



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

de Souza Santos, Ricardo Pires; Valls Pereira, Pedro L.
Modelando Contágio Financeiro através de Cópulas
Revista Brasileira de Finanças, vol. 9, núm. 3, 2011, pp. 335-363
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824884002>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Modelando Contágio Financeiro através de Cópulas

(Modeling Financial Contagion using Copula)

Ricardo Pires de Souza Santos*

Pedro L. Valls Pereira**

Resumo

O presente artigo tem por objetivo testar a hipótese de contágio entre os índices dos mercados financeiros dos Estados Unidos, Brasil, Japão e Inglaterra para o período de 2000 a 2009. Cópulas variantes no tempo foram usadas para captar o impacto da crise do Subprime na dependência entre mercados. O modelo implementado foi um modelo ARMA(1,0) st-GARCH(1,2) para as distribuições marginais e cópulas Normal e Joe-Clayton (SJC) para a distribuição conjunta. Os resultados obtidos permitem concluir que tanto para a cópula gaussiana quanto para a cópula SJC há evidências de contágio entre o mercado americano e o mercado brasileiro. Para os outros dois mercados londrino e japonês, as evidências da presença de contágio entre estes mercados e o americano não mostraram-se suficientemente claras em ambas as cópulas.

Palavras-chave: contágio; cópulas variantes no tempo.

Códigos JEL: C10; C12; C13; G10; G15.

Abstract

This article aims to test the hypothesis of contagion between the indices of financial markets from the United States to Brazil, Japan and England for the period 2000 to 2009. Time varying copulas variants were used to capture the impact of Sub-prime crisis in the dependence between markets. The implemented model was a ARMA(1,0) st-ARCH(1,2) to the marginal distributions and Normal and Joe- Clayton (SJC) copulas for the joint distribution. The results obtained allow to conclude that both for the gaussian copula and for the SJC copula there is evidence of contagion between the American market and the Brazilian market. For the other two markets Londoner and Japanese, the evidence of the presence of contagion between these markets and the American has not been sufficiently clear in both copula.

Keywords: contagion; time varying copula.

Submetido em setembro de 2010. Aceito em março de 2011. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Ricardo P. C. Leal. Os autores agradecem os comentários de dois pareceristas desta revista. O segundo autor agradece financiamento do CNPq e da FAPESP

*CEQEF, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: ricardopss@gmail.com

**EESP-FGV e CEQEF-FGV, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: pedro.valls@fgv.br

1. Introdução

As medidas de dependência entre mercados financeiros exercem notável influência e são de extensa aplicação. Autoridades monetárias, com a finalidade de garantir a estabilidade financeira no país, monitoram a dependência entre mercados financeiros a fim de avaliar a possibilidade de contágio financeiro. A correlação entre mercados nacionais é um dos principais elementos para administração de carteiras internacionais e a diversificação internacional entre mercados permite reduzir o risco total dessas carteiras sem, aparentemente, sacrifícios sobre o retorno.

Com a *moderna teoria de carteira* de Markowitz (1987), a correlação linear entre ativos passou a assumir uma posição fundamental na construção de carteiras internacionais, sob o princípio básico que grande parte dos distúrbios econômicos são idiossincráticos a cada país, de modo que os mercados de ações em diferentes países devem apresentar, relativamente, baixas correlações. Entretanto, se as correlações entre mercados aumentam após um choque negativo, *i.e.* em períodos onde os benefícios da diversificação do risco são mais demandados, a evidência do fenômeno contágio financeiro pode ser interpretada como contrária à eficácia da diversificação internacional.

O presente artigo testa a hipótese de contágio financeiro entre quatros mercados selecionados seguindo-se a metodologia de cópulas.

O corpo teórico que abrange tal hipótese consiste na identificação dos canais de transmissão internacional de choque e na avaliação de sua estabilidade durante os períodos de crise, *i.e.* da sua intensidade na transmissão de choques. No presente estudo, contágio financeiro será interpretado como um aumento significativo das conexões entre mercados após choque em um país específico.

A vantagem da modelagem do contágio financeiro por meio de funções cópulas é evidente, uma vez que tomam as medidas de dependência como protagonista de seus corpos teóricos.

2. Contágio financeiro

De acordo com Edwards (2000), a literatura sobre contágio desenvolveu-se a partir das crises financeiras da década de 90, que se espalharam para os países emergentes. Mesmo antes da crise financeira mexicana de 1995, estudos e investigações relacionados ao tema já constituíam parte da literatura econômica. Em pesquisa realizada pelo mesmo autor no *EconLit* para o período de 1969-2000, de 147 estudos onde a palavra “contágio” apresentava-se no abstract e/ou título, apenas 17 datavam de épocas anteriores à 1990.

No que se refere às principais crises financeiras dos últimos anos, encontram-se trabalhos sobre contágio aplicados à crise do México de 1995 (desvalorização do peso mexicano em dezembro de 1994), à crise asiática de 1997 (desvalorização da moeda tailandesa em julho de 1997), à crise russa de 1998 (com a declaração de moratória do país em agosto de 1998), à desvalorização do Real em janeiro de 1999, às quedas das ações das empresas de tecnologia ao fim de 2000, à crise

argentina em 2001 (com o colapso do *currency board* em dezembro de 2001), e mais recentemente à crise do *Subprime* em 2007 com a subsequente quebra do Banco Lehman Brothers no segundo semestre de 2008.

Ressalta-se que muito embora o fenômeno contágio tenha se iniciado a partir de crises financeiras em mercados emergentes, não se restringe apenas a estes. É possível encontrar uma série de estudos acerca de contágio financeiro entre países desenvolvidos, como por exemplo, sobre a crise do *Exchange Rate Mechanism* em 1992, que atingiu vários países da Europa, ver Giavazzi & Favero (2000).

2.1 Definições de contágio financeiro

Embora não exista uma concordância clara que refira-se à definição de contágio e à sua identificação empírica/científica, pode-se estabelecer certa identidade comum em todas as suas definições: crises econômicas em fase inicial podem propagar-se para outros países por meio do aumento das conexões entre os países envolvidos, Rigobon (2002).

Entre as definições apresentadas em Pericoli & Sbracia (2003) está a que considera contágio financeiro um aumento significativo da probabilidade de crise em um país, condicional a uma crise em outro país. Trata-se esta da definição também utilizada no estudo de Eichengreen *et al.* (1996) que pretenderam verificar se a ocorrência da crise cambial em país aumenta a probabilidade de ataques especulativos em outros países. Após análise, nos últimos trinta anos, de vinte países industrializados os autores encontraram evidências de que o canal de transmissão de comércio entre países aumenta a probabilidade de contágio durante crise cambiais.

Como apontado por Pericoli & Sbracia (2003), qualquer corpo teórico sobre contágio deve ser capaz de i) identificar quais são os canais de transmissão internacional do choque e ii) verificar se estes são estáveis, *i.e.* se há descontinuidades nesses canais, se há canais ativos apenas em períodos de crise, etc.

Seguindo a taxionomia adotada por Rigobon (2002), é possível agrupar as distintas definições de contágio em duas classes: *shift-contagion* e *contágio puro*.

A primeira classe de contágio – *shift contagion* – engloba todas as definições relacionadas a aumentos significativos dos mecanismos de propagação de choques entre países. Nestas, as transmissões de choques durante períodos de estabilidade econômica são admitidas como um canal estável de propagação. Intuitivamente, havendo aumento de intensidade na transmissão dos choques durante os períodos de crise econômica em relação aos períodos de estabilidade, esse aumento pode ser considerado contágio. Assim, as relações entre mercados podem ser mensuradas por diversas estatísticas como a correlação entre os retornos de ativos financeiros, a probabilidade de um ataque especulativo e a transmissão de choques ou volatilidade.

A segunda classe de contágio – *contágio puro* – foca no tipo de mecanismo de propagação que transmite o choque. O princípio base dessas definições é considerar apenas os choques que não são transmitidos pelos canais padrões de trans-

missão (e.g. relações comerciais) e que, portanto, não podem ser explicados pelos fundamentos econômicos, como contágio. Assim, a presença de contágio fica evidenciada pelos excessos de transmissão de choques que não são explicados pelos fundamentos econômicos-financeiros do país.

A principal vantagem desta segunda classe com relação a primeira (*shift contagion*), segundo Rigobon (2002), está em sua definição extensa de contágio. Nas definições pertencentes a *contágio puro*, os mecanismos de transmissão de choques são explicitamente modelados e, portanto, apresentam uma resposta de como o fenômeno contágio se manifesta. Na prática, entretanto, a vantagem pode tornar-se inconveniente, posto que a implementação empírica necessária para testar essa classe de definições é consideravelmente mais complexa do que no caso do *shift contagion*. Na maior parte dos estudos relacionados a *contágio puro*, o contágio é tratado como o resíduo de uma regressão (i.e. a propagação que não é explicada pelos canais explicitamente modelados). Assim, se algum canal relevante de transmissão não for considerado na especificação, as conclusões da análise empírica poderão ser viesadas.

No presente estudo, contágio financeiro é definido como o aumento significativo das conexões entre mercados após choque em um país específico, nos moldes da classe de *shift-contagion*. Dessa forma, a presença de contágio financeiro se provará por meio de uma quebra estrutural do comportamento padrão dessas relações entre países. De acordo com Forbes & Rigobon (2002), o uso desta definição apresenta a vantagem da não necessidade de explicitação do canal de transmissão do choque. E dada a extensa literatura sobre canais de propagação internacional de choques, ao definir-se contágio como retro-proposto, evita-se a necessidade de mensuração e diferenciação desses diversos canais de transmissão de choques. Tal proveito deverá estender-se também a questões empíricas, posto não ser possível observar todos os canais de transmissão de choques entre países (a definição em questão contorna tal restrição ao considerar toda informação disponível pelas observações em períodos de estabilidade econômica).

Patton (2009) identifica, porém, uma dificuldade enfrentada ao se utilizar essa definição, visto que a mesma exige a proposição de um ponto de referência para o que seria um nível normal (padrão) de dependência entre mercados, devendo este ser estabelecido antes de se testar a hipótese da ocorrência de contágio.

Outra limitação, apresentada por Rigobon (2002), reside no fato de a definição aqui pretendida ser aplicável apenas no sentido afirmativo e não no sentido restritivo. Em outras palavras, a presença de um aumento da intensidade dos comovimentos nos preços de mercados, condicionada a uma crise ocorrendo em um país específico, é manifestação de contágio financeiro. Já a ausência dessa mudança nos canais de transmissão não pode ser considerada uma evidência da inexistência de contágio. Segundo o autor, a definição, portanto, não permite testar a ausência de contágio financeiro uma vez que não explicita um canal específico de transmissão de choques.

2.2 Contágio financeiro no Brasil

Entre os primeiros trabalhos realizados sobre o tema, destaca-se, dentro do propósito aqui pretendido, o de Baig e Goldfajn (2000), que examina a ocorrência de contágio na crise russa com relação ao Brasil, através da análise dos *spreads* de títulos Brady e índices de mercado de ações. Os autores, dotando-se de uma técnica de ajuste dos coeficientes de correlação, proposta por Forbes & Rigobon (2002),¹ concluem a ocorrência do contágio, por meio de uma parada súbita no fluxo de capitais para Brasil e Rússia, sob o mecanismo de propagação do mercado de títulos da dívida.

O estudo de Mendes (2005) se distingue por utilizar uma metodologia semelhante à empregada neste estudo. A autora procura, por meio da teoria de cópulas, evidências de excesso de co-movimentos entre mercados que não sejam, necessariamente, explicados por teorias econômicas. A análise é feita para sete mercados de ações da América Latina, Ásia e África. Dentre os resultados encontrados, destaca-se o aumento de dependência durante perdas conjuntas, para os pares de países Argentina e México e Brasil e México.

Em Marçal & Valls Pereira (2008), testa-se a hipótese de contágio financeiro no mercado de títulos soberanos de quatro países emergentes (Brasil, Argentina, México e Rússia) durante as crises da década de 90. O teste é feito a partir de diferentes modelos de volatilidade multivariada. Os resultados evidenciaram que as estruturas de volatilidade não foram constantes durante as crises financeiras do período.

No recente trabalho de Marçal *et al.* (2011), os autores seguem percurso ainda mais rigoroso ao analisarem a presença de contágio financeiro condicionada aos fundamentos econômicos específicos de cada país. O procedimento de ajuste por meio de fundamentos foi muito bem exposto no trabalho de Pesaran & Pick (2007). Nele, os autores investigam as condições sob as quais o fenômeno do contágio pode ser diferenciado de movimentos de interdependência.²

Em Marçal *et al.* (2011), a partir da utilização de modelos multivariados DCC, testa-se a hipótese de contágio entre os países da América Latina e Ásia durante as crises financeiras ocorridas entre 1994 e 2003. Entre os resultados, os autores apresentam evidências de contágio regional na América Latina e Ásia, e contágio financeiro da Ásia para América Latina. Os resultados apontam ainda para os Estados Unidos como vetor de contágio para os países da América Latina e o Japão, como vetor de contágio para países da Ásia e América Latina.

Por fim, vale a menção ao recente estudo feito por Souza & Tabak (2009) como exemplo ilustrativo da aplicabilidade da teoria de contágio financeiro. Estes autores estendem a definição de contágio para investigar sua ocorrência entre os mercados bancários, durante a crise do *Subprime*. Considerando uma amostra de 48 países e realizando testes com base na metodologia proposta por Forbes

¹O artigo usado por Baig e Goldfajn foi o texto para discussão do MIT de 1998.

²A grosso modo, movimentos de interdependência são co-movimentos entre mercados que são explicados por fundamentos econômicos

& Rigobon (2002), os autores criaram um *ranking* dos países que mais sofreram contágio. No que se aplica ao Brasil, concluem que, de maneira geral, o efeito do contágio sobre os bancos brasileiros foi limitado.

3. Introdução à Cópulas

A teoria de cópulas está diretamente ligada à teoria de modelagem de distribuições multivariadas e, portanto, ao conceito de dependência. Com efeito, toda distribuição multivariada possui informações sobre as distribuições marginais e sobre as relações de dependência entre as variáveis.

A modelagem da distribuição multivariada por cópulas permite isolar dessa estrutura de dependência a estrutura das distribuições marginais, permitindo uma modelagem das distribuições multivariadas do “específico para o geral”.

Pelo Teorema de Sklar (1959), é possível obter a distribuição conjunta de um vetor de variáveis a partir da função cópula e das transformações das variáveis em suas respectivas distribuições marginais uniformes, como segue:

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(y_1), U_2 \leq F_2(y_2)) \\ &= C(F_1(y_1), F_2(y_2)) \end{aligned} \quad (1)$$

onde a *transformação integral de probabilidade* garante que as variáveis aleatórias U_1 e U_2 , definidas como $U_i \equiv F_i(Y_i)$, distribuam-se uniformemente no intervalo unitário $(0, 1)$. Pelo Teorema de Sklar e pela definição da função densidade de probabilidade temos que:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial y_1 \partial y_2} f_1(y_1) f_2(y_2) \\ &= c(u_1, u_2) f_1(y_1) f_2(y_2) \end{aligned} \quad (2)$$

onde $c(\cdot)$ é a função de densidade cópula.

Assim, a função cópula contém informações, sobre a distribuição conjunta, que não estão presentes nas distribuições marginais. Ao converter-se, por meio da transformação quantílica, as variáveis Y_1 e Y_2 em variáveis uniformes, a informação das distribuições marginais será filtrada, posto que U_1 e U_2 serão uniformes $(0, 1)$, independente de F_1 e F_2 . Segundo Patton (2002), por essa razão a função cópula também é conhecida como função de dependência.

3.1 Funções cópulas

Dentre as diversas funções cópulas existentes, utilizou-se para modelar o contágio a cópula gaussiana e a cópula SJC, que são descritas a seguir. Supondo Y_1 e Y_2 duas variáveis que se distribuem conjuntamente como uma distribuição gaussiana bivariada, com coeficiente de correlação linear ρ , *i.e.*

$$F(y_1, y_2) = \Phi_\rho(y_1, y_2)$$

As distribuições marginais serão distribuições gaussianas univariadas, *i.e.* $F_1(y_1) = \Phi(y_1)$ e $F_2(y_2) = \Phi(y_2)$. Assim, pela transformação quantílica, $y_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ e $y_2 = \Phi^{-1}(u_2)$. A representação da cópula gaussiana é dada por

$$\begin{aligned} C_G(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \end{aligned}$$

A cópula gaussiana é, portanto, a função de dependência associada a uma normal bivariada. À medida que o coeficiente de correlação linear se aproxima dos limites de seu domínio, a dispersão das variáveis uniformes u_1 e u_2 no quadrado unitário diminui.

Outro exemplo de função cópula é a Joe-Clayton, também conhecida como cópula BB7 de Joe (1997). Essa função cópula é construída a partir da transformação de Laplace da cópula Clayton, e sua especificação é dada por

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = 1 - \left(1 - \left\{ [1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3)$$

onde $\kappa \geq 1$ e $\gamma > 0$. Dentre as propriedades dessa função cópula, destaca-se que ela converge para a cópula Clayton para $\kappa = 1$, e para $\kappa \rightarrow \infty$ ou $\gamma \rightarrow \infty$ a função C_{JC} atinge a fronteira superior de Fréchet-Hoeffding.³ Outra propriedade útil dessa função é o fato de que κ e γ são diretamente relacionados com as dependências das caudas, onde $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$ e $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$, sendo τ^U e τ^L as dependências da cauda superior e inferior. Assim, a cópula JC, por ser parametrizada por medidas de dependência da cauda, é mais adequada para modelar eventos extremos positivos e negativos.⁴

Simplemente devido à sua especificação, mesmo que os índices de cauda superior e inferior sejam idênticos, ainda assim haverá uma assimetria na cópula JC.

Para corrigir tal assimetria, foi proposta por Patton (2002), a seguinte especificação alternativa denominada cópula *JC simétrica* (SJC), cuja especificação é dada por

$$\begin{aligned} C_{SJC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) &= \frac{1}{2} [C_{JC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) \\ &+ C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \tau^U, \tau^L) + u_1 + u_2 - 1] \end{aligned}$$

³Veja Trivedi & Zimmer (2007)

⁴Uma propriedade da cópula gaussiana é a ausência de dependência das caudas para $\rho < 1$, *i.e.* assintoticamente $\tau^U = \tau^L = 0$.

A cópula SJC nada mais é, portanto, uma modificação da cópula JC para que ela seja simétrica toda vez que $\tau^U = \tau^L$. A vantagem desta sobre uma cópula com dependências de cauda simétrica (e.g. cópula *t-student*) é justamente permitir que a simetria seja um caso especial.

3.2 Métodos de estimação

A principal metodologia de estimação utilizada é o método da máxima verossimilhança. Dada uma amostra aleatória de duas variáveis de interesse, pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta dessas variáveis é descrita por $C(F_1(y_{1,t}), F_2(y_{2,t}))$ e a função log-verossimilhança é obtida a partir da equação 3 é dada por

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_{1,t}), F_2(y_{2,t}) | \theta_c) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(y_{1,t} | \theta_1) \quad (4)$$

$$+ \sum_{t=1}^T \ln f_2(y_{2,t} | \theta_2)$$

onde, θ é um vetor de parâmetros que inclui os parâmetros da cópula e das distribuições marginais.

O presente artigo utiliza a abordagem⁵ canônica (Máxima Verossimilhança Canônica) que independe de hipóteses sobre as distribuições das marginais para estimar os parâmetros θ_c da função cópula. A transformação das observações $(y_{1,t}, y_{2,t})$ em variáveis uniformes $(u_{1,t}, u_{2,t})$ é feita utilizando-se as funções de distribuições empíricas $F_j^T(y)$, onde

$$F_j^T(y) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(Y_{j,t} \leq y) \quad (5)$$

onde $\mathbb{I}(\cdot)$ é uma função indicadora. Após tal transformação, os parâmetros da função cópula são determinados por

$$\hat{\theta}_c = \arg \max_{\theta_c \in \Theta} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_{1,t}, \hat{u}_{2,t} | \theta_c)$$

O estimador para θ_c é chamado de estimador Omnibus.⁶ A matriz de informação de Godambe ou a matrix de covariância semi-paramétrica, dada em Genest *et al.* (1995), podem ser usadas para inferência.

⁵Abordagens alternativas são a Máxima Verossimilhança Exata (MVE) e a Inferência para Marginais (IM). Na abordagem MVE, o vetor de parâmetros da função cópula e das distribuições marginais são estimados conjuntamente, enquanto que na abordagem IM, proposta por Joe (1997), a estimação dos parâmetros da função cópula é condicionada às estimativas dos parâmetros obtidas para as marginais, caracterizando-se como uma estimação em dois estágios.

⁶Ou pseudo estimador de verossimilhança.

4. Medidas de Dependência

Em Nelsen (2006), é possível encontrar duas métricas de associação que definem duas classes de medidas: a métrica da *concordância* (κ) e a métrica da *dependência* (δ). O autor lista uma série de propriedades que uma medida deve atender para pertencer a cada uma das métricas.⁷

Dentre as medidas de concordância, destacam-se a correlação de Spearman e o tau de Kendall. Ambas são medidas de correlação entre os postos (*ranking*) das variáveis, ao invés de seus valores efetivos e, por isso, são também conhecidas como correlações de posto (*rank correlation*). Dentre as medidas de dependência, destacam-se a dependência quantílica e a dependência de caudas.

O coeficiente de correlação linear é frequentemente usado como medida de dependência linear entre duas variáveis. Seja Y_1 e Y_2 , duas variáveis aleatórias com variâncias finitas e não nulas, a correlação entre elas é definida por

$$\rho = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{var(Y_1)}\sqrt{var(Y_2)}} \quad (6)$$

onde, $Cov(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 Y_2) - \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(Y_2)$.

A correlação de Pearson, embora possa ser escrita a partir das funções cópias, ela terá o seu valor como função do tipo de distribuição marginal, pois

$$\begin{aligned} cov(Y_1, Y_2) &= \int \int_D (F(y_1, y_2) - F_1(y_1) F_2(y_2)) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) dF_1^{-1}(u_1) dF_2^{-1}(u_2) \end{aligned}$$

onde D é o domínio em que Y_1 e Y_2 são definidas.

Embora o coeficiente de correlação linear seja a medida mais popular utilizada para medir a associação entre duas variáveis, ele apresenta várias deficiências, conforme Embrechts *et al.* (2002). Além disso, as variáveis precisam atender a uma série de requisitos para que o coeficiente de correlação linear seja de fato uma medida de concordância. O estudo de Embrechts *et al.* (2002) relata com maiores detalhes as limitações desta medida.

Uma medida de dependência que se destaca na administração de risco é a dependência das caudas. Seja U_1, U_2 duas variáveis aleatórias distribuídas uniformemente no intervalo unitário $(0, 1)$ a dependência das caudas é definida como o limite das dependências quantílicas, com o limiar u direcionando-se aos extremos zero (no caso de dependência da cauda inferior) ou 1 (dependência da cauda superior), *i.e.*

⁷Uma diferença, por exemplo, entre as medidas de dependência e as medidas de concordância é dada no intervalo na qual elas estão definidas, onde $\kappa(\cdot) \in [-1, +1]$ e $\delta(\cdot) \in [0, +1]$. Nota-se que essa propriedade permite que as medidas de concordância indiquem qual a “direção” da associação entre as variáveis. Já as medidas de dependência apenas mostram se as variáveis são funcionalmente dependentes ou não.

$$\begin{aligned}\tau^U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(U_1 > u | U_2 > u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(U_2 > u | U_1 > u) \\ \tau^L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_2 \leq u | U_1 \leq u)\end{aligned}\quad (7)$$

As medidas de dependência das caudas τ^U e τ^L podem ser obtidas diretamente a partir da função cópula C , onde:

$$\begin{aligned}\tau^U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ \tau^L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}\end{aligned}$$

Assim se $\tau^U \in (0, 1]$ então a cópula C apresenta dependência na cauda superior e C não terá dependência na cauda superior se $\tau^U = 0$. Similarmente, se $\tau^L \in (0, 1]$, a cópula C possui dependência na cauda inferior e para $\tau^L = 0$, a cópula C não tem dependência na cauda inferior. No caso em que $\tau^U, \tau^L = 0$, as variáveis são assintoticamente independentes nas caudas superior e inferior.

5. Cópulas condicionais e variantes no tempo

A modelagem de contágio com cópulas foi feita através da teoria de cópulas condicionais, Patton (2002). Sejam $Y_{1,t}$ e $Y_{2,t}$ duas variáveis aleatórias que representam dois retornos para o período t e, $F_{1,t}(Y_{1,t}|\Omega_{t-1})$ e $F_{2,t}(Y_{2,t}|\Omega_{t-1})$ suas respectivas funções de distribuição marginais condicionais ao conjunto de informação Ω_{t-1} gerado até o período $t-1$, a extensão do Teorema de Sklar para o caso condicional assegura que uma distribuição conjunta condicional ao conjunto de informação Ω_{t-1} das variáveis estudadas, pode ser decomposta nas respectivas funções de distribuição marginais condicional ao conjunto de informação Ω_{t-1} e em uma função cópula também condicionada ao conjunto Ω_{t-1} , *i.e.*

$$F(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1}) = C(F_1(y_{1,t} | \Omega_{t-1}), F_2(y_{2,t} | \Omega_{t-1}) | \Omega_{t-1}) \quad (8)$$

Observa-se que, tanto as distribuições marginais como a função cópula, devem ser condicionadas ao mesmo conjunto de informações Ω . No contexto da teoria de contágio, e sob a definição utilizada no presente trabalho, equivale a dizer que a quebra estrutural deve ser condicionada a todas as distribuições marginais, além da cópula.

Cópulas condicionais possuem as mesmas propriedades que as cópulas incondicionais, Patton (2002). A modelagem da distribuição conjunta condicional permite extrair, além da média e variância condicional, outras diversas medidas de dependência que são objeto de estudo na teoria de contágio, tais como correlações lineares, correlações de posto (correlação de Spearman, tau de Kendall) e dependências de caudas.

Para modelar a transformação variante no tempo, assumiu-se que a forma funcional da função cópula permaneceu constante ao longo do tempo, enquanto que

o seu parâmetro de dependência variou de acordo com uma função paramétrica de transformações das observações defasadas mais um termo auto-regressivo⁸.

Seguindo Patton (2002), na cópula SJC, a equação de evolução utilizada, para a dependência da cauda, foi

$$\tau_t = \Lambda \left(\omega_\tau + \beta_\tau \cdot \tau_{t-1} + \alpha_\tau \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_{1,t-i} - u_{2,t-i}| \right) \quad (9)$$

onde $\Lambda(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ é uma transformação logística usada para que o parâmetro de dependência permaneça no intervalo $(0, 1)$. Pela especificação acima, pode-se perceber que o parâmetro de dependência segue, antes da transformação,⁹ um processo $ARMA(1, n)$, onde o termo auto-regressivo τ_{t-1} captura uma parte da persistência do parâmetro de dependência e os parâmetros restantes capturam certa variação na dependência. O parâmetro n , que representa o tamanho da janela, pode ser interpretado como um parâmetro suavizador.¹⁰

Para a cópula gaussiana, utilizou-se um critério similar ao proposto pela cópula SJC, para fins de comparação. A equação de evolução utilizada na cópula gaussiana para a correlação linear, foi

$$\rho_t = \tilde{\Lambda} \left(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1} + \alpha_\rho \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(u_{1,t-i}) \Phi^{-1}(u_{2,t-i}) \right) \quad (10)$$

onde $\tilde{\Lambda}(x) = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ é uma transformação logística modificada, conhecida como *transformação de Fisher*, usada para estabilizar a variância do coeficiente de correlação linear e permitir que ρ_t permaneça, em todo os períodos, no intervalo $(-1, +1)$. Pelo mesmo princípio que a cópula SJC, o parâmetro de dependência segue, antes da transformação, um processo $ARMA(1, n)$, com um termo auto-regressivo ρ_{t-1} para captar uma parte da persistência e os parâmetros restantes capturando certa variação na dependência.

6. Testando a Hipótese de Contágio Financeiro

6.1 Dados

Foram selecionados índices que representem quatro distintos mercados no mundo, para a América Latina foi escolhido o IBOVESPA (IBOV), América do Norte o índice *Standard & Poors 500* (SP500), o *Financial Times Stock Exchange*

⁸Metodologia que segue o espírito das funções de densidade condicionais autoregressivas, proposta por Hansen (1994)

⁹Após a transformação, o processo deixa de seguir uma estrutura ARMA, pois esta transformação não é linear e, portanto, não preserva a estrutura linear necessária nos processos tipo ARMA.

¹⁰Na literatura é possível encontrar diferentes tamanhos de janelas que vão de $n = 1$, e.g. Dias & Embrechts (2003), até $n = 20$, como o caso de Benediktsdottir & Scotti (2009). O tamanho adotado em Patton (2002) foi $n = 10$ e é o tamanho utilizado no presente trabalho.

(FTSE) de Londres foi selecionado para o mercado europeu e o índice NIKKEI 225 (NIKKEI) para o mercado asiático.

O período usado foi de 04/01/2000 a 30/12/2009, foi feito um ajuste nas observações de cada um destes índices para eliminar diferenças de tamanho nas amostras (causados por feriados nacionais). Para tanto, utilizou-se o procedimento de recompor os valores em falta por meio de um *modelo de nível local*.¹¹ Após o ajuste, a base de dados passou a contar com 2.607 observações para todos os índices.

Ainda, por causa dos diferentes fusos horários, foi realizado um segundo ajuste na base de dados.¹² Tomando-se como exemplo Brasil e Japão, que possuem uma diferença de 12 horas, os negócios efetuados na Bolsa de Tóquio estão virtualmente um dia à frente dos negócios realizados no Brasil. Para corrigir tal efeito, os retornos foram sincronizados segundo o seguinte corte temporal: $[r_t^{IBOV}, r_t^{SP500}, r_t^{FTSE}, r_{t+1}^{NIKK}]$. A base de dados final conteve uma amostra de retornos entre os períodos de 05/01/2000 – 29/12/2009 com total de 2.605 observações.

6.2 Estatísticas descritivas dos retornos

Os retornos dos índices foram computados de forma logarítmica, por meio da diferença de logs, *i.e.* $r_t^i = \ln [I_t / I_{t-1}] \times 100$, onde I_t representa o fechamento diário do índice no período t .

Como foi visto na seção 2, a definição de contágio utilizada no presente estudo requer, para testar a hipótese referida, que seja estabelecido um período de referência ou estabilidade e outro representando o período de crise. O período de referência compreende observações entre início de 2000 e fim de 2006 e o outro período com as observações entre início de 2007 a fim de 2009.

De acordo com as estatísticas dos retornos (Tabela 1), sugere-se, inicialmente, para os quatros índices, que a média dos retornos no período pré-crise é superior à média para toda amostra e a média dos retornos no período de crise é inferior à média de toda amostra. Ainda em relação aos quatros índices, nota-se que para períodos de crise, a volatilidade¹³ é superior à média (valor para a amostra toda) e para o período de estabilidade financeira, a volatilidade é inferior à média. Para o período analisado, o aumento de volatilidade do período de crise em relação ao período de estabilidade ficou em 45% para o IBOVESPA, 75% para o S&P500, 60% para o FTSE e 55% para o NIKKEI.

¹¹ Os valores faltantes foram substituídos pelas estimativas suavizadas do componente de nível.

¹² Em relação à Hora de Greenwich (GMT), Nova Iorque está GMT – 5h00, São Paulo está GMT – 3h00 e Tóquio está GMT + 9h00

¹³ Medida como o desvio padrão dos retornos diários.

Tabela 1
Estatísticas Descritivas dos Retornos Diários

Estatística	Período de Estabilidade Econômica				Período de Crise Econômica				Amostra Toda			
	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
Média	0.057	0.001	-0.004	-0.004	-0.029	-0.086	-0.065	-0.126	0.056	-0.008	-0.008	-0.022
Mediana	0.086	0.027	0.045	0.013	0.173	0.038	-0.012	0.007	0.128	0.038	0.045	0.030
Máximo	7.335	5.574	5.904	5.735	13.677	10.957	9.384	9.494	13.677	10.957	9.384	9.494
Mínimo	-7.539	-6.005	-5.589	-7.234	-12.096	-9.470	-9.265	-12.111	-12.096	-9.470	-9.625	-12.111
Desvio Padrão	1.747	1.087	1.108	1.334	2.546	1.927	1.803	2.083	1.945	1.358	1.311	1.544
Assimetria	-0.15	0.18	-0.14	-0.29	0.04	-0.20	-0.01	-0.87	-0.09	-0.06	-0.12	-0.61
Curtose	3.72	5.68	6.34	4.70	8.16	10.58	9.28	9.43	6.28	11.31	9.57	8.67
Jarque Bera	46.58	555.51	853.22	244.82	581.11	1256.25	858.26	966.69	1589.68	7498.67	4694.96	3646.27
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
No. Obs.	1823	1823	1823	1823	523	523	523	523	2605	2605	2605	2605

Obs: Valores entre colchetes representam o p-valor das estatísticas Jarque-Bera. A amostra toda compreende os retornos entre 05/01/2000 e 31/12/2009. O período pré crise econômica compreende os retornos entre 05/01/2000 até 29/12/2006. O período de crise econômica compreende os valores entre 01/01/2007 e 31/12/2009.

No que diz respeito à presença de valores extremos, o curtose é maior no período de crise comparativamente à amostra toda e ao período pré-crise. Em relação aos dois períodos analisados, o valor da curtose mais que dobrou para o IBOVESPA (foi de 3.72 para 8.16), aumentou em 85% para o S&P500, 45% para o FTSE e dobrou para o NIKKEI.

Quanto à simetria das distribuições, todas as séries apresentaram assimetria negativa para a amostra toda, indicando que a presença de valores extremos negativos é mais recorrente (*i.e.* a cauda esquerda é mais pesada). A série que apresentou maior assimetria foi o NIKKEI com -0.61, seguido pelo FTSE com -0.12, IBOVESPA com -0.09 e, por último, S&P500 com -0.06.

As estatísticas Jarque-Bera rejeitam a hipótese nula de normalidade dos retornos para todos os índices em todos os grupos amostrais, com o *p-valor* inferior a 0.01.

Como para o presente artigo foram escolhidos quatro diferentes índices, temos um total de 6 possíveis relações bivariadas de dependência. Entretanto, como o interesse é analisar o contágio durante a crise dos *Subprime*, que se iniciou nos Estados Unidos, foram escolhidas apenas as relações que envolvam o índice americano S&P500. A figura 1 apresenta o gráfico de dispersão, feito com amostra toda.

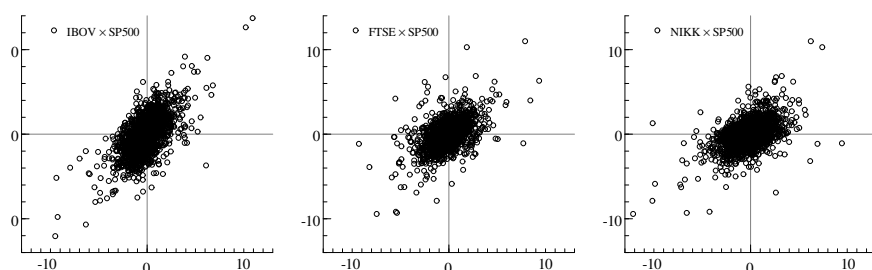


Figura 1
Dispersão dos retornos

É possível afirmar, através da figura 1, que o mercado apresenta uma maior associação em relação ao mercado norte-americano é o mercado brasileiro, uma vez que a associação entre estes dois mercados parece ser maior do que entre os outros embora nenhum teste estatístico tenha sido feito para confirmar esta hipótese.

A falta de constância da volatilidade das séries financeiras é fato estilizado que pode ser modelado a partir do surgimento dos modelos da família ARCH e de volatilidade estocástica. Também tem sido incorporado como fato estilizado o fenômeno de que a correlação entre os retornos dos ativos não é constante no tempo. Este encontra-se documentado pelos trabalhos de Erb *et al.* (1994), Longin & Solnik (2001), Engle (2002) e Patton (2006).

Além da correlação linear, a correlação de Spearman e o tau de Kendall foram escolhidas como medidas de concordância, e a dependência quantílica,¹⁴ como medida de dependência. Estas foram computadas para captar associações não lineares entre as variáveis. Os resultados das estatísticas foram sintetizados na figura 2 abaixo.

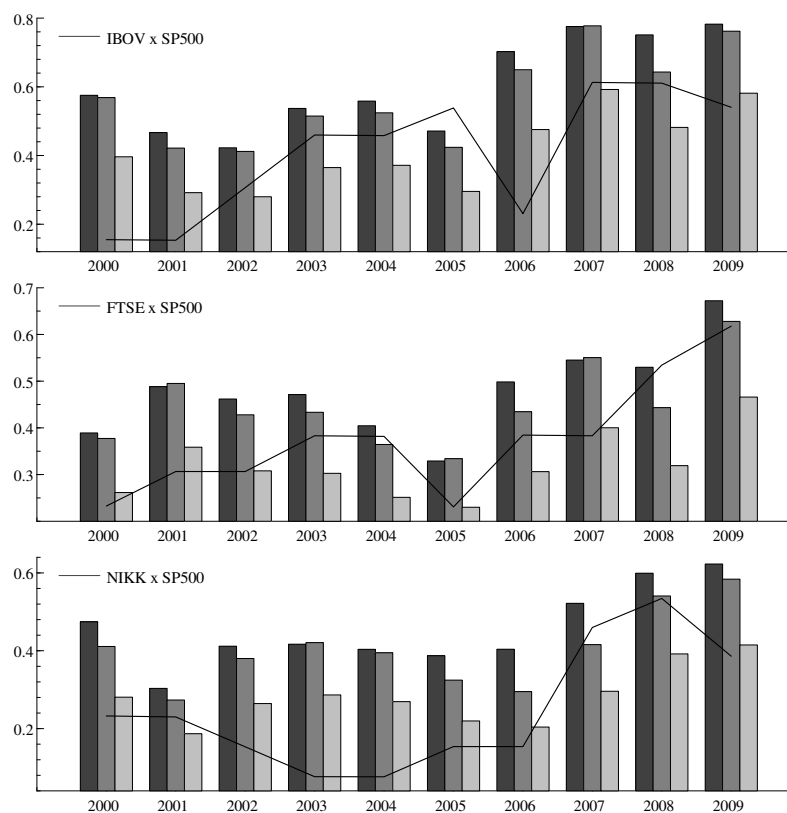


Figura 2

Medidas de associação: correlação linear (escuro), correlação de Spearman (médio), Tau de Kendall (claro) e dependência quantílica (linha)

Percebe-se, independentemente da medida utilizada, que houve um aumento de associação entre todas as possíveis relações dois a dois nos anos entre 2007 a 2009.

Em relação à média no ano dos retornos diários, a média no ano foi negativa para os quatro índices nos anos entre 2000 e 2002. De fato durante esse período, os países analisados vivenciaram algumas crises econômicas, *e.g.* quedas das ações

¹⁴Dependência quantílica inferior a 5%.

das empresas de tecnologia em 2000, crise argentina em 2001). O período entre 2003 e 2006 apresentou retornos médios positivos para todos os índices analisados. E por fim os anos entre 2007 e 2009 foram marcados pela crise do *Subprime*. O Relatório de Inflação do Banco Central do Brasil de dezembro de 2008 apresenta um cronograma com respostas governamentais dos principais bancos centrais do mundo para conter os efeitos da crise do *Subprime*. De acordo com esse relatório, em meados de 2007 já haviam episódios de intervenções por parte das autoridades monetárias. Em Murphy (2009), o autor apresenta que os preços das hipotecas nos Estados Unidos atingiram o pico em meados de 2006. Segundo o mesmo autor, e em consonância com o relatório do Banco Central do Brasil, em meados de 2007 já havia evidências das dificuldades de alguns bancos em levantar caixa, causadas pela uma maior aversão ao risco das exposições das hipotecas. Por fim, o *Global Financial Stability Report* de outubro de 2008, IMF (2008), estabelece o verão de 2007 (*i.e.* meados de 2007) como marco para o início da crise financeira.

Períodos de análise

A fim de testar a hipótese de contágio financeiro, nos termos do *shift contagion*, a amostra foi dividida em dois grupos: um de referência, representando a dependência entre mercados em períodos de estabilidade, e outro com as observações representando o período de crise. Com base nas informações obtidas nessa seção, estabeleceu-se, exogenamente, como período de crise e (pós crise) as observações contidas entre 2007 e 2009. Por exclusão, o grupo de referência conta com as observações entre 2000 a 2006. O uso exógeno do estabelecimento do período de crise também foi utilizado em Horta *et al.* (2007). Neste artigo os autores também testaram a hipótese de contágio financeiro durante a crise do Subprime para um grupo de 7 países desenvolvidos.¹⁵ Também é possível encontrar na literatura sobre contágio financeiro, tratamentos endógenos da determinação do período de crise. Dentre as abordagens empregadas, destaca-se o uso de modelos com mudança de regime (seguindo cadeias de Markov), sendo algumas referências, os artigos de Rodriguez (2007) e Samitas *et al.* (2007) que tratam endogenamente o contágio financeiro utilizando a teoria de cópulas com mudança de regime. Outra abordagem que se destaca é o uso de testes de mudanças de pontos¹⁶ para identificar quebras estruturais na função cópula. O trabalho de Dias e Embrechts (2004) é uma das referências que utilizam estes testes e o artigo de Manner & Candelon (2007) faz uma aplicação destes testes para analisar a hipótese de contágio financeiro durante a crise asiática.

¹⁵Diferentemente que o presente artigo, os autores utilizaram a teoria de cópulas incondicionais (*i.e.* não variantes no tempo) para modelar o contágio financeiro.

¹⁶*Change-point tests*.

6.3 Modelos para as distribuições marginais

A distribuição marginal de cada retorno foi parametrizada de acordo com os modelos $ARMA(m, n) - GARCH(p, q)$, i.e. para $i = IBOV, SP500, FTSE, NIKKEI$,

$$\begin{aligned} \Psi(L) r_t^i &= \Theta(L) \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t, \text{ onde } z_t \sim iid(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(L) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta(L) \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

onde L é o operador de defasagem e $\Psi(L)$, $\Theta(L)$, $\alpha(L)$ e $\beta(L)$ são os polinômios de defasagem com as respectivas ordens m , n , q e p . Uma vez que a estimação dos parâmetros foi feita pelo método de máxima verossimilhança, foi necessário fazer hipóteses adicionais sobre a distribuição do processo de inovação z_t . Dado que as estatísticas descritivas dos retornos apresentaram indícios de assimetria e excesso de curtose, foram utilizadas, além da distribuição normal, a distribuição t -Student e t -Student assimétrica. De acordo com o critério de informação BIC, a distribuição que melhor se ajustou foi a t -Student assimétrica. Seguindo Bauwens & Laurent (2005), para captar o excesso de curtose (incondicional), os modelos GARCH foram primeiramente combinados com erros na forma de t -Student que, para modelagem de séries financeiras, exibiram uma melhor performance do que o uso de erros normais. Entretanto, o *efeito alavancagem*, fato estilizado presente nas séries financeiras, não é captado por nenhuma das duas densidades, uma vez que ambas são simétricas. Uma alternativa para modelar tal assimetria das séries financeiras, faz-se a combinação do uso de distribuições com caudas pesadas (e.g. t -Student) e “especificações GARCH assimétricas” (e.g. EGARCH, GJR-GARCH). Os autores, porém, afirmam que essa alternativa geralmente não consegue captar completamente a assimetria da série. Uma outra explorada foi o desenvolvimento de distribuições assimétricas. A densidade t -Student assimétrica utilizada foi a desenvolvida por Lambert & Laurent (2001).

A forma funcional de sua densidade é dada por $f(z|\xi, \nu)$, onde

$$f(z|\xi, \nu) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} sg[\xi(sz + m)|\nu], & \text{se } z < -m/s \\ \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} sg[\xi(sz + m)/\xi|\nu], & \text{se } z \geq -m/s \end{cases}$$

sendo $2 < \nu < \infty$, os graus de liberdade (para captar o excesso de curtose) e ξ , o parâmetro que capta a assimetria da distribuição. A função $g(\cdot|\nu)$ é a densidade de uma t -Student simétrica com variância unitária. Os valores das constantes m e s , que representam a média e a variância de uma t -Student assimétrica não padronizada, são determinados por

$$s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2}, \quad m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)$$

O parâmetro da assimetria da distribuição é apresentado na forma logarítmica, *i.e.* $\log \xi$, para que seu sinal siga a direção da assimetria (*i.e.* se for negativo a distribuição é assimétrica negativa e se for positivo a distribuição é assimétrica positiva).

De acordo com a significância dos parâmetros estimados, os diagnósticos dos resíduos (teste Box-Pierce e teste LM) e o critério de informação BIC, as especificações escolhidas das distribuições marginais dos retornos foram: ARMA(0,0) *st*-GARCH(1,2) para o IBOVESPA, ARMA(1,0) *st*-GARCH(1,2) para o S&P500, ARMA(1,0) *st*-GARCH(1,1) para o FTSE e ARMA(0,0) *st*-GARCH(1,2) para o índice NIKKEI. Os valores dos parâmetros estimados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2

Modelos ARMA *st*-GARCH para as distribuições marginais

Parâmetros	Equação da Média			
	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
δ	0.103 (0.033)	0.207 (0.016)	0.032 (0.015)	0.018 (0.023)
ψ_1		-0.066 (0.018)	-0.075 (0.020)	
Parâmetros	Equação da Variância			
	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
ω	0.120 (0.058)	0.010 (0.004)	0.010 (0.003)	0.305 (0.012)
α_1	0.017 (0.019)	0.003 (0.019)	0.104 (0.013)	0.025 (0.029)
α_2	0.074 (0.033)	0.095 (0.026)		0.073 (0.033)
β	0.874 (0.038)	0.897 (0.016)	0.890 (0.013)	0.890 (0.018)
$\log \xi$	-0.088 (0.026)	-0.099 (0.023)	-0.139 (0.028)	-0.117 (0.026)
ν	10.764 (2.124)	9.200 (1.736)	15.388 (4.081)	10.593 (2.192)
$\bar{\sigma}$	3.489	2.333	1.995	2.537

Obs: Valores entre parênteses representam o erro padrão das estimativas.

A variável σ representa a variância incondicional. A estimação dos parâmetros de ambas equações foi feita simultaneamente no G@RCH 5.1.

O parâmetro ψ_1 que capta persistência dos retornos na equação da média não foi significativo para o IBOVESPA e o índice NIKKEI, e mesmo para os outros dois índices, S&P500 e FTSE, ele apresentou baixa magnitude, em torno de -0.07, indicando uma baixa persistência dos retornos do dia anterior sobre o retorno corrente. Em relação à equação da variância, a restrição de positividade dos parâmetros, que garante a não-negatividade da variância incondicional, é atendida nas qua-

tros distribuições.¹⁷ Todas as distribuições apresentaram uma alta persistência da variância, *i.e.* o somatório dos α_i e dos β_i são próximos de 1.

Em relação a variância incondicional ($\overline{\sigma}$), nota-se que a variância IBOVESPA é maior que a dos outros índices, em torno de 3.49, sendo 50% maior que a variância incondicional do S&P500, 75% maior que a variância do FTSE e 40% maior que a do índice NIKKEI. O parâmetro de assimetria – $\log \xi$ – foi significativo e negativo para os quatros índices, em concordância com as estatísticas encontradas anteriormente. Os graus de liberdade da distribuição, que medem o “peso da cauda”, apontaram para o S&P500 como o índice com menores graus de liberdade (em torno de 9.2) e, portanto, com maior peso nas caudas, seguido do índice NIKKEI, com 10.6. Para o IBOVESPA esse número ficou em 10.7 e para o FTSE 15.4, indicando o índice com a menor presença de eventos extremos.

A diferença entre os graus de liberdade estimados para cada retorno mostra uma vantagem da modelagem por cópula sobre, por exemplo, uma distribuição *t-Student* bivariada, uma vez que esta última requer que as distribuições marginais tenham o mesmo número de graus de liberdade.

6.4 Modelos para as cópulas

Após a modelagem das estruturas da média e da variância das distribuições marginais pelos modelos ARMA-GARCH, os resíduos padronizados foram transformados em observações uniformes $u_{1,t}$ e $u_{2,t}$ por meio da função empírica de distribuição (equação 5). As pseudo-observações resultantes foram utilizadas para estimar os parâmetros desconhecidos das funções cópulas.

Cópula gaussiana

Numa primeira análise da dependência entre os índices, foi utilizado a cópula gaussiana (normal), referência na área de finanças. A figura 3 apresenta a evolução de ρ_t para as diferentes relações entre mercados.

¹⁷A restrição de positividade requer que $\omega \geq 0$, $0 \leq \alpha(L) + \beta(L) \leq 1$ e $\alpha_i + \beta_i \geq 0$ para todo i .

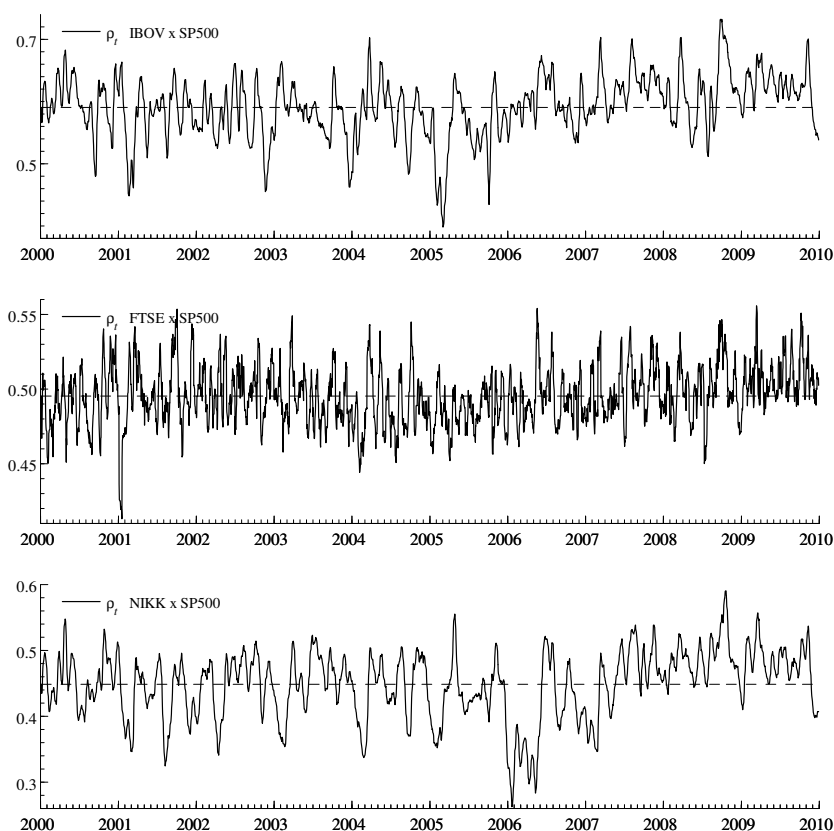


Figura 3
Cópula gaussiana: evolução de ρ_t

De acordo com a figura, nota-se que o nível do coeficiente de correlação incondicional, captado pela cópula constante, entre o S&P500 e o IBOVESPA é superior ao nível nas outras relações. A correlação incondicional entre o IBOVESPA e o S&P500 foi de 0.59, enquanto que para as outras relações envolvendo os índices FTSE e NIKKEI foi de 0.49 e 0.45, respectivamente. Todas as estruturas de correlação apresentaram um padrão semelhante, sendo que a partir de meados de 2007, a correlação ficou acima da média constante.¹⁸ De fato, ρ_t permaneceu acima da média incondicional, no intervalo 2007 a 2009, em torno de 80% das vezes para as relações envolvendo o IBOVESPA e NIKKEI e em torno de 60% das vezes para a relação entre o FTSE e S&P500. No intervalo restante, de 2000 a 2006, ρ_t situou-se em torno de 45% das vezes acima da média incondicional nos três modelos.

¹⁸Para as relações envolvendo o IBOVESPA e o NIKKEI, o padrão é mais visível.

Para analisar a presença de contágio financeiro entre os índices, a cópula gaussiana foi re-estimada com a presença de quebras estruturais – *dummies* (γ) – segregando os períodos de pré- crise e crise nos parâmetros que governam a evolução de ρ_t . Testar a hipótese de contágio financeiro implica em analisar se essas variáveis são significantes, o que representaria uma intensificação do canal de transmissão de choques durante o período de crise. Os resultados¹⁹ dos parâmetros estimados são apresentados na Tabela 3.

Pelos resultados da tabela percebe-se que o valor da função log-verossimilhança aumenta na presença de quebras estruturais para todos os grupos. e que o critério de informação BIC se reduz.

As estimativas dos parâmetros das cópias incondicionais apontam para um aumento da correlação incondicional, no período de crise em relação ao período de estabilidade, para os três modelos (*p-valor* para esse teste foi menor que 0.01). Para o modelo envolvendo o IBOVESPA e o NIKKEI, o aumento da correlação incondicional ficou em torno de 40% e para o modelo envolvendo o FTSE ficou em torno de 25%.

Em relação às estimativas de β_ρ , o processo que governa a dependência entre IBOVESPA e S&P500 mostrou-se como o mais persistente, em torno de -2.8. As estimativas das outras duas relações não foram significantes.

Tabela 3

Estimativas das cópias condicionais: gaussiana

Relações	Cópula gaussiana					
	ω_ρ	α_ρ	β_ρ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	2.731 (0.186)	-0.126 (0.181)	-2.765 (0.140)	1.170 (0.496)	0.785 (0.395)	-0.702 (0.303)
FTSE \times S&P500	0.771 (0.506)	0.158 (0.110)	0.343 (1.555)	0.626 (0.554)	-0.299 (0.133)	1.850 (1.206)
NIKKEI \times S&P500	1.594 (0.203)	0.214 (0.175)	-2.086 (0.400)	0.814 (0.820)	-0.348 (0.287)	0.200 (1.419)
Relações	Cópula gaussiana					
	$\bar{\rho}_1$	$\bar{\rho}_2$	LL	ll	BIC	bic
IBOVESPA \times S&P500	0.530 (0.015)	0.729 (0.013)	-601.65	-571.68	-1203.2	-1143.3
FTSE \times S&P500	0.460 (0.017)	0.572 (0.021)	-375.99	-365.09	-751.97	-730.19
NIKKEI \times S&P500	0.398 (0.019)	0.562 (0.021)	-306.06	-297.46	-612.11	-594.91

Obs: Os valores entre parênteses são os erros padrões. As colunas LL e BIC representam os valores da log-verossimilhança e do critério de informação BIC, sob a presença de quebra estrutural. As colunas ll e bic representam os mesmos valores sem a presença de quebra. Os valores ρ_i são as estimativas da cópula constante, *i.e.* a cópula gaussiana é estimada sem a equação 10. O número 1 representa o período pré crise e 2 representa o período de crise.

¹⁹As estimações foram feitas no MATLAB, com base nas rotinas disponibilizadas publicamente por Andrew Patton.

A variável *dummy* γ_ω , que capta o deslocamento no nível, foi significativa e positiva para a relação entre o S&P500 e o IBOVESPA, indicando que o nível do processo que governa a correlação linear ρ_t se eleva no período de crise, evidência esta a favor da presença de contágio financeiro. Pela tabela 3, percebe-se um aumento da correlação incondicional de 0.53 para 0.73, no período de crise. Para as outras duas relações, FTSE e NIKKEI, a variável *dummy* γ_ω não foi significativa. A única relação que não apresentou mudanças significantes em toda dinâmica da dependência foi NIKKEI \times S&P500.

A variável *dummy* γ_β , que capta mudanças de persistência do processo, foi significativa apenas para o modelo envolvendo o IBOVESPA, representando o processo com uma persistência ainda maior no período de crise.

A variável *dummy* γ_α , que capta aumentos de dependência causados pelos movimentos das variáveis motrizes, foi significativa para o modelos envolvendo o IBOVESPA e o FTSE, indicando aumento da dependência captada pelo comportamento conjunto dessas variáveis em períodos anteriores.

De forma geral, a cópula gaussiana apontou evidências de contágio no mercado brasileiro e algum efeito sobre o mercado de Londres. Para as relações envolvendo o NIKKEI, o modelo não apresentou sinais de contágio no mercado japonês. As evidências encontradas para esse modelo não permitem concluir que o canal de transmissão entre os mercados alterou-se nos dois períodos em questão.

Cópula SJC

Vários estudos²⁰ utilizam o coeficiente de correlação como medida de mensuração do padrão de contágio financeiro. Contudo, o coeficiente de correlação linear possui diversas limitações como medida de dependência entre variáveis. A correlação de Pearson possui ainda, de acordo com Forbes & Rigobon (2002) e Rigobon (2002), uma outra relevante limitação enquanto medida do contágio entre mercados. De acordo com os autores, um aumento na correlação condicional entre duas variáveis pode ser o reflexo apenas do aumento da volatilidade de uma das variáveis e, portanto, testes para contágio financeiro baseados no coeficiente de correlação linear são viesados, posto que a correlação linear entre mercados é condicionada à volatilidade do mercado em crise.

Segundo Pericoli & Sbracia (2003), uma definição geral de contágio financeiro é o aumento significativo da probabilidade de crise financeira em um país, condicionado a ocorrência da crise em outro país. Assim fenômeno contágio financeiro entre dois países – do país 2 para o país 1 – pode ser expresso como

$$\mathbb{P}(Y_1 > y_1 | Y_2 > y_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 > y_1) \quad (12)$$

ou seja, a definição de contágio em (12) implica que dada a ocorrência de uma crise financeira no país 2, a probabilidade de crise no país 1 é maior independentemente do que aconteceu no país 2. Essa definição coincide com a definição de

²⁰Por exemplo, Ramchand & Susmel (1998) e Ang & Chen (2002).

dependência no quadrante positivo (DQP)²¹ e pode-se mostrar que a DQP converge assintoticamente para a dependência de cauda. Dependências das caudas podem ser interpretadas, portanto, como fenômenos de contágios extremos positivos e negativos.

Para captar-se a presença de eventuais dependências nas caudas, foi então sugerida a cópula SJC, construída a partir da cópula Joe-Clayton, apresentada na seção 3.

Dentre as trajetórias das dependências de caudas, destaca-se a evolução tanto da cauda inferior como da cauda superior, onde a dependência de ambas as caudas apresentaram-se, em torno de 2007, acima da dependência média constante. De fatos, as duas dependências permaneceram acima da média incondicional em torno de 80% das vezes no intervalo de crise.

Para analisar a presença de contágio financeiro foi utilizado o mesmo princípio das cópulas gaussianas. Para as três possíveis combinações, a cópula SJC foi re-estimada com a presença de quebras estruturais, *dummies* γ segregando os períodos de pré-crise e crise, nos parâmetros que governam a evolução dos índices de cauda, equação 9, a fim de averiguar se houve uma mudança do processo nos dois períodos. Os resultados das estimativas são apresentados na Tabela 4 e na figura 6 (cauda inferior). Os valores das funções log-verossimilhança apresentaram um melhor ajuste para os três modelos em relação a ausência de mudança nos parâmetros.

Para o IBOVESPA, as estimativas das dependências de ambas caudas incondicionais ($\bar{\tau}$) foram maiores (*p*-valor menor que 0.01) no período de crise, representado um aumento de 70% da ocorrência de eventos extremos positivos e um aumento de 50% da presença de eventos extremos negativo, ambos condicionados a ocorrência dos mesmo no S&P500.

O modelo que envolve o FTSE não apresentou um aumento significativo da dependência da cauda incondicional positiva ($\bar{\tau}^U$) e o aumento da dependência da cauda incondicional negativa é significativo a 5%, indicando um aumento de 30% da ocorrência de eventos negativos condicionada a ocorrência dos mesmo no S&P500.

Para o índice NIKKEI, as estimativas de ambas caudas incondicionais foram significantes e maiores no período de crise (*p*-valor menor que 0.01), indicando que a dependência da cauda positiva mais que dobrou e a dependência da cauda negativa aumento em 45%.

Analisando o processo que governa a dependência na cauda superior, o parâmetro β_τ que mede a persistência do processo foi maior para a relação que envolve o FTSE e, para a dependência na cauda inferior, ele foi maior no modelo com o IBOVESPA.

²¹Duas variáveis aleatórias serão dependentes no quadrante positivo, se $\mathbb{P}(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 > y_1) \mathbb{P}(Y_2 > y_2)$. Assim se as variáveis aleatórias representam perdas financeiras, a dependência do quadrante positivo implicará em uma perda simultânea maior sob dependência entre as variáveis do que sob variáveis independentes

No que se refere a dependência na cauda superior, a única relação que apresentou uma mudança em todos os parâmetros que governam a dependência foi entre o IBOVESPA e o S&P500. O parâmetro γ_ω , que representa o deslocamento no nível do processo, foi positivo e significativo (em torno de 0.70), representando um aumento no nível da dependência – evidência da presença de contágio. Para as outras duas relações, esta variável *dummy* não foi significativa. O parâmetro γ_β foi significativo para os modelos envolvendo o IBOVESPA e o FTSE, indicando uma mudança de persistência entre os dois períodos. Para a relação envolvendo o NIKKEI não houve evidências de mudanças de persistência.

Tabela 4

Estimativas das cópulas condicionais: SJC

Relações	Cópula SJC – cauda superior τ^U					
	ω_τ	α_τ	β_τ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	1.466 (0.189)	-5.199 (0.965)	-3.328 (0.548)	0.703 (0.191)	-1.908 (0.444)	4.273 (0.393)
FTSE \times S&P500	1.847 (0.312)	-6.158 (0.476)	-5.100 (0.472)	-0.796 (0.436)	0.537 (1.919)	3.419 (1.468)
NIKKEI \times S&P500	1.212 (0.671)	-8.342 (2.863)	-5.732 (0.990)	-1.330 (0.825)	10.428 (1.739)	2.646 (3.538)
Relações	Cópula SJC – cauda inferior τ^L					
	ω_τ	α_τ	β_τ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	-1.650 (0.152)	-1.328 (0.401)	3.692 (0.227)	4.246 (0.373)	-6.663 (0.609)	-6.187 (0.629)
FTSE \times S&P500	-0.271 (0.453)	-4.545 (1.124)	1.160 (1.019)	3.102 (0.907)	-5.029 (3.719)	-5.012 (0.778)
NIKKEI \times S&P500	1.547 (0.385)	-6.099 (1.614)	-4.766 (0.406)	0.911 (0.483)	-2.458 (0.914)	1.143 (0.236)
Relações	Cópula SJC					
	$\bar{\tau}_1^U$	$\bar{\tau}_1^L$	$\bar{\tau}_2^U$	$\bar{\tau}_2^L$	LL	ll
IBOVESPA \times S&P500	0.322 (0.029)	0.330 (0.029)	0.556 (0.002)	0.506 (0.011)	-620.08	-611.09
FTSE \times S&P500	0.281 (0.029)	0.269 (0.030)	0.337 (0.041)	0.355 (0.038)	-391.25	-383.06
NIKKEI \times S&P500	0.141 (0.032)	0.240 (0.029)	0.334 (0.042)	0.351 (0.035)	-296.72	-287.42

Obs: Os valores entre parênteses são os erros padrões. A coluna LL representa os valores da log-verossimilhança, sob a presença de quebra estrutural. A coluna ll representa os mesmos valores sem a presença de quebra. Os valores $\bar{\tau}_i$ são as estimativas da cópula constante, *i.e.* a cópula SJC é estimada sem a equação 9 no período pré crise (1) e durante a crise (2).

O padrão de contágio foi mais evidente para o processo que governa a dependência na cauda inferior. O modelo envolvendo o IBOVESPA continuou apresentando uma mudança em todos os parâmetros que governam τ^L . Em relação a γ_ω , o parâmetro mostrou-se positivo e significativo para as relações envolvendo o IBOVESPA e FTSE (em torno de 4.3 e 3.1, respectivamente), indicando que no período de crise houve um deslocamento para cima no processo de dependência. Para a relação envolvendo o NIKKEI, o mesmo parâmetro foi também positivo, porém significativo apenas a 10%. O parâmetro γ_β foi significativo para todos os modelos, sugerindo que nesse período houve, em relação ao S&P500 e aos mercados estudados, uma mudança de persistência na evolução de τ^L .

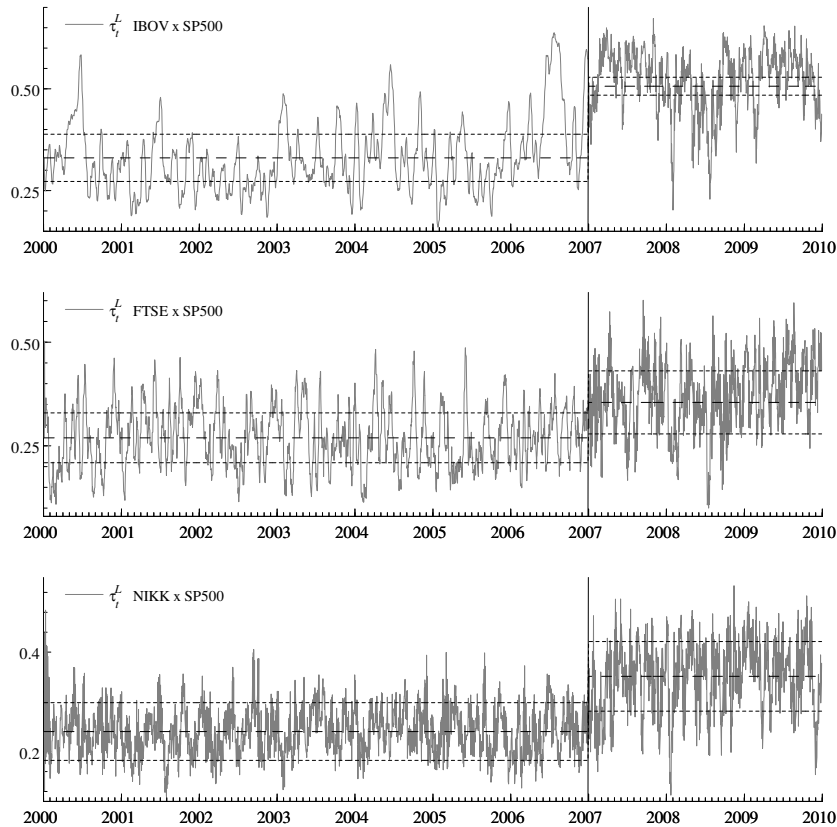


Figura 4
Cópula SJC: evolução de τ_t^L

Os resultados encontrados pela cópula SJC apontam para claros sinais de contágio entre o S&P500 e o IBOVESPA, levando a caracterização desses mercados

como altamente dependentes. Ainda, as evidências apontam que na presença de um choque em um deles, essa dependência aumenta de forma significativa. Sob o ponto de vista da teoria de carteiras internacionais, os resultados encontrados sugerem que os benefícios da diversificação não são válidos para carteiras com ativos desses dois países, principalmente para as carteiras mantidas durante a crise do *Subprime*.

Os sinais de contágio encontrados pela cópula SJC não foram tão claros para outros modelos envolvendo o FTSE e o índice NIKKEI.²² Para a dependência da cauda superior, *i.e.* contágio extremo de eventos positivos, uma mudança de persistência foi identificada apenas para a relação entre o FTSE e o S&P500 e nenhum dos modelos apresentou um deslocamento positivo e significativo do nível de dependência. Já para a dependência da cauda negativa, *i.e.* contágio extremo de eventos negativos, os sinais de contágio foram, relativamente, mais visíveis. Ainda que os dois modelos não apresentem uma mudança em todos os parâmetros de τ , foi detectado um deslocamento positivo e significativo do nível de τ^L . Ambos os processos apresentaram, também, mudanças de persistência de τ^L , durante o período de crise.

7. Conclusão

O presente artigo testou a hipótese de ocorrência de contágio financeiro durante a crise do Subprime entre quatro distintos mercados no mundo.

A definição de contágio financeiro adotada foi a proposta por Rigobon (2002) a saber, como o aumento significativo da dependência entre mercados após choque em um país específico, nos moldes da classe *shift-contagion*. Não compôs o escopo do teste aqui em questão considerar os fundamentos econômicos específicos de cada país envolvido, na mesma linha exibida em Pesaran & Pick (2007) e Marçal *et al.* (2011).

A hipótese da ocorrência de contágio foi testada por meio da teoria cópulas. A cópula gaussiana foi utilizada para modelar as dependências entre mercados sob a ausência de eventos extremos (*i.e.* num ambiente cotidiano), e a cópula SJC foi utilizada para captar as dependências entre mercados sob eventos extremos positivos e negativos.

Os resultados encontrados para cópula gaussiana apontam a presença de contágio no mercado brasileiro, sob um completa intensificação dos canais de transmissão durante o período de crise, e algum efeito significativo sobre o mercados de Londres. Esta cópula não apresentou sinais de contágio no mercado japonês, indicando uma ausência de alteração do canal de transmissão de choques durante o período de crise.

Os resultados encontrados para cópula SJC exibiram sinais de contágio en-

²²As evidências encontradas para o mercado japonês vão contra as encontradas em Horta *et al.* (2007). De uma lista de 7 países desenvolvidos, o mercado japonês foi o que apresentou maiores evidências de contágio financeiro. Entretanto, nossos resultados não são diretamente comparáveis uma vez que utilizamos amostra e índices de mercado diferentes.

tre o mercado americano e brasileiro, nos ambientes de eventos extremos positivos e negativos. Para os outros dois mercados, londrino e japonês, as evidências da presença de contágio não mostraram-se suficientemente claras. A cópia SJC não apresentou sinais de contágio sob eventos extremos positivos para estes dois últimos mercados. No que se refere-se a dependência durante eventos extremos negativos, a cópia SJC indicou sinais de contágio para ambos os mercados londrino e japonês, encontrando um deslocamento positivo e significativo.

Em reflexão geral acerca de ambos os modelos (gaussiana e SJC), os mercados americano e brasileiro apresentaram-se altamente dependentes em relação aos outros dois. A estrutura de dependência condicional entre IBOVESPA e S&P500 mostrou claras evidências de contágio financeiro em ambos modelos.

Este estudo remata seu propósito com a advertência de que o método utilizado para testar a hipótese da ocorrência de contágio, bem como as evidências encontradas, não permitem concluir sobre a direção causal entre o choque inicial em um país e o país que sofre o contágio.

Referências

- Ang, Andrew, & Chen, Joseph. 2002. Asymmetric Correlations of Equity Portfolios. *Journal of Financial Economics*, **63**, 443–94.
- Bauwens, Luc, & Laurent, Sebastian. 2005. A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**, 346–54.
- Benediktsdottir, Sigridur, & Scotti, Chiara. 2009. *Exchange Rates Dependence: What Drives It?* Federal Reserve Board. Unpublished mimeo.
- Dias, Alexandra, & Embrechts, Paul. 2003. *Dynamic Copula Models for Multivariate High Frequency Data in Finance*. ETH Zurich. Unpublished mimeo.
- Edwards, Sebastian. 2000. Contagion. *The World Economy*, **23**, 873–900.
- Eichengreen, Barry, Rose, Andrew K., & Wyplosz, Charles. 1996. *Contagious Currency Crises*. National Bureau of Economic Research. Unpublished mimeo.
- Embrechts, Paul, McNeil, Alexander J., & Strauman, Daniel. 2002. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: Dempster, Michael A. H. (ed), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press.
- Engle, Robert F. 2002. *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models*. New York University. Unpublished mimeo.
- Erb, Claude B., Harvey, Campbell R., & Viskanta, Tadas E. 1994. Forecasting International Equity Correlations. *Financial Analysts Journal*, **50**, 32–45.

- Forbes, Kristin, & Rigobon, Roberto. 2002. No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements. *Journal of Finance*, **57**, 2223–2261.
- Genest, Christian, Ghouli, Kilani, & Rivest, Louis-Paul. 1995. A Semi-Parametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions. *Biometrika*, **82**, 543–552.
- Giavazzi, Francesco, & Favero, Carlo A. 2000. *Looking for Contagion: Evidence from the ERM*. National Bureau of Economic Research. Unpublished mimeo.
- Hansen, Bruce E. 1994. Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, **35**, 705–730.
- Horta, Paulo, Mendes, Carlos, & Vieira, Isabel. 2007. *Contagion Effects of the US Subprime Crisis on Developed Countries*. CEFAGE-UE. Unpublished mimeo.
- IMF. 2008. *Global Financial Stability Report: Financial Stress and Deleveraging – Macrofinancial Implications and Policy*. Disponível em <http://www.imf.org/external/pubs/ft/gfsr/2008/02/index.htm>. Acessado em 1 junho de 2009.
- Joe, Harry. 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman Hall Press.
- Lambert, Philippe, & Laurent, Sébastien. 2001. *Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models and a Skewed Student Density*. Institut de Statistique, Université catholique de Louvain. Unpublished mimeo.
- Longin, François, & Solnik, Bruno. 2001. Extreme Correlation of International Equity Markets. *Journal of Finance*, **56**, 649–676.
- Manner, Hans, & Candelon, Bertrand. 2007. *Testing for Market Linkages: A New Approach Based on Time-Varying Copulas*. Universiteit of Maastricht. Unpublished mimeo.
- Marçal, Emerson F., & Valls Pereira, Pedro L. 2008. Testing the Hypothesis of Contagion Using Multivariate Volatility Models. *Brazilian Review of Econometrics*, **28**, 191–216.
- Marçal, Emerson F., Valls Pereira, Pedro L., Martin, Diógenes M. L., & Nakamura, Wilson T. 2011. Evaluation of Contagion or Interdependence in the Financial Crises of Asia and Latin America, Considering the Macroeconomic Fundamentals. *Applied Economics*, **43**, 2365–2379.
- Markowitz, Harry M. 1987. *Mean Variance Analyses in Portfolio Choice and Capital Markets*. Oxford: Basil Blackwell.

- Mendes, Beatriz V. M. 2005. Asymmetric Extreme Interdependence in Emerging Equity Markets. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **21**, 483–498.
- Murphy, David. 2009. *Unravelling the Credit Crunch*. Chapman and Hall/CRC Press.
- Nelsen, Roger B. 2006. *An Introduction to Copulas*. 2 edn. New York: Springer-Verlag.
- Patton, Andrew J. 2002. *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*. Phd dissertation, University of California, San Diego.
- Patton, Andrew J. 2006. Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review*, **47**, 527–556.
- Patton, Andrew J. 2009. Copula-Based Models for Financial Time Series. In: Andersen, Torben G., Davis, Richard A., Kreiß, Jeans-Peter, & Mikosch, Thomas (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Berlin: Springer.
- Pericoli, Marcelo, & Sbracia, Massimo. 2003. A Primer on Financial Contagion. *Journal of Economic Surveys*, **17**, 571–608.
- Pesaran, Mohammad H., & Pick, Andreas. 2007. Econometric Issues in the Analysis of Contagion. *Journal of Economic Dynamic and Control*, **31**, 1245–1277.
- Ramchand, Latha, & Susmel, Raul. 1998. Volatility and Cross Correlation Across Major Stock Markets. *Journal of Empirical Finance*, **5**, 397–416.
- Rigobon, Roberto. 2002. *International Financial Contagion: Theory and Evidence in Evolution*. Research Foundation of the Association for Investment Management and Research (AIMR).
- Rodriguez, Juan C. 2007. Measuring Financial Contagion: A Copula Approach. *Journal of Empirical Finance*, **14**, 401–423.
- Samitas, Aristeidis, Kenourgios, Dimitris, & Paltalidis, Nikos. 2007. *Financial Crisis and Stock Market Dependence*. In 14th Annual Conference of the Multi-national Finance Society, Thessaloniki, Greece.
- Sklar, Abe. 1959. Fonctions de Répartition Á N Dimensions et Leurs Marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229–231.
- Souza, Manuela M., & Tabak, Benjamin M. 2009. *Testes de Contágio Entre Sistemas Bancários – A Crise Do Subprime*. Banco Central do Brasil. Mimeo não publicado.
- Trivedi, Pravin K., & Zimmer, David M. 2007. *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. Boston: Now Publishers.