



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

De Genaro Dario, Alan; Fernández, Mariela  
Geração de Cenários de Estresse para Curva de Juros  
Revista Brasileira de Finanças, vol. 9, núm. 3, 2011, pp. 413-436  
Sociedade Brasileira de Finanças  
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305824884005>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# Geração de Cenários de Estresse para Curva de Juros

## (Generating Interest Rate Stress Scenarios)

Alan De Genaro Dario\*

Mariela Fernández\*\*

### Resumo

Este artigo descreve uma aplicação da classe de modelos Heath-Jarrow-Morton na geração de cenários de estresse para a estrutura a termo da taxa de juros. Por meio da análise de componentes principais consegue-se reduzir a dimensão do problema e criar uma ponte entre a informação que um especialista possui para definir cenários, informação geralmente de dimensão baixa, e a robustez do modelo Heath-Jarrow-Morton. A metodologia é aplicada ao mercado brasileiro no auge da crise em 2008 e em outras oportunidades.

**Palavras-chave:** Heath-Jarrow-Morton; estrutura a termo da taxa de juros; teste de estresse; risco de evento.

**Códigos JEL:** G12; C51.

### Abstract

This paper describes the use of the Heath-Jarrow-Morton framework to generate stress scenarios for the term structure of the interest rate. By means of principal component analysis it is possible to reduce the dimensions of the problem and create a bridge between the information a specialist possesses for defining scenarios, such information generally being of low dimensions, and the robustness of the HJM model. The methodology is applied to Brazilian Market data during the market meltdown in 2008 and from other occasions.

**Keywords:** Heath-Jarrow-Morton; term structure of the interest rate; stress test; event risk.

---

Submetido em julho de 2010. Aceito em abril de 2011. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Ricardo P. C. Leal. Os autores gostariam de agradecer os comentários recebidos dos participantes no IX Encontro Brasileiro de Finanças e Itaú-Unibanco. Um agradecimento especial aos dois revisores pelas sugestões efetuadas e Guilherme Yanaka. Erros e omissões são de nossa responsabilidade. As opiniões contidas neste artigo são atribuída apenas aos autores e não às instituições que eles são filiados.

\*BM&FBovespa e IME/USP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: [adario@bvmf.com.br](mailto:adario@bvmf.com.br)

\*\*Sem vínculo institucional. E-mail: [marfer@ime.usp.br](mailto:marfer@ime.usp.br)

## 1. Introdução

A avaliação da perda potencial de uma carteira contemplando o risco de evento tem tido uso crescente no meio acadêmico ou na comunidade financeira, sendo que, nesta última, de maneira espontânea ou por imposição regulatória. O exemplo mais recente do uso regulatório do teste de estresse ocorreu nos Estados Unidos da América no começo de 2009, quando todas as instituições financeiras foram obrigadas a avaliar o risco de suas carteiras utilizando o conceito de teste de estresse.<sup>1</sup> A despeito de sua vantagem em relação a outras formas de mensurar o risco de mercado, uma crítica bastante recorrente em relação ao teste de estresse é o seu caráter subjetivo.

A dificuldade inicial identificada pelos críticos à utilização do teste de estresse residia no fato desta ser uma metodologia que não estava completamente consolidada, diferentemente do *Value at Risk*, VaR. Entretanto, ao longo dos anos com os trabalhos de Kupiec (1998), Berkowitz (1999) e outros, as bases para realização do teste de estresse foram criadas.

Todavia, verificam-se, nos últimos anos, uma tendência entre os participantes do mercado e as entidades reguladoras em completar as medidas de risco, em que a métrica usual é o VaR, com as estimativas de teste de estresse. Por exemplo, o Banco Central do Brasil submete<sup>2</sup> as instituições financeiras a testes de estresse para avaliar a resiliência de cada instituição em suportar situações extremas sem comprometer a estabilidade do sistema financeiro (Banco Central do Brasil, 2009).

Desta forma, a literatura sobre construção de testes de estresse, bem como a definição dos cenários de estresse tem crescido ao longo dos anos. Em Dario (2004) o autor faz uso da Teoria dos Valores Extremos, TVE, para a geração de cenários de estresse para fatores de risco *spot* e temporais não correlacionados. A vantagem do uso da TVE para a geração de cenários foi o emprego de uma abordagem probabilística para resolver o eminentemente caráter subjetivo. Entretanto, a despeito de sua propriedade para os fatores de risco *spot*, bem como para a geração de choques “paralelos” nos fatores temporais, a mesma não seria apropriada para a construção de cenários que contemplam outros movimentos na estrutura temporal.

Rezende (2008) propõe uma metodologia de construção de cenários de estresse probabilísticos para as curvas de juros com base no modelo Autoregressivo Quantílico (QAR) conforme desenvolvido por Koenker & Xiao (2002, 2004, 2006). O autor estima cenários condicionais para as variações paralelas e de inclinação da curva de juros doméstica, incorporando assim a correlação entre os diferentes vértices da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ), ausente por exemplo no trabalho de Dario (2004). De maneira comparativa, a principal

<sup>1</sup> Vide matéria no Bank Capital Gets Stress Test de 26/02/2009 do Wall Street Journal disponível em <http://online.wsj.com/article/SB123557705225772665.html>

<sup>2</sup> A base legal é dada pela resolução 3464 de 26/06/07 que institui de maneira geral a necessidade de testes de estresse para avaliar a adequação de capital das instituições financeiras. De maneira complementar, a Circular 3478 de 24/12/2009 qualifica os critérios para a realização do teste de estresse para as instituições financeiras que adotam modelos internos para avaliação de risco de mercado.

diferença entre o trabalho de Rezende (2008) e o presente artigo, reside na possibilidade da metodologia ora proposta permitir a combinação de elementos subjetivos,<sup>3</sup> ainda bastante presentes nas instituições financeiras conforme reporta as sondagens do CGFS – Committee on the Global Financial System (2001, 2005), e os objetivos na definição dos cenários de estresse.

Jamshidian & Zhu (1997) propõem uma estrutura computacionalmente eficiente para a geração de cenários para a mensuração de risco de uma carteira ao adotar uma separação entre os processos de simulação e de reavaliação do risco da carteira calculado pelo VaR. Neste aspecto, este artigo é muito próximo ao presente, entretanto a representação de uma estrutura Heath-Jarrow-Morton, HJM, bem como o foco no risco de evento, são os grandes diferenciais.

Em termos comparativos e sem o formalismo que será incorporado na seção 3 o que diferencia a classe de modelos HJM dos modelos mais conhecidos da literatura de taxas de juros, tais como Cox *et al.* (1985) e Vasicek (1977) é o fato que estes últimos modelam a evolução de um conjunto de variáveis de estado  $X_1(t), \dots, X_N(t)$  e as taxas *forwards* são obtidas como subproduto. Adicionalmente, caso fossem empregados modelos unifatoriais para a dinâmica da taxa de juros, as taxas *forwards* de quaisquer maturidade seriam perfeitamente correlacionadas, o que torna os modelos unifatoriais de uso limitado, principalmente para modelar movimentos não paralelos na curva de juros, bem como para o apreçamento de opções sobre taxas de juros<sup>4</sup> *forwards*, como por exemplo, as opções de DI negociadas na BM&FBOVESPA. Por outro lado, o modelo HJM modela a dinâmica de um conjunto de taxas *forwards* diretamente e, pela ausência de arbitragem, constrói a curva *spot*. A contrapartida a este modelo é a necessidade de descrever a evolução de toda curva de juros, o que, em última instância, seria um problema de dimensão infinita caso não seja restringido o número de taxas de interesse.

O uso de modelos que incorporem condições de não-arbitragem para descrever a dinâmica da ETTJ tem crescido nos últimos anos.<sup>5</sup> Por exemplo Christensen *et al.* (forthcoming) introduzem as restrições de não arbitragem ao modelo Nelson & Siegel (1987) em uma forma dinâmica. Os autores, utilizando quase os mesmos dados que Diebold & Li (2006), mostram que as restrições de não arbitragem melhoram substancialmente as performances do modelo em relação ao ajuste dentro da amostra e à previsão fora da amostra.

<sup>3</sup>A definição de cenários de estresse de forma arbitrária ou subjetiva, mesmo que questionável entre os acadêmicos, ainda é o método pelo qual os responsáveis pelo gerenciamento de risco de uma instituição financeira conseguem avaliar a perda máxima de uma carteira em uma forma intuitiva e de fácil interpretação. Em função da sua fácil interpretação é razoável supor que este método continue sendo utilizado, porém combinado com ferramentas quantitativas de cunho probabilístico.

<sup>4</sup>Uma recente aplicação do modelo HJM para o apreçamento de opções de juros negociadas na BM&FBOVESPA, porém sobre o IDI, pode ser encontrada em Barbedo *et al.* (2010).

<sup>5</sup>Esta mesma tendência se verifica nos problemas de interpolação da superfície de volatilidade, por exemplo, pode-se citar Kahalé (2004).

Neste contexto o presente artigo, apesar de não comparar sua superioridade em relação aos métodos onde esta condição não se verifica, adota uma formulação livre de arbitragem para a geração de cenários de estresse, pois assim pode-se obter como subproduto a estrutura necessária para a realização simultânea do teste de estresse para opções de taxa de juros *forward*, por exemplo, as opções de DI, pela técnica de *full valuation* sem violar a hipótese básica nos modelos de apreçamento de opções que é a ausência de arbitragem no ativo subjacente.

Sendo assim, diante da importância do teste de estresse como uma ferramenta para mensurar o risco de evento, o objetivo deste artigo é apresentar uma metodologia para geração de cenários de estresse para a evolução da taxa de juros prefixada em um contexto livre de arbitragem flexível o suficiente para permitir a combinação de elementos subjetivos com os objetivos, ou seja, a opinião de especialistas com ferramentas estatísticas e matemáticas.

Assim, o artigo é formado, além desta introdução, pela seção 2 onde se descreve as principais metodologias para se conduzir o teste de estresse. Na seção 3 se apresenta o modelo HJM junto com a sua estrutura de volatilidade e a correspondente versão discreta. Na seção 4 é apresentado o modelo para a geração de cenários que inclui o valor de estresse indicado por um especialista para um conjunto finito de vértices da Estrutura a Termo da Taxa de Juros. Alguns exemplos de aplicação da metodologia descrita são exibidos na seção 5. Finalmente, na seção 6, estão as considerações finais.

## 2. Metodologias para o Teste de Estresse

A idéia essencial subjacente à realização do teste de estresse é atribuir uma “considerável” mudança no preço dos ativos em decorrência de um cenário de mudança abrupta e quantificar a perda potencial que se incorre. Atualmente existem algumas metodologias disponíveis para a realização do teste de estresse, as quais apresentam vantagens e desvantagens de acordo com a sua utilização. Brevemente, as principais metodologias para a determinação dos cenários para a realização do teste de estresse podem ser apresentadas como:

- **Análise de Cenário:** Criação e uso de cenários potenciais futuros para medir o *Profit and Loss* - P&L - da posição;
- **Simulação Histórica:** Utilização de eventos passados para a determinação do P&L, principalmente aqueles que geraram as maiores variações no valor do portfolio;
- **VaR estressado:** Os parâmetros que são utilizados no cálculo do VaR são estressados. Modifica-se, por exemplo, a volatilidade dos ativos, bem como a estrutura de correlação;
- **Teste de estresse sistemático:** Consiste na criação de uma série de cenários de estresse para os principais fatores de risco de um portfolio. A diferença

entre este método e os anteriores é que a avaliação de risco do portfolio é feita de maneira sistêmica e de tal forma que contemple todos os riscos envolvidos e não apenas de forma pontual para contemplar alguns fatores de risco do portfolio.

O trabalho de Vieira-Neto & Urban (2003)), o qual enquadra-se na categoria dos testes de estresse sistemáticos, apresenta a metodologia da BM&FBOVESPA para a avaliação das margens de garantia dos contratos derivativos negociados no segmento BM&F. O conceito subjacente à metodologia de avaliação das margens consiste em decompor os contratos, segundo uma condição de não-arbitragem, em seus fatores primitivos de risco e avaliá-los conjuntamente em um cenário de estresse. A diferença entre o trabalho de Vieira-Neto & Urban (2003) e o ora proposto reside no fato que o objetivo do primeiro é a construção de uma metodologia para realização de um teste de estresse e toma como dado o valor dos cenários que se deseja avaliar o portfolio, enquanto o segundo toma como dada a metodologia para a realização do teste de estresse e busca-se construir cenários para os movimentos da curva de juros. Sendo assim, pode-se dizer que o trabalho Vieira-Neto & Urban (2003) e o presente se completam.

Os testes de estresse apresentam limitações, entretanto são métricas mais robustas para mensurar riscos que ocorrem com baixa probabilidade. Certamente, o tópico mais problemático nos teste de estresse é o caráter subjetivo na determinação dos cenários. Como resultado, a qualidade do teste de estresse depende, em grande maneira, da *expertise* e sensibilidade do(s) profissional(is) envolvido(s).

Um segundo problema apontado é a dificuldade para interpretar os resultados obtidos uma vez que, na maioria das vezes, não temos associada a probabilidade de ocorrência do evento. Logo, por não estar probabilisticamente embasada, a realização de uma grande perda na ocorrência de um cenário não implicará necessariamente na alteração do portfolio por parte da instituição. A esse respeito pode-se apontar a frase de Berkowitz (1999) (*apud* Aragonés *et al.* (2001, p.45)):

“... this absence of probabilities puts stress testing in a statistical purgatory. We have some loss numbers but who is to say whether we should be concerned about them?”

Finalmente, o uso de teste de estresse é conceitualmente simples de ser aplicado a ativos isolados, entretanto sua extensão ao caso de vários ativos não é tão direta. Logo a construção dos cenários de estresse deve contemplar alguma estrutura de correlação, mesmo que não seja a histórica usual.

A relevância de cada uma das críticas acima pode ser considerada, até certo ponto, como limitante à adoção do teste de estresse como uma ferramenta de uso constante pelas instituições financeiras. Entretanto, o modelo ora sugerido é capaz de corrigir algumas das falhas consideradas e, portanto tende a ser uma metodologia relevante na atribuição de cenários de estresse, bem como sua probabilidade de ocorrência para modelar o risco de mercado para a Estrutura a Termo da Taxa de Juros.

### 3. Modelo de Heath-Jarrow-Morton

O intuito da presente seção é dar uma descrição sucinta do modelo HJM e da calibração da estrutura de volatilidade correspondente. Primeiramente são exibidas as expressões matemáticas que definem o modelo HJM. Segue-se com a descrição das relações utilizadas para a aplicação de tal modelo. Finalmente, é dada a estrutura de volatilidade do processo das taxas. É importante ressaltar que, uma vez que o objetivo do modelo é criar cenários de estresse para a ETTJ e não o de apreçar ativos contingentes, não se faz necessário qualquer digressão sobre a mudança para a medida de probabilidade na qual os processos são martingais, bem como a caracterização do prêmio de risco.

A família de modelos HJM descreve a curva de taxas *forward* instantâneas como um processo estocástico, mais especificamente, a dinâmica de todos os vencimentos é modelada por uma única equação diferencial estocástica multivariada. A equação do processo das taxas *forward* instantâneas é a seguinte

$$df_t(T) = \mu_t(T)dt + \sigma_t(T)d\mathbf{W}_t \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{W}_t$  um movimento Browniano multidimensional. A dimensão é dada pela quantidade de fatores de risco ou de incerteza que influenciam na dinâmica da ETTJ, tal quantidade é denotada aqui por  $\nu$ .

Uma das principais características do modelo é a de descrever um mercado livre de arbitragem, sendo que tal condição é dada pela relação entre o *drift* e a volatilidade do processo,

$$\mu_t(T) = \sigma_t(T) \cdot \int_t^T \sigma_t(s)ds = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_t^j(T) \int_t^T \sigma_t^j(s)ds \quad (2)$$

para cada vencimento  $T$ .

Como o objetivo é aplicar o modelo considerando dados observados e como a taxa *forward* instantânea não é observável e não é bem aproximada para vencimentos longos, trabalha-se com a expressão do modelo HJM para a taxa de juros *spot*  $r_t$ . Utilizando a igualdade  $r_t := f_0(t)$  tem-se que

$$r_t = r_0 + \int_0^t \left( \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_s^j(t) \int_s^t \sigma_s^j(u)du \right) ds + \int_0^t \sigma_{s(t)} d\mathbf{W}_s \quad (3)$$

Maiores detalhes da dedução do modelo podem ser vistos, por exemplo, em Avellaneda & Laurence (2000) e em James & Webber (2000).

Em função da observabilidade das taxas em intervalos não contínuos, descreve-se na sequência os passos para obter uma versão discreta da expressão dada na equação (3). O modelo de diferenças finitas da taxa de juros considerando  $\nu$  fatores pode ser descrito como segue

$$\Delta r_t = \mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta \mathbf{W}_t \quad (4)$$

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \mu_t \Delta t + \sigma_t \sqrt{\Delta t} \mathbf{Z}_t \quad (5)$$

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \mu_t \Delta t + \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_t^j \sqrt{\Delta t} Z_t^j \quad (6)$$

sendo  $Z_t^j$  uma variável aleatória gaussiana padrão tal que  $Z_t^j$  é independente de  $Z_t^s$  para  $j \neq s$  e  $j = 1, \dots, \nu$ .

A seguir é utilizada a análise de componentes principais para determinar a quantidade de fatores  $\nu$  a serem modelados. Conforme se tornou padrão após o trabalho de Litterman & Scheinkman (1991) no estudo de componentes principais, são escolhidos os três maiores autovalores, identificados como a representação dos movimentos de deslocamento paralelo, inclinação e curvatura, ou seja,  $\nu = 3$ . Como será visto na tabela 3 os três primeiros autovetores explicam mais de 95% da variação amostral da curva de juros.

Assumindo  $N$  vértices e  $\mathcal{T}$  observações constroe-se a dinâmica empírica da taxa como segue.

$$\mathbf{r}_{t+1} - \mathbf{r}_t = \hat{\mu} + \hat{C} \mathbf{Y}_t \quad (7)$$

sendo  $\mathbf{Y}_t$  um vetor de  $N$  variáveis aleatórias gaussianas e

$$\mathbf{r}_{t+1} - \mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} (r_{t+1}^1 - r_t^1)/\hat{\sigma}^1 \\ (r_{t+1}^2 - r_t^2)/\hat{\sigma}^2 \\ \vdots \\ (r_{t+1}^N - r_t^N)/\hat{\sigma}^N \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \frac{1}{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{\mathcal{T}-1} (r_{t+1}^1 - r_t^1)/\hat{\sigma}^1 \\ \sum_{t=1}^{\mathcal{T}-1} (r_{t+1}^2 - r_t^2)/\hat{\sigma}^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{\mathcal{T}-1} (r_{t+1}^N - r_t^N)/\hat{\sigma}^N \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \hat{\rho}^{1N} \\ \hat{\rho}^{21} & \cdots & \hat{\rho}^{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}^{N1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

sendo  $r_t^i$  a taxa observada na data  $t$  para a maturidade  $i$ ,  $\hat{\sigma}^i$  a variância amostral da série  $(r_{t+1}^i - r_t^i)_{t=1}^{\mathcal{T}-1}$  e  $\hat{\rho}^{ij}$  o coeficiente de correlação das séries  $(r_{t+1}^i - r_t^i)_{t=1}^{\mathcal{T}-1}$  e  $(r_{t+1}^j - r_t^j)_{t=1}^{\mathcal{T}-1}$ .

Denota-se por  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  os autovalores de  $\hat{C}$ , assumindo que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , e por  $\Lambda$  a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \sqrt{\lambda_N} \end{pmatrix} \quad (9)$$

A matriz dos autovetores correspondentes é denotada por  $\mathbf{V}$ . Assim, pela análise de componentes principais tem-se que

$$\hat{C}\mathbf{Y}_t = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}_t = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{Z}_t \approx \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} \mathbf{V}_{\bullet j} Z_t^j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} \mathbf{V}_{1j} Z_t^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} \mathbf{V}_{Nj} Z_t^j \end{pmatrix} \quad (10)$$

Aplicando a aproximação anterior em (7) tem-se

$$r_{t+1}^i - r_t^i = \hat{\mu}^i \hat{\sigma}^i + \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} \mathbf{V}_{ij} \hat{\sigma}^i Z_t^j \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (11)$$

Da comparação dos termos estocásticos das equações (6) e (11), para  $\nu = 3$ , obtem-se

$$\sigma_t^j \approx \sqrt{\frac{\lambda_j}{\Delta t}} \mathbf{V}_{\bullet j} \hat{\sigma}^j \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

como no presente trabalho foram utilizadas observações diárias, a expressão acima resulta ser  $\sigma_t^j \approx \sqrt{\frac{\lambda_j}{1/252}} \mathbf{V}_{\bullet j} \hat{\sigma}^j$ . Portanto, os autovetores obtidos na análise de componentes principais permitem estimar a estrutura de volatilidade. Para tal estimativa assume-se uma forma funcional paramétrica para a volatilidade de cada fator  $j$  e calibram-se, por mínimos quadrados, tais parâmetros. A seguir é dada a expressão funcional da volatilidade utilizada e o *drift* livre de arbitragem correspondente.

$$\sigma_t^j(T) = (\alpha_j + \beta_j(T-t)) e^{\gamma_j(T-t)} + \delta_j, \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (13)$$

e

$$\mu_t(T) = \sum_{j=1}^3 \sigma_t^j(T) \left[ \delta_j(T-t) + \frac{\beta_j}{\gamma_j} (T-t) e^{\gamma_j(T-t)} + (e^{\gamma_j(T-t)} - 1) \left( \frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \frac{\beta_j}{\gamma_j^2} \right) \right] \quad (14)$$

Antes de continuar com a calibragem dos parâmetros, é importante observar que espera-se que os parâmetros  $\gamma_j$  da equação (13) sejam valores negativos para reproduzir o comportamento regularmente observado de  $\sigma_t^j$ , isto é, volatilidade quase constante para vencimentos longos. Basicamente é um modelo Gaussiano

corrigido pelo termo  $\delta_j$ . Maiores detalhes sobre a escolha da forma funcional da volatilidade podem ser consultados em James & Webber (2000) e em Renò & Uboldi (2002). Como dito anteriormente, os parâmetros  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  e  $\delta_j$  são obtidos pelo método dos mínimos quadrados procurando ajustar a forma funcional da equação (13) à volatilidade histórica. Logo  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  e  $\delta_j$  são tais que minimizam a média do erro quadrático das maturidades  $i = 1, \dots, N$ , isto é,

$$\arg \min \sum_{i=1}^N \left( (\alpha_j + \beta_j \frac{i}{252}) e^{\gamma_j \frac{i}{252}} + \delta_j - \sqrt{\frac{\lambda_j}{1/252}} V_{ij} \hat{\sigma}^i \right)^2, \text{ para } j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Uma vez determinados os parâmetros das formas funcionais das volatilidades é imediato calcular o *drift* e assim obtém-se, para cada vértice  $T_i$ , a estrutura temporal da taxa de juros

$$r_{0+1}(T_i) = r_0(T_i) + \frac{1}{252} \mu(T_i) + \sqrt{\frac{1}{252}} \left( \sigma^1(T_i) \xi_1 + \sigma^2(T_i) \xi_2 + \sigma^3(T_i) \xi_3 \right) \quad (16)$$

sendo  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  variáveis aleatórias independentes com distribuição gaussiana padrão.

Para utilizar a expressão anterior como uma previsão da taxa num período de  $HP$  dias deve-se adaptar a fórmula (16) como segue

$$r_{0+HP}(T_i) = r_0(T_i) + \frac{HP}{252} \mu(T_i) + \sqrt{\frac{HP}{252}} \left( \sigma^1(T_i) \xi_1 + \sigma^2(T_i) \xi_2 + \sigma^3(T_i) \xi_3 \right) \quad (17)$$

O passo seguinte é determinar os choques, isto é, os valores das variáveis  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  para construir um cenário de estresse.

#### 4. Construção dos cenários

Uma vez descrito o modelo teórico e a sua calibração, devem ser definidos os choques nas variáveis independentes  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  para se obter a ETTJ num cenário de estresse. Essa definição é equivalente a determinar os três movimentos principais da curva, isto é, nível, inclinação e curvatura. Geralmente, quem procura como produto final a estrutura da taxa num cenário possui uma estimativa dos três movimentos principais, seja por experiência, por análise estatística ou por análise macroeconômica. Sendo assim, assume-se aqui que se deseja construir um cenário que satisfaça para três vértices dados  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  os choques correspondentes  $choque_1$ ,  $choque_2$  e  $choque_3$ .

A seguir define-se o elo entre a estimativa de nível, inclinação e curvatura e a definição dos valores extremos para as variáveis  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ . Com tal fim é definido o seguinte sistema linear

$$\frac{HP}{252} \begin{pmatrix} \mu(T_1) \\ \mu(T_2) \\ \mu(T_3) \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{HP}{252}} \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{choque}_1 \\ \text{choque}_2 \\ \text{choque}_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

O sistema acima pode ser interpretado da seguinte maneira, determinando os três pontos

$$(T_1, \text{choque}_1), (T_2, \text{choque}_2) \text{ e } (T_3, \text{choque}_3),$$

se obtém os três movimentos da ETTJ desejados, isto é, nível, inclinação e curvatura para um *holding period* HP dado.

Antes de continuar com a construção dos cenários observa-se que, pela independência dos três fatores e das volatilidades correspondentes, espera-se que o sistema linear anterior possua uma única solução, isto é,

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (19)$$

onde  $\det(A)$  denota o determinante da matriz A. No entanto, caso  $\det(A) = 0$  propõe-se aplicar o seguinte “ajuste numérico” na matriz A

- Se  $\sigma^1(T_2)\sigma^2(T_3) \neq \sigma^2(T_2)\sigma^1(T_3)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) + \epsilon \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \quad (20)$$

- Se  $\sigma^1(T_2)\sigma^2(T_3) = \sigma^2(T_2)\sigma^1(T_3)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) + \epsilon \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) + \frac{\epsilon}{2} & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \quad (21)$$

sendo  $\epsilon$  um número positivo pequeno, como por exemplo  $\epsilon = 10^{-10}$ . O ajuste proposto resolve o problema do sistema não ter solução única sem mudanças significativas na estrutura de volatilidade que determina os choques  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ .

Uma vez determinadas as funções de volatilidades  $\sigma^j$  e os valores para cada fator  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , a curva de estresse para um *holding period* de HP dias úteis poder ser construída como segue

$$r_{0+HP}(T_i) = r_0(T_i) + \frac{HP}{252} \mu(T_i) + \sqrt{\frac{HP}{252}} \left( \sigma^1(T_i) \xi_1 + \sigma^2(T_i) \xi_2 + \sigma^3(T_i) \xi_3 \right) \quad (22)$$

para cada maturidade  $T_i$ .

Como subproduto obtém-se o nível de confiança do choque dado num vértice  $T_i$ , mais especificamente, pode ser calculado o valor da probabilidade:

$$\mathbb{P}(r_{0+HP}(T_i) - r_0(T_i) \leq \text{choque}_i) \quad (23)$$

Como  $\sqrt{\frac{HP}{252}}(\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3)$  possui distribuição gaussiana com média zero e variância  $\frac{HP}{252}(\sigma^1(T_i)^2 + \sigma^2(T_i)^2 + \sigma^3(T_i)^2)$  e como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_{0+HP}(T_i) - r_0(T_i) \leq \text{choque}_i) &= \\ \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{HP}{252}}(\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3) \leq \text{choque}_i - \frac{HP}{252}\mu(T_i)\right) \end{aligned} \quad (24)$$

a probabilidade pode ser facilmente calculada. Ou seja, pode ser determinado o nível de confiança do choque dado no vértice  $T_i$ .

Na seção a seguir é aplicado o modelo HJM, conciliando a construção de um especialista, conforme descrito nesta seção, aos dados do mercado brasileiro.

## 5. Implementação no mercado brasileiro

Nesta seção são apresentados alguns resultados obtidos quando a aplicação da metodologia de geração de cenários de taxas de juros ao mercado brasileiro.

Inicialmente é observada a liquidez dos contratos de juros para a escolha dos  $N$  vértices que tendem a ser referência na construção dos cenários. Os vencimentos do contrato futuro de DI negociados na BM&FBOVESPA são mostrados na tabela 1.

**Tabela 1**

Vencimentos do contrato futuro de DI com maior volume de negociação na BM&FBOVESPA no 7 de abril de 2009

Vencimento	Dias úteis	Percentual de negócios
Janeiro/2010	185	33%
Janeiro/2012	687	32%
Janeiro/2011	436	16%
Outubro/2009	122	6%
Julho/2009	57	4%
Julho/2010	308	2%

Observando a liquidez dos contratos, foram escolhidos os seguintes vértices para calibrar a estrutura de volatilidade.

**Tabela 2**

Vértices expressos em dias úteis utilizados para a calibração da estrutura de volatilidade do modelo HJM

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$
84	147	210	273	336	462	588	756	840	1008

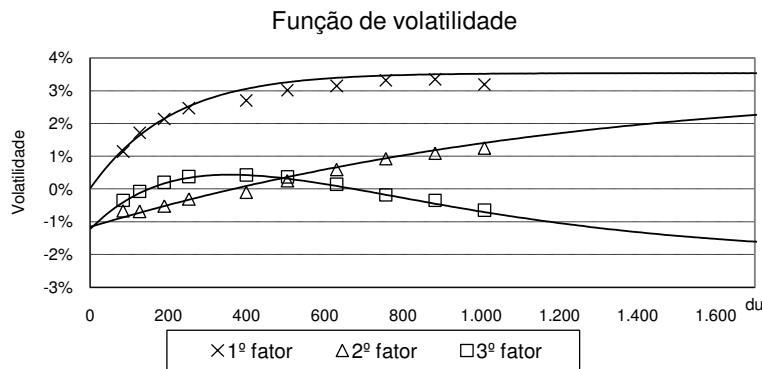
Para os vértices da tabela 2 foram coletadas as variações diárias da taxa de juros prefixada desde fevereiro de 2003 até março de 2009. Tais taxas foram obtidas via interpolação exponencial do contratos futuros de DI negociados na BM&FBOVESPA. O tamanho da amostra foi escolhido de forma tal que permita calibrar a estrutura de volatilidade do modelo e desconsidere o evento político de 2002 de eleição presidencial, no entanto, salienta-se que não é o foco do presente trabalho estudar o tamanho ideal da amostra. Para a massa histórica escolhida foi aplicada a análise de componentes principais e os resultados obtidos são expressos na tabela 3.

**Tabela 3**

Decomposição da variação da estrutura da taxa prefixada em seus componentes principais

Componente	Explicação
1º (nível)	88,92%
2º (inclinação)	7,66%
3º (curvatura)	1,82%
Total	98,40%

Conforme já colocado, o uso de três fatores é suficiente para descrever mais de 95% da variação da taxa de juros. Por último, a partir da mesma análise de componentes principais, é calibrada a função de volatilidade para cada um dos componentes conforme colocado na equação (15). Na figura 1 é exibida a calibração da estrutura de volatilidade dos três primeiros fatores.

**Figura 1**

Estrutura de volatilidade dos três componentes principais. Os pontos representam os valores históricos (autovetor da matriz de correlação) e as linhas contínuas as funções calibradas

A partir dos dados, o processo de otimização para obtenção dos parâmetros das funções de volatilidade, conforme expresso em (15), fornece os valores exibidos na tabela a seguir.

**Tabela 4**  
Parâmetros calibrados para a função de volatilidade de cada fator

	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\alpha$	-2,212	0,379	0,498
$\beta$	-0,594	0,598	2,228
$\gamma$	-1,482	-0,083	-0,609
$\delta$	2,228	-1,105	-1,269

Para cada um dos fatores, a função de volatilidade calibrada apresenta a forma esperada, sendo o parâmetro  $\gamma_j < 0$  para cada  $j$  garantido que a volatilidade de longo prazo seja constante e, especialmente, não se degenera quando  $T \rightarrow \infty$ .

Dentro das instituições financeiras, o fórum para se definir o cenário de estresse tende a ser o Comitê de Risco<sup>6</sup> da instituição. No que diz respeito a definição dos cenários para a ETTJ, via de regra, existe, baseado em valores históricos ou projeções macroeconómicas, a habilidade para se definir a variação potencial que um conjunto de vértices da ETTJ pode sofrer. Porém, a grande questão é como determinar os demais pontos da curva. Assim, tendo como *input* o cenário de estresse para alguns pontos, a metodologia ora proposta pode ser vista como um critério de interpolação livre de arbitragem. Logo, uma vez obtida a previsão dos especialistas para os pares  $\{(T_1, \text{choque}_1), (T_2, \text{choque}_2)\}$  e  $\{(T_3, \text{choque}_3)\}$ , a metodologia descrita na seção 3 permite construir os demais pontos da curva. Na sequência mostramos alguns exemplos. Os três primeiros exemplificam os principais movimentos da ETTJ estressados, isto é, variação extrema no nível, na inclinação e na curvatura. Para a construção de tais cenários são utilizadas como previsões as medianas dos cenários da Pesquisa de Estresse da Câmara Consultiva de Risco da BM&FBOVESPA.<sup>7</sup> Embora existam diferentes métodos para fazer previsões da ETTJ disponíveis na literatura, ver por exemplo Diebold & Li (2006), opta-se por utilizar os valores da Pesquisa de Estresse para salientar a característica, da metodologia aqui proposta, de permitir ao especialista de risco incluir a sua informação independentemente se a fonte é uma estimativa estatística ou uma decisão do gestor de risco. Na tabela 5 é mostrado o resultado da Pesquisa de abril de 2009.

<sup>6</sup>O Comitê de Risco, via de regra, é formado pelo diretor de risco da instituição e outros diretores sêniores, uma vez que estes cenários tendem a balizar todos os negócios da instituição

<sup>7</sup>Diferentes instituições financeiras, que atuam no mercado brasileiro, integram a Câmara Consultiva de Risco da BM&FBOVESPA e mensalmente informam os seus cenários de estresse para diversos ativos, em particular para a taxa de juros prefixada.

**Tabela 5**

Cenários, para dois dias, obtidos da Pesquisa de Estresse da Câmara Consultiva de Risco da BM&FBOVESPA em abril de 2009. Os valores representam as medianas dos cenários definidos pelos participantes. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base

Vértice	Estresse positivo	Estresse negativo
21	100	-100
42	125	-111
63	150	-124
126	220	-140
252	229	-150
504	250	-170
756	250	-190
1008	260	-220
1260	295	-210

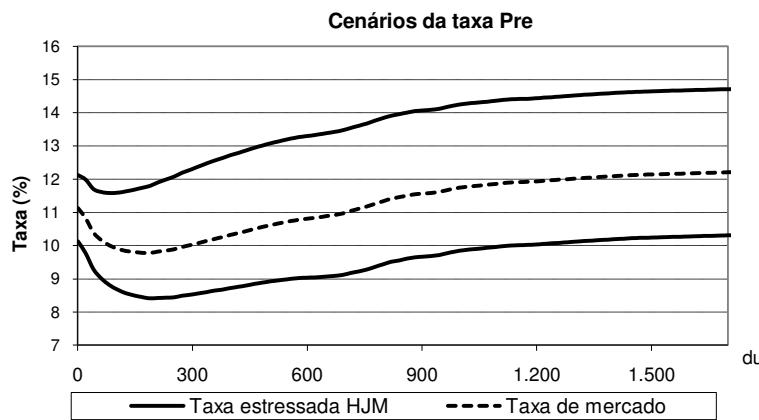
Os cenários de choque paralelo tendem a ser os mais simples de se construir por sua facilidade de interpretação, assim assuma os choques dados na tabela 6, definidos de forma aderente à Pesquisa de Estresse.

**Tabela 6**

Estresse estabelecido para construir cenários de nível. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base

Vértice	Estresse positivo	Estresse negativo
1	100	-100
399	240	-160
$\geq 756$	250	-190

A ETTJ contínua, construída a partir dos cenários definidos na tabela 6, é mostrada na figura 2.

**Figura 2**

Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 6

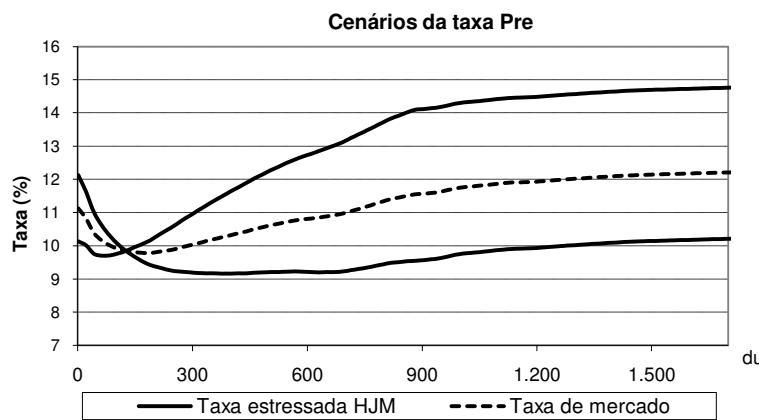
O segundo cenário de estresse frequentemente construído visa replicar os movimentos de mudança da inclinação da ETTJ. Desta forma, assume-se que o(s) especialista(s) sugere(m) os cenários de inclinação conforme a Pesquisa de Estresse nos vértices curto e longo e determina(m) a maturidade na qual a curva de mercado e o cenário coincidam como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 7**

Estresse estabelecido para construir cenários de inclinação. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base

Vértice	Estresse positivo	Estresse negativo
1	-100	100
126	0	0
$\geq 882$	255	-200

A ETTJ para um cenário de estresse ao supor um movimento de mudança na inclinação da curva, conforme a tabela 7, é dada na figura 3.

**Figura 3**

Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 7

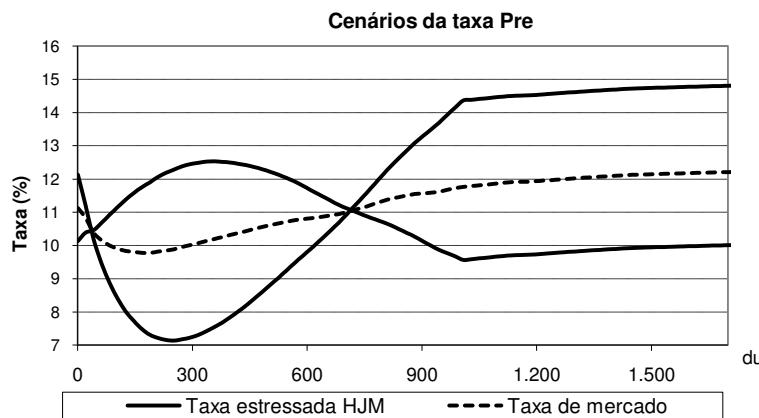
No terceiro exemplo mostra-se a construção dos cenários de estresse para contemplar uma mudança na curvatura da ETTJ. Novamente, os valores foram definidos conforme a Pesquisa de Estresse nos vértices curto e no longo e, o valor médio de tais cenários, com sinal invertido, para o vértice intermediário.

**Tabela 8**

Estresse estabelecido para construir cenários de curvatura. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base

Vértice	Estresse positivo	Estresse negativo
1	100	-100
504	-180	160
$\geq 1008$	260	-220

Os valores de estresse dados na tabela anterior definem os cenários dados na figura 4 para a ETTJ.

**Figura 4**

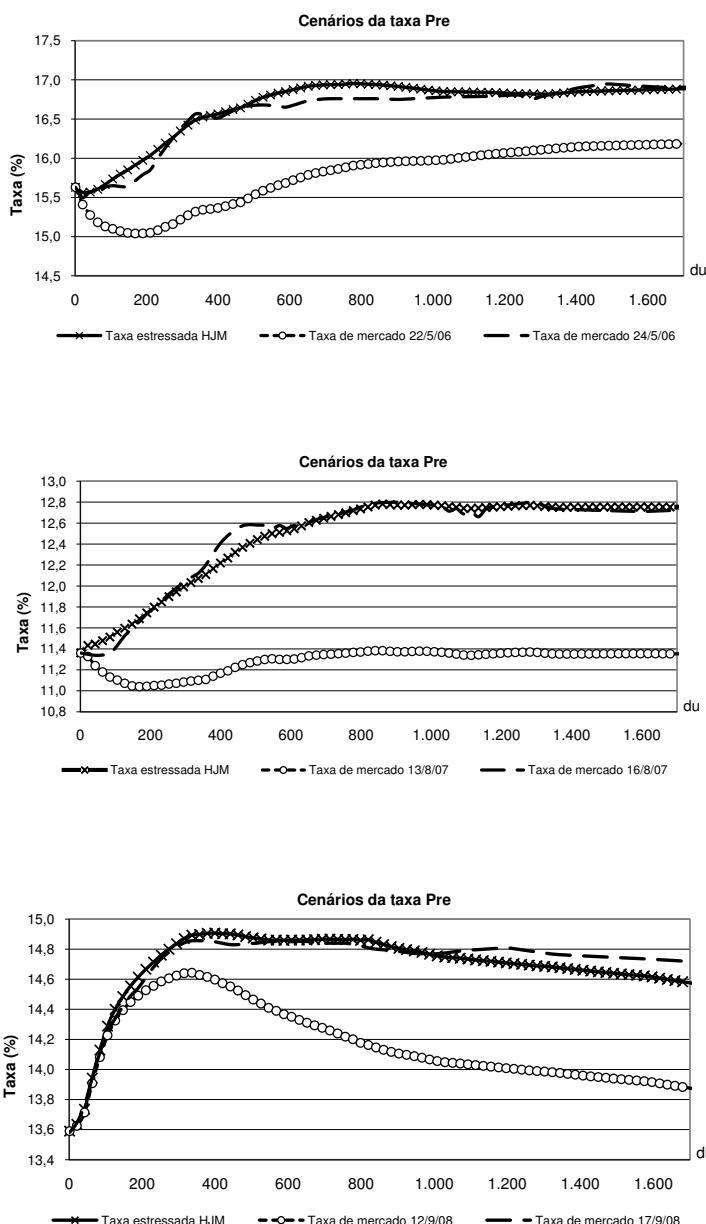
Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 8

Os próximos exemplos mostram como o modelo consegue replicar cenários de estresse observados. Para os exemplos a seguir foram escolhidas datas que apresentam uma variação na curva maior a dois desvios padrão nos retornos de PU de 1 ano para um *Holding Period* (HP) determinado. As datas analisadas e os cenários definidos são apresentados na tabela 9

**Tabela 9**

Cenários, expressos em pontos base, definidos para a construção da ETTJ estressada

Data	Vencimento	Estresse	<i>Holding period</i>
22/5/2006	1 Jan/2008 ( $\approx 400$ du)	0 120	2 dias
	Jan/2010 ( $\approx 910$ du)	70	
13/8/2007	1 Jan/2009 ( $\approx 350$ du)	0 100	3 dias
	Jan/2011 ( $\approx 860$ du)	140	
17/9/2008	1 Jan/2010 ( $\approx 330$ du)	0 25	3 dias
	Jan/2012 ( $\approx 840$ du)	70	



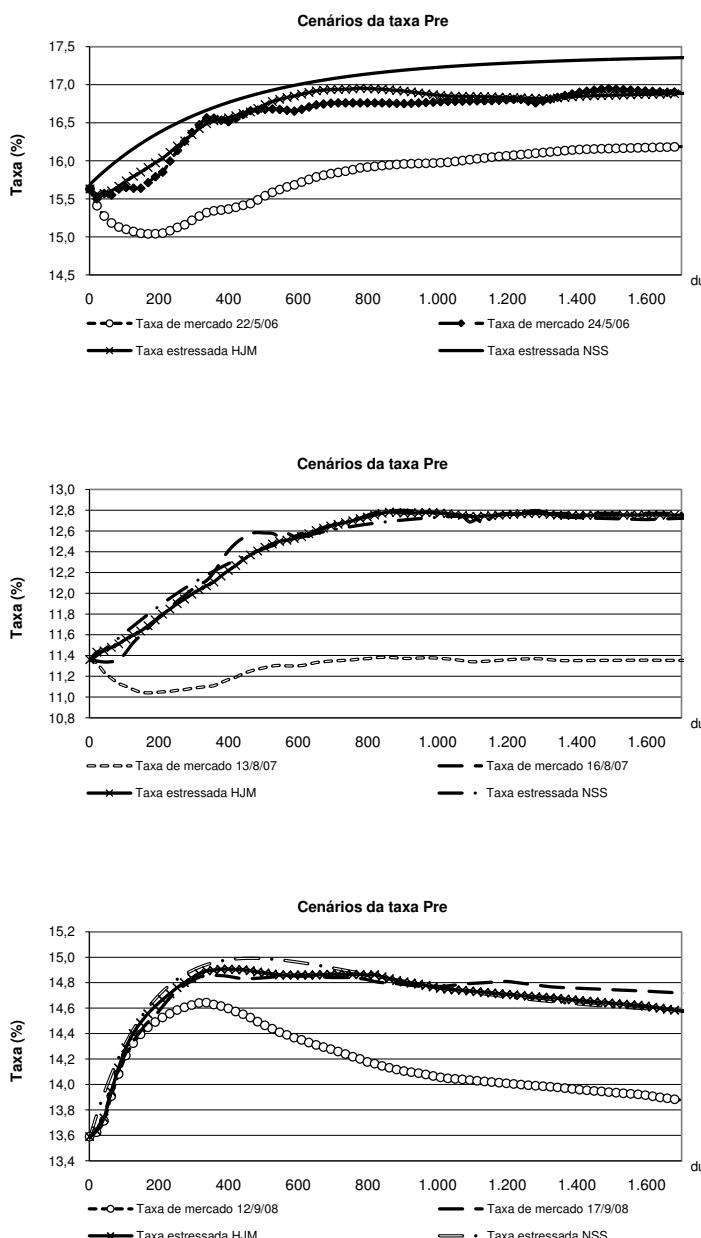
**Figura 5**  
Comparação dos cenários gerados com os observados

Na figura 5 pode-se observar que os cenários construídos são bem próximos da curva de mercado, a despeito dos vértices mais longos, mostrando assim que o método é uma ferramenta eficaz para construção de cenários. A divergência entre o valor do modelo e o verificado para os vértices mais longos, pode ser explicada, por exemplo, pela combinação de baixa liquidez e elevada incerteza no mercado, comprometendo, provavelmente, a relação de não-arbitragem implícita no modelo ora proposto.

Uma vez estudada a flexibilidade do método aqui proposto para incluir as previsões do especialista em risco e a qualidade da previsão passa-se a comparar os resultados com um modelo paramétrico de interpolação da taxa de juros. Em particular foi escolhido o método de Nelson-Siegel-Svensson por ser amplamente usado na literatura e nas instituições financeiras. Foi utilizado o método paramétrico de Nelson-Siegel-Svensson, Svensson (1994), dado pela equação

$$\begin{aligned}
 r_t(T) = & \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)}{\frac{T}{\tau_1}} \right) \\
 & + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)}{\frac{T}{\tau_1}} - \exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right) \right) \\
 & + \beta_3 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-T}{\tau_2}\right)}{\frac{T}{\tau_2}} - \exp\left(\frac{-T}{\tau_2}\right) \right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Os parâmetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  foram calibrados pelo método dos mínimos quadrados, tendo, adicionalmente, definido como expectativas de cenários os valores dados na tabela 9. A figura a seguir e a tabela 10 mostram os resultados obtidos.



**Figura 6**  
Comparação da previsão da taxa de juros pelo modelo aqui proposto (HJM) e pelo modelo de Nelson-Siegel-Svensson (NSS)

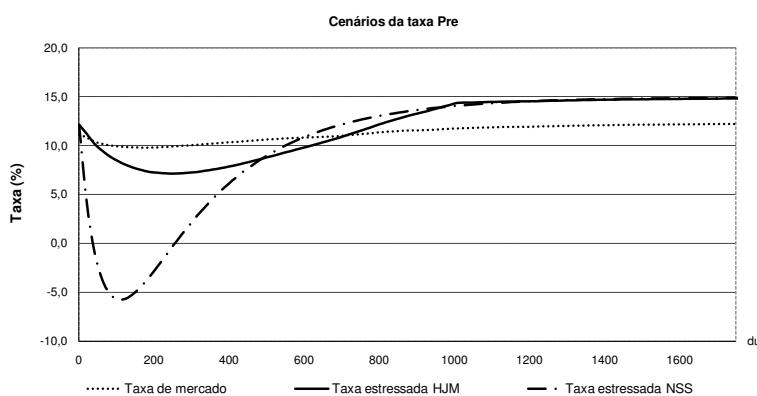
**Tabela 10**  
Erro quadrático médio entre o cenário gerado e o observado

Data	HJM	NSS
22/5/2006	0,01033	0,16658
13/8/2007	0,00421	0,00646
12/9/2008	0,00853	0,01270

Na figura 6 pode-se observar que tanto o método de previsão aqui proposto (denotado na figura por HJM) quanto o método de Nelson-Siegel-Svensson (denotado na figura por NSS) fazem um bom ajuste para os vértices longos da taxa de juros, porém no curto prazo a previsão pelo HJM mostra-se superior. Na tabela 10 o erro quadrático médio mostra que nas três datas o HJM gerou um cenário mais próximo ao observado.

Como um fator crítico na escolha entre modelos para a geração de cenários, pode-se destacar a necessidade de que as taxas de juros nominais sejam sempre positivas. Utilizando os dados da tabela 8, onde se deseja construir um cenário com curvatura positiva, tem-se a figura 7 em que se verifica que o modelo NSS gera taxas negativas até o vértice de 200 dias úteis, por outro lado não se verifica este efeito indesejado no modelo HJM.

Embora na bibliografia há vários estudos que melhoraram a qualidade de previsão do método NSS tanto no aspecto empírico quanto no aspecto teórico, com a inclusão de restrição de não-arbitragem, ver por exemplo Christensen *et al.* (forthcoming) e Koopman *et al.* (2010), o método aqui proposto se apresenta como uma alternativa factível na definição de cenários de estresse pois permite, de forma simples, incorporar a expectativa (subjetiva ou estatística) de variação da ETTJ dos agentes no modelo livre de arbitragem.



**Figura 7**  
Comparação da geração de um cenário de curvatura pelo modelo proposto (HJM) e pelo modelo de Nelson-Siegel-Svensson (NSS)

## 6. Conclusão

O uso do teste de estresse como ferramenta para mensurar o risco de evento, antes restrito a um número reduzido de instituições financeiras, adquiriu novas proporções a partir de 2009 quando se tornou metodologia padrão pelos Bancos Centrais do Brasil e EUA para avaliar a resiliência das instituições financeiras em suportar situações extremas sem comprometer a estabilidade do sistema financeiro.

O objetivo deste artigo é propor, com base no arcabouço introduzido por HJM e que incorpore a opinião de especialistas, um método de construção de cenários de estresse para a ETTJ. A adoção de um arcabouço HJM se justifica por se tratar de um modelo livre de arbitragem e que tem sido cada vez mais utilizado na literatura para o propósito de modelar a dinâmica da taxa de juros em um contexto multifatorial. Neste trabalho foi descrito de forma simples o modelo, focando sempre na sua aplicação e calibração com dados do mercado brasileiro.

Salienta-se que a proposta da forma de utilização do modelo HJM apresentada neste trabalho pode ser interpretada também como um interpolador livre de arbitragem para a estrutura a termo da taxa de juros. Mais especificamente, a proposta é utilizar algumas das muitas ferramentas estatísticas ou análises macroeconómicas para determinar os valores de estresse para poucos vértices reduzindo significativamente a dimensão do problema de construção de cenários de estresse multivariados. Tais vértices podem ser escolhidos pela relevância na carteira que se pretende avaliar ou pela liquidez no mercado.

Portanto, o produto final do presente trabalho, produto que, dentro do conhecimento dos autores, é original, é um método de construção de cenários de estresse que combina a robustez do modelo HJM com as características que o analista de risco precisa ou deseja dar ao cenário da taxa de juros. Salienta-se que o modelo aqui proposto, nos exemplos estudados, mostrou-se superior ao método paramétrico de Nelson-Siegel-Svensson tanto na construção empírica dos cenários quanto no aspecto teórico de ETTJ livre de arbitragem.

Finalmente, entende-se como desenvolvimento futuro deste artigo avaliar a forma de implementar a estimativa dos componentes principais apenas com dados oriundos de períodos de crise, mas que seja capaz de preservar a estrutura de correlação entre a taxa de um determinado vértice em diferentes dias.

## Referências

- Aragonés, José R., Blanco, Carlos, & Dowd, Kevin. 2001. Incorporating Stress Tests Into Market Risk Modeling. *Derivatives Quarterly*, 7, 44–49.
- Avellaneda, Marco, & Laurence, Peter. 2000. *Quantitative Modeling of Derivatives Securities: From Theory to Practice*. Chapman & Hall.
- Banco Central do Brasil. 2009. Teste de Estresse. *Relatório de Estabilidade Financeira*, 8, 95–111.

- Barbedo, Claudio H., Vicente, José V., & Lion, Octávio B. 2010. Pricing Asian Interest Rate Options with a Three-Factor HJM Model. *Revista Brasileira de Finanças*, **8**, 9–23.
- Berkowitz, Jeremy. 1999. A Coherent Framework for Stress-Testing. *Journal of Risk*, **2**, 1–11.
- CGFS – Committee on the Global Financial System. 2001. *A Survey of Stress Tests and Current Practice at Major Financial Institutions*. Basel: Bank for International Settlements.
- CGFS – Committee on the Global Financial System. 2005. *Stress Testing at Major Financial Institutions: Survey Results and Practice*. Basel: Bank for International Settlements.
- Christensen, Jens E., Diebold, Francis X., & Rudebusch, Glenn D. forthcoming. The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models. *Journal of Econometrics*.
- Cox, John C., Ingersoll, Jonathan E., & Ross, Stephen A. 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**, 385–407.
- Dario, Alan de Genaro. 2004. Utilização Da Teoria Dos Valores Extremos Para O Estabelecimento de Cenários de Estresse: O Caso Da BM&F. *Resenha BM&F*, **161**, 16–25.
- Diebold, Francis X., & Li, Canlin. 2006. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, **130**, 337–364.
- James, Jessica, & Webber, Nick. 2000. *Interest Rate Modelling*. Wiley.
- Jamshidian, Farshid, & Zhu, Yu. 1997. Scenario Simulation: Theory and Methodology. *Finance and Stochastics*, **1**, 43–67.
- Kahalé, Nabil. 2004. An Arbitrage-Free Interpolation of Volatilities. *Risk Magazine*, **17**, 102–106.
- Koenker, Roger, & Xiao, Zhiqie. 2002. Inference on the Quantile Regression Process. *Econometrica*, **70**, 1583–1612.
- Koenker, Roger, & Xiao, Zhiqie. 2004. Unit Root Quantile Autoregression Inference. *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 775–787.
- Koenker, Roger, & Xiao, Zhiqie. 2006. Quantile Autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **101**, 980–990.

- Koopman, Siem J., Mallee, Max P., & Wel, Michel Van der. 2010. Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dynamic Nelson-Siegel Model With Time-Varying Parameters. *Journal of Business and Economic Statistics*, **28**, 329–343.
- Kupiec, Paul H. 1998. Stress Testing in a Value at Risk Framework. *Journal of Derivatives*, **6**, 7–24.
- Litterman, Robert, & Scheinkman, José. 1991. Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, **1**, 54–61.
- Nelson, Charles R., & Siegel, Andrew F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, **60**, 473–489.
- Renò, Roberto, & Uboldi, Adamo. 2002. *PCA Based Calibration of an HJM Model*. Quaderno IAC.
- Rezende, Rafael B. 2008. *Dois Ensaios Em Econometria Financeira: Modelagem, Previsão e Stress Da Estrutura a Termo Das Taxas de Juros*. CEDEPLAR – UFMG, Belo Horizonte (BH).
- Svensson, Lars O. 1994. *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*. Cambridge, Mass: NBER, 49 p. (Working paper, n. 4871).
- Vasicek, Oldrich. 1977. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 177–188.
- Vieira-Neto, Cícero A., & Urban, Fábio. 2003. Um Modelo de Teste de Estresse Menos Subjetivo e Mais Abrangente. In: Varga, G. (Org.), & Duarte Jr., A. M. (eds), *Gestão de Riscos No Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FCE.