Intel PC com 2.8GHz e 1Gb RAM. Como ferramenta de cálculo para a implementação de alguns problemas de otimização foi empregado o *software* MATLAB, aplicando-se o pacote computacional CVX (Grant & Boyd, 2008).

3.3 Medidas de desempenho

Para cada estratégia, seguindo a metodologia de janelas móveis descrita anteriormente, calculamos os pesos w_t para cada t . A manutenção do portfólio w_t por um período proporciona um excesso de retorno em $t + 1$ dado por $\hat{R}_{t+1} = w'_t R_t$, onde \hat{R}_{t+1} é o retorno da carteira. Depois de calculados ($L - T$) excessos de retorno, foram empregadas as seguintes medidas de comparação do desempenho fora da amostra para as diferentes estratégias de alocação de carteiras: média de excesso de retorno, desvio-padrão, Índice de Sharpe (IS), *turnover* da carteira, dados respectivamente por

$$\hat{\mu} = \frac{1}{L - T} \sum_{t=T}^{L-1} w'_t R_{t+1} \quad (6)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} (w'_t R_{t+1} - \hat{\mu})^2} \quad (7)$$

$$IS = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad (8)$$



$$Turnover = \frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|) \quad (9)$$

onde $w_{j,t}$ é o peso da carteira no ativo j no tempo $t + 1$, mas antes do rebalanceamento e $w_{j,t+1}$ é o peso desejado da carteira no ativo j no tempo $t + 1$. O *turnover* da carteira, por ser uma medida da variabilidade dos pesos da carteira, pode indiretamente indicar a magnitude dos custos de transação associados a cada estratégia.

Para mensurar o impacto dos custos de transação no desempenho das diferentes carteiras (Han, 2006, DeMiguel & Nogales, 2009, Santos *et al.*, 2012), consideramos a média dos retornos líquidos de custos de transação, $\hat{\mu}_{CT}$, dada por

$$\hat{\mu}_{CT} = \frac{1}{L - T} \sum_{t=T}^{L-1} \left[(1 + w'_t R_{t+1}) (1 - c \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|)) - 1 \right] \quad (10)$$

onde c é a taxa a ser paga para cada transação. Ao invés de supormos um valor arbitrário para c , apresentamos o valor de c tal que a média do retorno líquido de custos de transação é igual a zero, conhecido como custo de transação *breakeven*. Vale observar que as estratégias que obtiverem custos *breakeven* mais altos são preferíveis, pois o custo de transação necessário para tornar essas estratégias isentas de lucro é mais alto.

Avaliamos também o desempenho das diversas carteiras considerando frequências de rebalanceamento alternativas: diária, semanal e mensal. Para testar a significância estatística das diferenças entre o desvio padrão e índice de Sharpe dos retornos das estratégias quantitativas *versus* o desvio padrão e índice de Sharpe do *benchmark* de mercado (índice Ibovespa), seguimos DeMiguel & Nogales (2009) e usamos o *bootstrap* estacionário de Politis & Romano (1994) com $B = 1.000$ reamostragens e tamanho de bloco $b = 5$. Os p -valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida em Ledoit & Wolf (2008, Observação 3.2).

4. Resultados

A Tabela 2 apresenta os resultados das técnicas de otimização de carteiras em termos de média de excesso de retorno, desvio-padrão, Índice de Sharpe (IS), *turnover*, custo *breakeven* das carteiras e retorno acumulado em excesso ao CDI. No processo de otimização, foram empregadas matrizes de covariâncias obtidas segundo as abordagens discutidas na Seção 2.2. Para efeitos de comparação de desempenho, utilizou-se como *benchmark* a carteira ingênua, obtida por meio da estratégia $1/N$, e a carteira de mercado, representada pelo índice Ibovespa (IBO). Para facilitar a interpretação dos resultados, os retornos, o desvio-padrão e o índice de Sharpe de cada estratégia reportados na Tabela 2 foram anualizados envolvendo diferentes frequências de rebalanceamento (diária, semanal e mensal).

Os resultados exibidos na Tabela 2 mostram que, em termos de retorno médio anualizado, enquanto as carteiras $1/N$ e de mercado (Ibovespa) apresentaram resultados negativos no período examinado (-19,51% e -24,28%, respectivamente), dentre as carteiras ótimas obtidas via técnicas de otimização, a de média-variância apresentou os maiores retornos médios, seguida pela carteira de mínima-variância. Com exceção das carteiras estimadas via RiskMetrics, os retornos médios não sofreram mudanças bruscas ao alterar-se a frequência de rebalanceamento, verificando-se uma elevação dos retornos ao se diminuir a frequência de rebalanceamento de diária para semanal. Assim, de maneira geral, a carteira ótima de média-variância estimada com a matriz de covariância obtida via *LW1* é a que apresenta o maior retorno médio, seguida pela carteira estimada com a matriz amostral. Analogamente, a carteira de mínima-variância estimada por meio de *LW1* apresenta os melhores resultados.

Tabela 2

Desempenho fora da amostra (retorno médio, desvio-padrão dos retornos, Índice de Sharpe, *turnover* e custo *breakeven* da carteira, retorno acumulado bruto e retorno acumulado em excesso ao CDI) para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. MEV e MIV indicam, respectivamente, otimização média-variância e mínima-variância. O asterisco indica que o coeficiente da estratégia é estatisticamente diferente ao obtido pelo *benchmark* de mercado dado pelo Ibovespa (IBO). 1/N indica a carteira ingênua igualmente ponderada. Retornos, desvio-padrão e o índice de Sharpe de cada estratégia foram anualizados

	Benchmarks		Matriz Amostral		Matriz RiskMetrics		Matriz LW1		Matriz LW2		Matriz LW3	
	1/N	IBO	MEV	MIV	MEV	MIV	MEV	MIV	MEV	MIV	MEV	MIV
Rebalanceamento diário												
Retorno médio (%)	-19,51	-24,28	3,52	2,26	7,02	4,34	3,52	2,8	2,96	1,29	2,89	1,5
Desvio-padrão (%)	20,6	22,8	14,73*	14,81*	14,89*	14,80*	14,68*	14,74*	14,75*	14,88*	14,74*	14,83*
Índice de Sharpe	-0,95	-1,06	0,24*	0,15*	0,47*	0,29*	0,24*	0,19*	0,20*	0,09*	0,20*	0,10*
<i>Turnover</i>	0,01		0,05	0,05	0,24	0,23	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,04
<i>Breakeven</i> (%)	-2,76		1,1	1,03	0,27	0,24	1,24	1,22	1,18	1,09	1,09	1,03
Retorno acumulado bruto (%)	-17,3	-24,31	24,11	21,47	31,61	25,83	24,12	22,62	22,94	19,49	22,81	19,93
Excesso de retorno acumulado (%)	-30,59	-36,48	4,18	1,97	10,48	5,62	4,19	2,94	3,2	0,31	3,09	0,68
Rebalanceamento semanal												
Retorno médio (%)	-19,51	-24,28	3,63	2,23	-3,23	-4,24	3,89	2,72	3,54	1,21	3,16	1,52
Desvio-padrão (%)	20,6	22,8	14,83*	14,88*	15,44*	15,41*	14,78*	14,8*	14,85*	14,95*	14,85*	14,9*
Índice de Sharpe	-0,95	-1,06	0,24*	0,15*	-0,21*	-0,28	0,26*	0,18*	0,24*	0,08*	0,21*	0,10*
<i>Turnover</i>	0,01		0,03	0,03	0,06	0,06	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
<i>Breakeven</i> (%)	-2,76		1,62	1,51	0,5	0,43	1,82	1,73	1,76	1,53	1,62	1,5
Retorno acumulado bruto (%)	-17,3	-24,31	24,32	21,4	10,57	8,71	24,88	22,44	24,13	19,3	23,32	19,95
Excesso de retorno acumulado (%)	-30,59	-36,48	4,36	1,91	-7,19	-8,75	4,83	2,78	4,2	0,15	3,52	0,69
Rebalanceamento mensal												
Retorno médio (%)	-19,51	-24,28	2,21	1,45	0	-1,63	2,68	1,9	2,41	0,9	1,84	0,87
Desvio-padrão (%)	20,6	22,8	15,09*	15,04*	15,02*	14,97*	15,06*	14,97*	15,11*	15,09*	15,14*	15,06*
Índice de Sharpe	-0,95	-1,06	0,15*	0,10*	0,00*	-0,11*	0,18*	0,13*	0,16*	0,06*	0,12*	0,06*
<i>Turnover</i>	0,01		0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<i>Breakeven</i> (%)	-2,76		2,01	1,93	1,95	1,65	2,22	2,15	2,18	1,98	2	1,89
Retorno acumulado bruto (%)	-17,3	-24,31	21,3	19,76	16,87	13,73	22,28	20,7	21,69	18,65	20,53	18,59
Excesso de retorno acumulado (%)	-30,59	-36,48	1,82	0,53	-1,89	-4,53	2,65	1,32	2,15	-0,4	1,17	-0,45

Com relação ao desvio-padrão das diferentes carteiras, verificamos que o nível de risco não varia substancialmente quando alteramos o estimador empregado para obter a matriz de covariâncias. O risco das carteiras otimizadas apresenta uma moderada elevação quando empregamos a frequência de rebalanceamento mensal, na qual a carteira de média-variância apresentou um risco mais elevado em comparação com a carteira de mínima-variância. Vale observar, entretanto, que todas as carteiras de média-variância e de mínima-variância apresentaram um nível de risco menor do que índice Ibovespa (22,8%) e a carteira ingênua (20,6%), usados como *benchmarks*. Nota-se também que o risco da carteira não varia substancialmente quando se altera a frequência de rebalanceamento dos pesos da carteira.

Quando comparamos o desempenho ajustado ao risco, dado pelo Índice de Sharpe (IS), os resultados mostram que a carteira de média-variância apresenta, em todos os modelos, resultados melhores do que as carteiras de mínima-variância. Quando usamos a frequência de rebalanceamento diária, as carteiras obtidas via RiskMetrics apresentam o melhor desempenho ajustado ao risco. No entanto, ao se considerar as frequências de rebalanceamento semanal e mensal, os melhores resultados são apresentados pelas carteiras obtidas pelo estimador *LW1* que, de maneira geral, apresenta o melhor resultado dentre todos os estimadores, seguido pelas carteiras obtidas pelo estimador amostral e pelo estimador *LW2*.

Com o intuito de avaliar se o desempenho com relação ao risco das carteiras de média-variância e de mínima-variância, dado pelo Índice de Sharpe, foi estatisticamente diferente do desempenho observado do Ibovespa, aplicou-se um teste estatístico de diferenças entre os IS discutido na Seção 3.3, considerando-se um nível de significância de 10%. Tal procedimento também foi aplicado para o desvio-padrão dos retornos de cada ativo. Os resultados obtidos indicam que o IS da carteira de média-variância e da carteira de mínima-variância foi estatisticamente diferente (maior) que o IS do Ibovespa para as cinco diferentes especificações empregadas para a estimação da matriz de covariâncias, com exceção da carteira de mínima-variância obtida via RiskMetrics usando frequência de rebalanceamento semanal, no qual o Índice de Sharpe foi estatisticamente igual ao Ibovespa. Com relação ao desvio-padrão, resultado semelhante foi encontrado, com os testes estatísticos mostrando que a volatilidade das carteiras de média-variância e de mínima-variância é estatisticamente diferente (menor) do que a volatilidade do Ibovespa. Tais resultados estão indicados na Tabela 2 por meio de um asterisco.

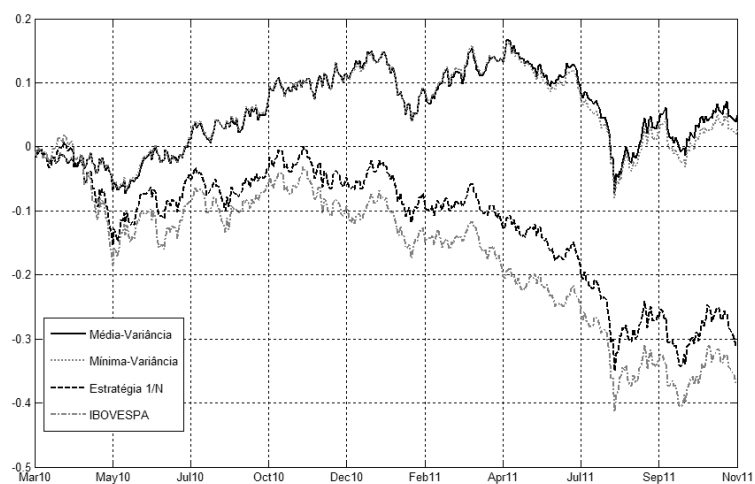
Em termos de *turnover* da carteira, como era de se esperar, observa-se uma diminuição do turnover na medida em que a frequência de rebalanceamento se torna menor, bem como o menor valor observado entre todas as estratégias de alocação de carteiras foi obtido com a carteira ingênua $1/N$. O melhor desempenho ao se utilizar a frequência de rebalanceamento diária foi alcançado pelo modelo RiskMetrics, seguido pelos modelos *LW1* e *LW2*, os quais apresentaram resultados semelhantes. Nas demais frequências de rebalanceamento empregadas, com exceção do estimador RiskMetrics, todas as carteiras apresentaram o mesmo *turnover*.

Comparando as carteiras obtidas por meio de diferentes técnicas para a estimação da matriz de covariâncias, observamos que as carteiras obtidas via estimador *LW1* apresentam o maior custo de transação *breakeven*, que mostra o nível de custo de transação que poderia reduzir o excesso de retorno a zero, seguida pelas carteiras obtidas via *LW2* e estimador amostral. Ao compararem-se estratégias alternativas de otimização de carteiras tendo por base o *breakeven*, a carteira com o maior custo de *breakeven* será melhor que as demais, pois é necessário um maior custo de transação para reduzir o excesso de retorno a zero.

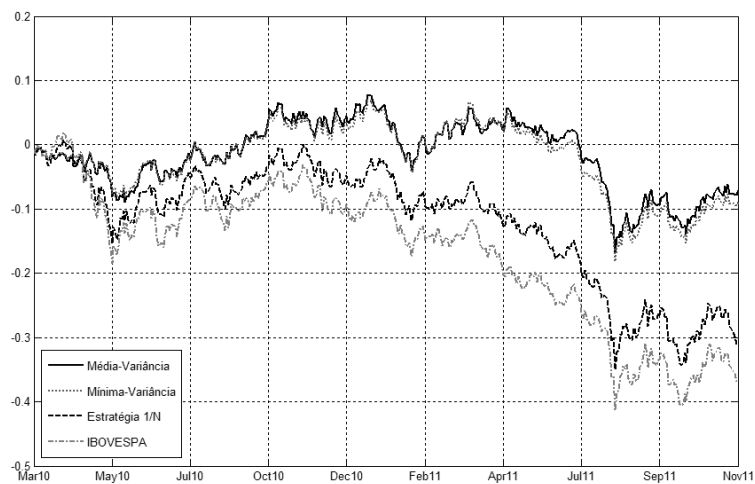
Com relação às carteiras ótimas obtidas com a aplicação do modelo RiskMetrics para a estimação da matriz de covariância, verificamos que as carteiras de média-variância e mínima-variância estimadas com rebalanceamento diário apresentam o maior retorno médio e Índice de Sharpe, bem como o maior retorno acumulado líquido dentre todas as outras especificações. No entanto, esse resultado não se confirma para frequências de rebalanceamento semanal e mensal, pois, ao diminuir-se a frequência de rebalanceamento das carteiras, verifica-se uma significativa deterioração do desempenho destes, que passam a apresentar os piores resultados relativos, bem como uma substancial elevação de suas volatilidades.

Quando comparamos os retornos acumulados em excesso ao CDI de cada estratégia verificamos que, para a frequência de rebalanceamento diária, a carteira de média-variância estimada com o modelo RiskMetrics apresenta o maior retorno acumulado em relação ao ativo livre de risco (10%), seguida pela carteira de mínima-variância estimada via RiskMetrics (6%) e pela carteira ótima de média-variância estimado via *LW1* e estimador amostral (4%). Com relação às frequências de rebalanceamento semanais e mensais, as carteiras de média-variância obtidas pelas técnicas de otimização a partir do estimador *LW1* apresentam o maior retorno acumulado, seguidas pelas carteiras estimadas por meio do estimador amostral e pelo estimador *LW3* para a matriz de covariâncias, enquanto as carteiras obtidas com o modelo RiskMetrics apresentaram o pior desempenho.

Para ilustrar ainda mais os resultados, na Figura 1 apresentamos o gráfico com os retornos acumulados em excesso ao CDI das carteiras obtidas com o estimador robusto *LW1* e do modelo RiskMetrics para a estimação das matrizes de covariâncias. Consideramos as carteiras obtidas com frequência de rebalanceamento semanal para o período de março de 2010 a novembro de 2011, com restrição de venda a descoberto.

**Figura 1**

Retornos acumulados em excesso ao CDI para as estratégias de otimização por média-variância e mínima-variância empregando o estimador estruturado $LW1$ para a estimação da matriz de covariância, e os excessos de retorno da estratégia $1/N$ e do Ibovespa para o mesmo período

**Figura 2**

Retornos acumulados em excesso ao CDI para as estratégias de otimização por média-variância e mínima-variância empregando o modelo RiskMetrics para a estimação da matriz de covariância, e os excessos de retorno da estratégia $1/N$ e do Ibovespa para o mesmo período

Como podemos observar, as carteiras ótimas obtidas via técnicas de otimização (média-variância e mínima-variância) apresentaram um desempenho substancialmente superior aos *benchmarks*, dados pela carteira ingênua $1/N$ e pelo índice Ibovespa, tanto para o estimador $LW1$ quanto para o RiskMetrics. Em ambos os casos, a carteira de média-variância apresentou um desempenho ligeiramente superior à carteira de mínima-variância. No entanto, nota-se claramente que as carteiras obtidas a partir do estimador $LW1$, que apresentam o maior IS , conforme podemos observar na Tabela 2, proporcionam um retorno acumulado em excesso ao CDI muito superior ao obtido pelo modelo RiskMetrics, que possui um retorno acumulado negativo para o período considerado.

Para comparar a estabilidade das diferentes estratégias consideradas, exibimos em um gráfico os pesos das carteiras variantes no tempo para cada estratégia para os $L - T$ períodos obtidos via estimação com janelas móveis. Novamente, usamos os pesos de carteiras obtidas a partir do estimador $LW1$ e da matriz RiskMetrics, considerando frequência de rebalanceamento semanal.

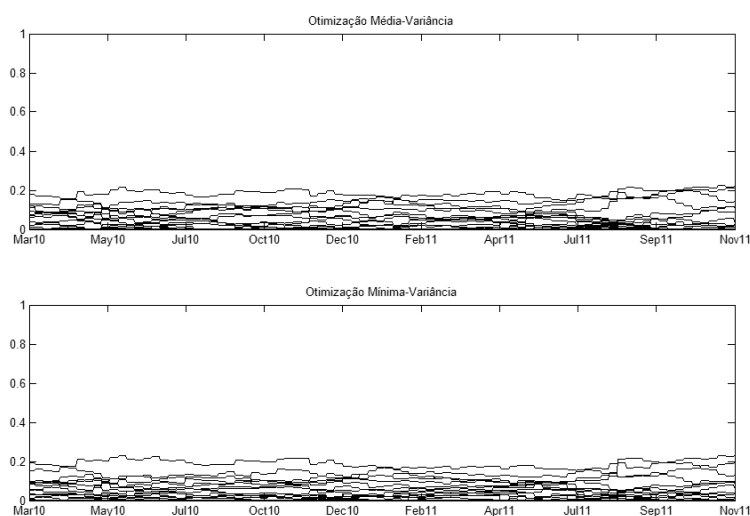
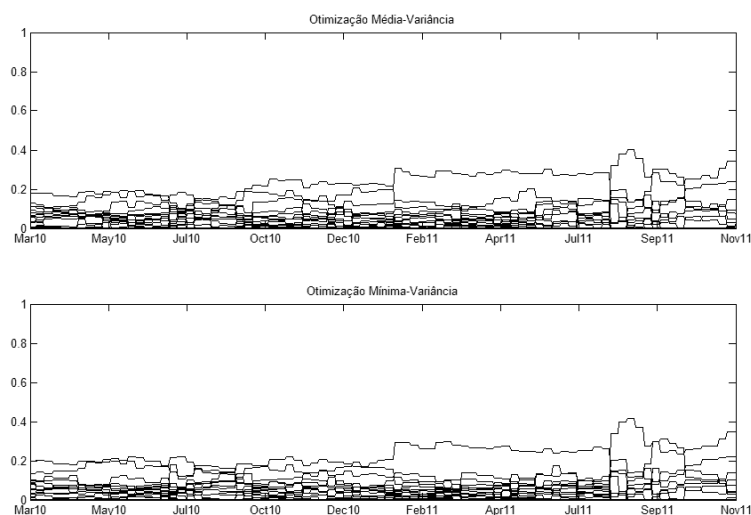


Figura 3

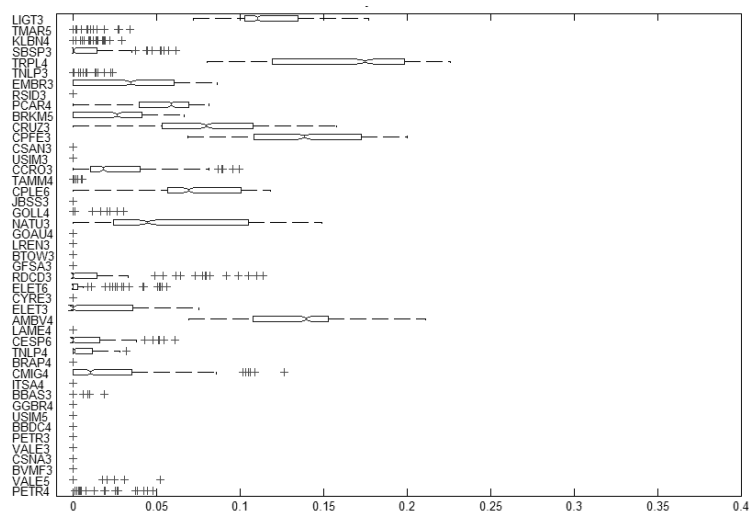
Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância e mínima-variância empregando o estimador estruturado $LW1$ para estimação da matriz de covariância

**Figura 4**

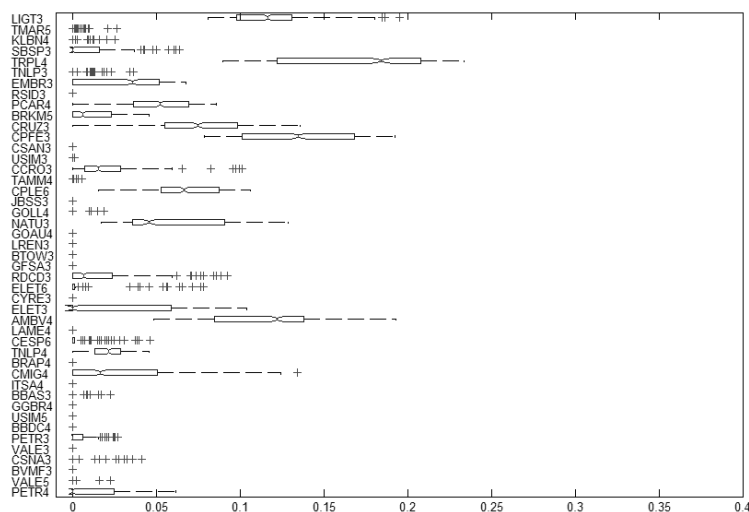
Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância e mínima-variância empregando o modelo RiskMetrics para estimação da matriz de covariância

As figuras 3 e 4 mostram as variações dos pesos dos ativos em carteira ao longo do tempo para as diferentes estratégias de otimização, considerando-se a estimação das matrizes de covariância com o estimador robusto *LW1* e com o modelo RiskMetrics, respectivamente. É possível observar que as estratégias de otimização por média-variância e por mínima-variância empregando matrizes de covariância obtidas via estimador *LW1* produziram carteiras relativamente estáveis ao longo do tempo, enquanto as carteiras obtidas via modelo RiskMetrics se mostraram mais instáveis. Tal resultado corrobora com o fato destas últimas possuírem o maior *turnover* dentre todas as estratégias, considerando-se uma frequência de rebalanceamento semanal (0,06 para a carteira de média-variância e para a carteira de mínima-variância), e o menor custo de transação *breakeven* (0,5 para a carteira de média-variância e 0,43 para a carteira de mínima-variância).

Para ilustrar ainda mais os resultados encontrados, apresentamos nas figuras 5 e 6 os diagramas de caixas (*box-plots*) dos pesos das carteiras de média-variância e de mínima-variância obtidas por meio do estimador *LW1*. Na figura 5, observamos que a carteira ótima de média-variância possui maior percentual dos pesos alocados no ativo TRPL4, com mediana em torno de 17%, seguido pelos ativos CPFE3 e AMBV4, que apresentam mediana da distribuição dos pesos da carteira em torno de 14%. Já na figura 6, apresentamos os *box-plots* dos pesos da carteira de mínima-variância, que apresenta aproximadamente a mesma distribuição dos pesos que a carteira de média-variância, com mediana dos pesos em torno de 18% para o ativo TRPL4, 14% para CPFE3, 13% para AMBV4 e 12% para LIGT3.

**Figura 5**

Box-plot dos pesos da carteira de média-variância obtida por meio do uso do estimador *LW1* para a matriz de covariâncias

**Figura 6**

Box-plot dos pesos da carteira de mínima-variância obtida por meio do uso do estimador *LW1* para a matriz de covariâncias

4.1 Testes de robustez

Os resultados reportados na Tabela 2 pressupõem um investidor com nível de aversão ao risco $\gamma = 1$. Na Tabela 3, reportamos o desempenho fora da amostra da carteira de média-variância para diferentes especificações da matriz de covariâncias, considerando-se diferentes níveis de aversão ao risco $\gamma = 3, 5, 7$. Os retornos, o desvio-padrão e o índice de Sharpe de cada estratégia apresentados na Tabela 3 foram anualizados envolvendo diferentes frequências de rebalanceamento (diária, semanal e mensal).

Os resultados apresentados na Tabela 3 mostram que, quando consideramos a frequência de rebalanceamento diária, a carteira de média-variância obtida por meio da matriz RiskMetrics é a que apresenta o melhor desempenho fora da amostra para os diferentes níveis de aversão ao risco, seguida pela carteira obtida pela matriz LW1. Para a frequência de rebalanceamento semanal, a carteira obtida por meio da matriz LW1 é a que apresenta o melhor desempenho em termos de retorno médio, desvio-padrão, índice de Sharpe, custo *breakeven* e retorno acumulado, seguida pela carteira obtida via matriz amostral, ao considerarem-se níveis alternativos de aversão ao risco. Finalmente, ao analisar a carteira de média-variância com rebalanceamento mensal, os melhores resultados foram obtidos por meio do emprego da matriz LW1, seguida pela matriz amostral e pela matriz LW2. Desta forma, de maneira análoga aos resultados apresentados na Tabela 2, na qual se considerou um nível de aversão ao risco $\gamma = 1$ para a obtenção das carteiras de média-variância, para níveis alternativos de aversão ao risco (γ_i , tal que $i = 3, 5, 7$), os resultados em termos de desempenho fora da amostra foram semelhantes. De maneira geral, a carteira obtida por meio do uso da matriz LW1 é a que apresenta o melhor desempenho fora da amostra, seguida pela carteira obtida por meio da matriz amostral. O uso da matriz RiskMetrics proporciona o melhor desempenho fora da amostra quando usamos a frequência de rebalanceamento diária, mas este desempenho deteriora-se significativamente ao se aumentar a frequência de rebalanceamento para semanal e mensal.

Tabela 3

Desempenho fora da amostra (retorno médio, desvio-padrão dos retornos, Índice de Sharpe, *turnover* e custo *breakeven* da carteira, retorno acumulado bruto e retorno acumulado em excesso ao CDI) para a otimização média-variância considerando diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. O asterisco indica que o coeficiente da estratégia é estatisticamente diferente ao obtido pelo *benchmark* de mercado dado pelo Ibovespa (IBO). Retornos, desvio-padrão e o índice de Sharpe de cada estratégia foram anualizados

	Coeficiente de Aversão ao Risco γ														
	$\gamma = 3$					$\gamma = 5$					$\gamma = 7$				
	Amostral	RM	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	LW1	LW2	LW3
Rebalanceamento diário															
Retorno médio (%)	2,99	5,27	3,22	1,98	2,24	2,72	4,91	3,04	1,69	1,93	2,59	4,76	2,97	1,58	1,8
Desvio-padrão (%)	14,75*	14,80*	14,69*	14,80*	14,76*	14,77*	14,80*	14,70*	14,83*	14,78*	14,78*	14,80*	14,71*	14,84*	14,80*
Índice de Sharpe	0,20*	0,36*	0,22*	0,13*	0,15*	0,18*	0,33*	0,21*	0,11*	0,13*	0,18*	0,32*	0,20*	0,11*	0,12*
<i>Turnover</i>	0,05	0,23	0,04	0,04	0,04	0,05	0,23	0,04	0,04	0,04	0,05	0,23	0,04	0,04	0,04
<i>Breakeven</i> (%)	1,09	0,25	1,27	1,15	1,09	1,07	0,25	1,25	1,13	1,07	1,06	0,24	1,24	1,12	1,06
Retorno acumulado bruto (%)	23	27,82	23,5	20,91	21,46	22,44	27,04	23,13	20,32	20,82	22,18	26,73	23	20,08	20,56
Excesso de retorno acumulado (%)	3,25	7,3	3,68	1,49	1,96	2,78	6,65	3,36	1	1,42	2,56	6,38	3,23	0,8	1,2
Rebalanceamento semanal															
Retorno médio (%)	2,97	-3,73	3,26	2,09	2,26	2,67	-3,88	3,06	1,73	1,95	2,54	-3,96	2,96	1,58	1,83
Desvio-padrão (%)	14,82*	15,36*	14,76*	14,86*	14,83*	14,83*	15,37*	14,77*	14,89*	14,85*	14,84*	15,38*	14,78*	14,91*	14,86*
Índice de Sharpe	0,20*	-0,24*	0,22*	0,14*	0,15*	0,18*	-0,25*	0,21*	0,12*	0,13*	0,17*	-0,26*	0,20*	0,11*	0,12*
<i>Turnover</i>	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03
<i>Breakeven</i> (%)	1,6	0,48	1,79	1,64	1,59	1,57	0,46	1,77	1,6	1,55	1,55	0,45	1,76	1,58	1,54
Retorno acumulado bruto (%)	22,95	9,67	23,56	21,12	21,47	22,31	9,37	23,14	20,39	20,85	22,04	9,22	22,94	20,1	20,59
Excesso de retorno acumulado (%)	3,21	-7,94	3,72	1,67	1,97	2,68	-8,19	3,37	1,06	1,44	2,45	-8,32	3,2	0,8	1,23
Rebalanceamento mensal															
Retorno médio (%)	1,86	-1,06	2,18	1,61	1,37	1,76	-1,31	2,07	1,34	1,2	1,69	-1,42	2,03	1,22	1,11
Desvio-padrão (%)	15,00*	14,97*	14,96*	15,05*	15,04*	15,00*	14,97*	14,96*	15,06*	15,04*	15,01*	14,97*	14,96*	15,07*	15,05*
Índice de Sharpe	0,12*	-0,07*	0,15*	0,11*	0,09*	0,12*	-0,09*	0,14*	0,09*	0,08*	0,11*	-0,09*	0,14*	0,08*	0,07*
<i>Turnover</i>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<i>Breakeven</i> (%)	2	1,79	2,2	2,09	1,97	1,99	1,74	2,18	2,05	1,95	1,98	1,71	2,18	2,03	1,93
Retorno acumulado bruto (%)	20,61	14,83	21,27	20,09	19,6	20,4	14,33	21,05	19,53	19,26	20,3	14,13	20,97	19,28	19,08
Excesso de retorno acumulado (%)	1,25	-3,61	1,8	0,8	0,4	1,07	-4,02	1,62	0,34	0,11	0,94	-4,19	1,55	0,13	-0,04

5. Considerações Finais

Neste artigo avaliamos o desempenho de técnicas quantitativas de otimização de carteiras quando aplicadas ao mercado brasileiro de ações, considerado distintas frequências de rebalanceamento das carteiras e também distintas especificações para a estimação de matrizes de covariâncias. O artigo mostra, utilizando dados do mercado brasileiro, que a adoção de estimadores mais sofisticados (robustos ao erro de estimação) para a matriz de covariâncias é capaz de gerar carteiras otimizadas com um desempenho ajustado ao risco consistentemente superior ao obtido com a abordagem tradicional baseada em uma matriz de covariâncias amostral e também superior aos benchmarks considerados (índice Ibovespa e portfólio ingênuo igualmente ponderado). Esse resultado é também de grande relevância para participantes do mercado, pois abre a possibilidade de que esse tipo de técnica seja mais conhecida entre as instituições financeiras do país.

Especificamente, os resultados mostram que a redução da frequência de rebalanceamento não levou a um melhor desempenho ajustado ao risco em termos de Índice de Sharpe. De fato, o melhor desempenho geral foi alcançado com o emprego do estimador *LW1*, cujas carteiras apresentaram, de maneira geral, o maior retorno médio, o melhor desempenho ajustado ao risco, dado pelo Índice de Sharpe, e o maior custo de transação *breakeven*. A seguir, destacamos as carteiras obtidas via estimador *LW2* e via estimador amostral, que apresentaram desempenho ligeiramente inferior às carteiras obtidas via *LW1*, ao se considerar frequências de rebalanceamento alternativas.

As carteiras obtidas a partir do modelo RiskMetrics, amplamente empregado pelos participantes do mercado, apresentaram, em geral, o pior desempenho dentre todos os modelos empregados para a estimação da matriz de covariância. Considerando-se a frequência de rebalanceamento diária, estas carteiras apresentaram o melhor desempenho em termos de retorno médio, Índice de Sharpe e retorno acumulado líquido. No entanto, ao se diminuir a frequência de rebalanceamento, ocorre uma deterioração significativa no desempenho destas carteiras, que passam a exibir os piores resultados em relação aos demais modelos.

Com relação ao desempenho do *benchmark* do mercado, dado pelo índice Ibovespa, verificamos que seu desempenho é largamente superado pelas carteiras obtidas via técnicas de otimização, tanto em termos de retorno médio em excesso ao CDI, quanto em termos de desempenho ajustado ao risco. Tal resultado positivo é encontrado para todos os cinco diferentes estimadores empregados para as matrizes de covariâncias, com destaque para os estimadores robustos *LW1* e *LW2*, que apresentaram os melhores resultados fora da amostra em praticamente todas as estimações, com destaque para o primeiro.

Finalmente, considerando-se níveis alternativos de aversão ao risco para a obtenção das carteiras de média-variância, obtivemos resultados semelhantes aos encontrados ao se considerar, por simplificação, um nível de aversão ao risco $\gamma = 1$. De maneira geral, as carteiras obtidas via matriz *LW1* apresentaram o melhor desempenho fora da amostra, seguidas pelas carteiras obtidas via matriz amostral.

Com relação às limitações do artigo, vale observar que não foram consideradas matrizes de covariâncias condicionais obtidas com modelos GARCH ou de volatilidade estocástica multivariados, os quais podem gerar resultados muito interessantes. Colocamos estas ideias como sugestões para trabalhos futuros.

Referências

- Best, Michael J., & Grauer, Robert R. 1991. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *The Review of Financial Studies*, **4**, 315–42.
- Best, Michael J., & Grauer, Robert R. 1992. Positively Weighted Minimum-Variance Portfolios and the Structure of Asset Expected Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **27**, 513–37.
- Brandt, Michael W. 2010. Portfolio Choice Problems. *Pages 269–336 of: Ait-Sahalia, Y., & Hansen, L. P. (eds), Handbook of Financial Econometrics.*
- Chan, Louis K. C., Karceski, Jason J., & Lakonishok, Josef. 1999. On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model. *Review of Financial Studies*, **12**, 937–974.
- DeMiguel, Victor, & Nogales, Francisco J. 2009. Portfolio Selection with Robust Estimation. *Operations Research*, **57**, 560–577.
- Demiguel, Victor, Garlappi, Lorenzo, & Uppal, Raman. 2009. Optimal versus Naïve Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, **22**, 1915–1953.
- Grant, Michael C., & Boyd, Stephen P. 2008. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming (Web Page and Software)*. Disponível em: <http://cvxr.com/>.
- Han, Yufeng. 2006. Asset Allocation with a High Dimensional Latent Factor Stochastic Volatility Model. *Review of Financial Studies*, **19**, 237–271.
- Jagannathan, Ravi, & Ma, Tongshu. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *Journal of Finance*, **58**, 1651–1684.
- Jorion, Philippe. 1986. Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **21**, 279–292.

- J.P. Morgan & Reuters. 1996. *RiskMetricsTM: Technical Document*. 4th edn.
- Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2003. Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection. *Journal of Empirical Finance*, **10**, 603–621.
- Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004a. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *Journal of Portfolio Management*, **30**, 110–119.
- Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004b. A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, **88**, 365–411.
- Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2008. Robust Performance Hypothesis Testing with the Sharpe Ratio. *Journal of Empirical Finance*, **15**, 850–859.
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**, 77–91.
- Mendes, Beatriz. V. M., & Leal, Ricardo P. C. 2005. Robust Multivariate Modeling in Finance. *International Journal of Managerial Finance*, **1**, 95–106.
- Michaud, Richard O. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal? *Financial Analysts Journal*, **45**, 31–42.
- Politis, Dimitris N., & Romano, Joseph P. 1994. The Stationary Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1303–1313.
- Santos, André A. P. 2010. The Out-of-Sample Performance of Robust Portfolio Optimization. *Revista Brasileira de Finanças*, **8**, 141–166.
- Santos, André A. P., Ruiz, Esther, Nogales, Francisco J., & Van Dijk, Dick. 2012. Optimal Portfolios with Minimum Capital Requirements. *Journal of Banking and Finance*, **36**, 1928–1942.
- Sharpe, William F. 1963. A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, **9**, 277–293.
- Stein, Charles. 1956. Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Pages 197–206 of: Neyman, J. (ed), Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical and Statistical Probability*. Berkeley: University of California.
- Thomé, César, Leal, Ricardo P. C., & Almeida, Vinício S. 2011. Um Índice de Mínima Variância de Ações Brasileiras. *Economia Aplicada*, **15**, 535–557.