Revista Brasileira de Finanças
ISSN: 1679-0731
rbfin@fgv.br
Sociedade Brasileira de Finanças
Brasil

Monteiro de Moraes, Alex Sandro; Figueiredo Pinto, Antonio Carlos; Cabus Klotzle, Marcelo
Estimativas de Longo Prazo para Volatilidade de Séries Temporais no Mercado Financeiro Brasileiro
Revista Brasileira de Finanças, vol. 11, núm. 4, diciembre-, 2013, pp. 455-479
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Estimativas de Longo Prazo para Volatilidade de Séries Temporais no Mercado Financeiro Brasileiro

(Long Run Estimations for the Volatility of Time Series in the Brazilian Financial Market)

Alex Sandro Monteiro de Moraes*
Antonio Carlos Figueiredo Pinto**
Marcelo Cabus Klotzle***

Resumo

Os modelos da família GARCH, normalmente utilizados para as estimativas de volatilidade para prazos mais longos, mantém inalterados os pesos relativos atribuídos às observações antigas e recentes, independente do horizonte de previsão da volatilidade. O objetivo deste artigo é verificar se o aumento dos pesos relativos atribuídos às observações mais antigas em função do aumento do horizonte de previsão resulta em melhores estimativas de volatilidade. Por meio da utilização de sete modelos de previsão de volatilidade e séries de retornos de ativos do mercado financeiro brasileiro compararam-se as estimativas obtidas na amostra (*in-sample*)com as observações fora da amostra (*out-of-sample*). Com base nesta comparação, constatou-se que as melhores estimativas de previsão de volatilidade foram obtidas pelo modelo modificado EGARCH e o modelo ARLS. Conclui-se que a utilização de modelos de previsão de volatilidade tradicionais, os quais mantêm inalterados os pesos relativos atribuídos às observações antigas e recentes, mostrou-se inapropriada.

***Palavras-chave*:** volatilidade integrada; volatilidade de longo prazo; modelos GARCH.

Códigos JEL: G10; G17.

Submetido em 17 de abril de 2013. Reformulado em 5 de setembro de 2013. Aceito em 9 de outubro de 2013. Publicado on-line em 17 de março de 2014. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: `alex1.moraes@gmail.com`

**Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: `figueiredo@iag.puc-rio.br`

***Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: `klotzle@iag.puc-rio.br`

Abstract

The models of the GARCH family, normally used for the estimates of volatility for longer periods, keep unchanged the relative weights assigned to the observations both old and new, regardless of the volatility´s forecasted horizon. The purpose of this article is to verify if the increase in relative weights assigned to the earlier observations due to the increase of the forecast horizon results in better estimates of volatility. Through the use of seven forecasting models of volatility and return series of financial markets assets, the estimates obtained in the sample (in-sample) were compared with observations outside the sample (out-of-sample). Based on this comparison, it was found that the best estimates of expected volatility were obtained by the modified EGARCH model and the ARLS model. We conclude that the use of traditional forecasting models of volatility, which keeps unchanged relative weights assigned to both old and new observations, was inappropriate.

***Keywords*:** integrated volatility; long-term volatility; GARCH models.

1. Introdução

Medidas de Valor em Risco (VaR) para longo prazo bem como modelos de apreçamento de opções demandam estimativas de volatilidade para horizontes de tempo que superam a frequência das observações dos dados.

Este artigo discute os problemas que surgem quando os modelos de séries temporais do tipo GARCH, tais como GARCH, EGARCH e threshold GARCH (TGARCH), propostos por Bollerslev (1986) e Taylor (1986), Nelson (1991) e Zakoian (1994), respectivamente, estimados com dados diários ou de alta frequência são usados para prever volatilidade para horizontes com prazos mais longos, comuns aos modelos de apreçamento de opções e às medidas de longo prazo de Valores em Risco (VaR).

Enquanto os modelos tipo GARCH geram previsões de volatilidade para o próximo período ou observação (normalmente para o dia seguinte), os modelos de apreçamento de opções e as medidas de VaR geralmente demandam previsões de volatilidade para prazos mais longos, os quais podem ser semanais, mensais ou mesmo anuais.

Essas previsões de volatilidade, tipicamente, são obtidas por sucessivas substituições futuras, de forma que a previsão de volatilidade para o período $t + 1$ é usada juntamente com o modelo de previsão para prever a volatilidade do período $t + 2$, esta previsão do período $t + 2$ é usada para prever a volatilidade do período $t + 3$, e assim sucessivamente. Essas volatilidades são então combinadas para obter a previsão da "volatilidade integrada" para o intervalo compreendido entre o período $t + 1$ e o período $t+N$. Muitos modelos de previsão de volatilidade encontrados na literatura de econometria estão focados em prever a volatilidade em $t+1$. Tal fato é observado por Christoffersen & Diebold (2000), os quais asseveram que "muito pouco ainda é conhecido acerca da previsibilidade da volatilidade para períodos de longo prazo".

Ederington & Guan (2010) esclarecem que o problema dos modelos de previsão de volatilidade de séries temporais para horizontes de tempo maiores que um período é que a previsão de volatilidade para o dia (ou período) $t+1$ é usada para pever a volatilidade para qualquer data futura $t+k$. A importância relativa da volatilidade observada hoje (t) comparada à volatilidade do dia anterior ($t-1$) ou da semana anterior ($t-5$) é forçada a ser a mesma independente de a previsão de volatilidade ser realizada para amanhã, para a próxima semana, ou para o próximo mês.

Uma maneira de evitar esse problema seria adequar a frequência dos dados ao horizonte de previsão. Por exemplo, se o objetivo for prever a volatilidade para o próximo mês, utilizar-se-ia dados mensais para estimar o modelo GARCH e, então, prever a volatilidade para o mês $t+1$.

Todavia, se o horizonte de previsão for longo, o número de observações é significativamente reduzido e, conforme sugerido por Figlewski (1997), a convergência geralmente requer a existência de séries temporais longas.

Ademais, Andersen & Bollerslev (1997) apontam que, ao utilizar-se substituições sucessivas, previsões de volatilidade mais precisas são obtidas com dados de mais alta frequência.

Este trabalho evidencia para dados do mercado financeiro brasileiro, da mesma forma que Ederington & Guan (2010) fizeram para o mercado financeiro norte-americano, que para os modelos GARCH, EGARCH e TGARCH os parâmetros que melhor estimam a volatilidade para o dia seguinte não são os melhores para estimar a volatilidade para períodos de tempo mais longos. Na verdade, observações mais antigas são relativamente mais importantes em prever volatilidades de mais longo prazo.

Um modelo em que a importância relativa entre observações recentes e antigas varia em função do horizonte de previsão é o modelo dos Mínimos Quadrados Restritos Absolutos (ARLS) proposto por Ederington & Guan (2005). Neste modelo a importância relativa das observações mais antigas aumenta em função do horizonte de previsão.

Neste artigo comparou-se a capacidade de previsão fora da amostra (*out-of-sample*) dos modelos GARCH, EGARCH, TGARCH, modificações de cada um desses três modelos baseadas em regressão – na qual o valor do parâmetro GARCH varia com o horizonte de previsão –, e o modelo ARLS.

Dentre esses sete modelos, o modelo ARLS e o modelo EGARCH modificado obtiveram os melhores resultados em suas previsões de volatilidade para diversos mercados, considerando-se diferentes horizontesde tempo. Na maioria dos casos observados esses modelos apresentaram os menores valores para a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (RMSE), bem como para a média dos erros absolutos (MAE).

Os dados utilizados foram os retornos diários do IBOVESPA, Petrobrás, Vale, taxa de câmbio Real/Dólar,taxas de juros de um ano e taxas de juros de três anos para o mercado brasileirode agosto/1994 a junho/2012. As previsões de volatilidade foram examinadas para os horizontes temporais de 10, 20, 40 e 80 dias úteis.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a próxima Seção discute o fato de como a relação entre os pesos atrelados às observações recentes e antigas, na previsão de volatilidade, depende do horizonte de previsão nos modelos GARCH, TGARCH e EGARCH. Na Seção 3, são apresentados os dados, bem como a metodologia utilizada para a estimação dos parâmetros dos modelos. Além disso, foram apresentadas duas medidas de precisão de modelos de previsão para observações fora da amostra (*out-of-sample*). Na Seção 4, os resultados são evidenciados e analisados. A Seção 5 conclui o artigo.

2. O Horizonte de Previsão e a Importância Relativa das Observações Passadas nos Modelos da família GARCH

2.1 Estimativas de volatilidade para horizontes de tempo maiores que um período

Apesar de haver na literatura alguns modelos que não exigem estimativas de volatilidade para prazos mais longos como, por exemplo, o modelo CAViaR proposto por Engle & Manganelli (2004), em que os autores modelam diretamente a dinâmica temporal de um determinado quantilda distribuição condicional; Figlewski (1997) e Christoffersen & Diebold (2000) apontam que muitas das aplicações para as previsões de volatilidade, tais como apreçamento de opções e modelos de VaR de longo prazo demandam estimativas de volatilidade para um horizonte de tempo maior que a frequência de observação dos dados utilizados para a estimação do modelo. Geralmente, modelos de séries temporais e dados de retornos diários são usados para prever a volatilidade para o dia $t+1$, todavia para o apreçamento de opções, por exemplo, exige-se uma estimativa de volatilidade em conformidade com o prazo de vencimento dessas opções, o que pode ocorrer meses à frente.

Às vezes, assume-se simplesmente que a volatilidade do dia $t + 1$ permanecerá constante até o vencimento da opção. Isso ignora a tendência de reversão à média da volatilidade e, como mostram Christoffersen *et al.* (1998), resulta em sérios erros de estimativa.

Normalmente, a previsão de volatilidade para períodos mais longos é realizada por meio de um procedimento recursivo no qual a volatilidade para o dia $t + 1$ é usada juntamente com os parâmetros do modelo para prever a volatilidade para o dia $t + 2$, a previsão do dia $t + 2$ é usada para prever a volatilidade para o dia $t + 3$ e assim por diante. Essas previsões diárias são combinadas para se obter a volatilidade do período $t + 1$ a $t + N$, uma medida chamada de "volatilidade integrada" por Andersen *et al.* (2006).

Como ilustração, considere o modelo:

$$v_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \beta v_t \tag{1}$$

onde r_t é o choque do retorno logarítmico ($r_t = R_t - E_{t-1}(R_t)$, onde $R_t = ln(P_t/P_{t-1})$ e P_t é o preço do ativo no tempo t) e vt é a variância de r_t. No que tange ao vetor de parâmetros $\theta(\alpha 0, \alpha 1, \beta)$, define-se $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0$.

Como $E_t(r_{t+1}^2) = v_{t+1}$, onde $E_t(.)$ é o valor esperado no tempo t, sucessivas substituições resultam na expressão da variância esperada no tempo $t + k$ baseada na previsão para $t + 1$:

$$\begin{aligned} E_t(v_{t+k}) &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-2} (\alpha_1 + \beta)^j + (\alpha_1 + \beta)^{k-1} v_{t+1} \qquad (2) \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_1 + \beta)^j + (\alpha_1 + \beta)^{k-1} [\alpha_1 r_t^2 + \beta v_t] \end{aligned}$$

Nota-se que v_{t+1} e v_{t+k} são estimativas pontuais da volatilidade, entretanto para o apreçamento de opções e mensuração do VaR de longo prazo é preciso usar um intervalo de tempo superior a um dia. Assim, para se gerar essas previsões, Ederington & Guan (2010) assumem que normalmente os choques dos retornos são independentes. Desse modo, a previsão de variância integrada para o intervalo será obtida pela média das previsões diárias de variância.

Assim, somando-se os valores da equação (2) para $k = 1$ até s e dividindo-se o resultado por s, obtém-se a previsão da volatilidade integrada V_{t+s}:

$$E_t(V_{t+s}) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} v_{t+k} = \alpha_s + \frac{1}{s}[\alpha_1 r_t^2 + \beta v_t]\sum_{k=1}^{s}(\alpha_1+\beta)^{k-1} \tag{3}$$

onde $\alpha_s = \frac{\alpha_0 s}{\sum}{}^{s}_{k=1} \sum_{j=0}^{k-1}(\alpha_1+\beta)^j$

2.2 A Importância Relativa das Observações Passadas nos Modelos da Família GARCH

Modelo GARCH

De acordo com Ederington & Guan (2010), a importância relativa entre as observações recentes e antigas, na previsão da volatilidade, depende do horizonte de previsão.

Supõe-se, por exemplo, que, em uma quarta-feira, deseje-se realizar uma previsão de volatilidade para o dia seguinte (quinta-feira), para a semana seguinte e para o mês seguinte. De acordo com a persistência de volatilidade, a volatilidade da quarta-feira seria muito mais importante na previsão da volatilidade do dia seguinte do que a volatilidade de terça-feira, por exemplo. Mas será que a volatilidade de quarta-feira é tão mais importante que a volatilidade do dia anterior (terça-feira) para se fazer previsões de volatilidade para daqui a uma semana ou daqui a um mês?

O procedimento de utilização de sucessivas substituições para a previsão de volatilidade preserva a importância relativa das observações recentes e antigas independentemente do horizonte de previsão. Entretanto, conforme já mencionado, Ederington & Guan (2010) sustentam a hipótese de que a importância relativa entre as observações recentes e antigas deve ser alterada à medida que o horizonte de previsão se amplia.

Considere-se a importância relativa das observações passadas no modelo GARCH. Como $v_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta v_{t-1}$, e $v_{t+1} = (\alpha_0 + \beta\alpha_0) + \alpha_1 r_t^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta^2 v_{t-1}$, sucessivas substituições retroativas no tempo produzem a equação (4), uma forma alternativa de representaro modelo GARCH já mostrado na equação (1):

$$v_{t+1} = \alpha_0^{'} + \alpha_1 \sum_{j=0}^{J} \beta^j r_{t-j}^2 \tag{4}$$

onde $\alpha_0' = \alpha_0 \sum_{j=0}^{J} \beta^j + \beta_{v_{t-J}}^{J+1}$.

No que tange ao vetor de parâmetros θ $(\alpha_0\alpha_1, \beta)$, define-se $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0$.

Ao substituir a equação (4) na equação (2), obtem-se:

$$E_t(v_{t+k}) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{k-2} (\alpha_1 + \beta)^j + (\alpha_1 + \beta)^{k-1} \alpha_0' + (\alpha_1 + \beta)^{k-1} \alpha_1 \sum_{j=0}^{J} \beta^j r_{t-j}^2 \tag{5}$$

A equação (5) deixa claro que, enquanto os pesos absolutos, termos $(\alpha_1 + \beta)$, declinam proporcionalmente ao horizonte k, assumindo-se que $\alpha_1 + \beta < 1$, os pesos relativos dos quadrados dos choques dos retornos passados decaem por uma mesma taxa exponencial independente de a previsão de volatilidade ser realizada para amanhã ou para um futuro mais distante. Como $\partial v_{t+k}/\partial r_{t-j}^2 = \alpha_1(\alpha_1 + \beta)^{k-1}\beta^j$, a razão das derivadas parciais de duas observações separadas por m períodos é:

$$\frac{\partial E_t(v_{t+k})/\partial r_{t-j-m}^2}{\partial E_t(v_{t+k})/\partial r_{t-j}^2} = \beta^m \tag{6}$$

Assim, nas previsões do modelo GARCH, a razão dos pesos relativos associados a observações passadas defasadas em m dias (ou períodos) é de β^m, independente do horizonte de previsão, k, e do quão distante no tempo é o termo j.

Relaciona-se a esse assunto a crítica de que os modelos GARCH apresentam memória curta. Engle & Bollerslev (1986), Ding & Granger (1996), Baillie *et al.* (1996), Bollerslev & Mikkelsen (1996) evidenciam que o impacto do choque dos retornos decai rapidamente ao longo do tempo. O impacto do quadrado do choque dos retornos, r_{t-j}^2, na previsão de volatilidade n dias no futuro é:

$$\frac{\partial E_t(v_{t+k+n})/\partial r_{t-j}^2}{\partial E_t(v_{t+k})/\partial r_{t-j}^2} = (alpha_1 + \beta)^n \tag{7}$$

Assim, o impacto do choque na volatilidade em $t + k$ decai exponencialmente a uma taxa $\alpha_1 + \beta$, apesar de haver evidências de que o efeito do impacto tem uma duração maior, segundo Ding *et al.* (1993), Ding & Granger (1996), Andersen & Bollerslev (1997). Nota-se que os pesos na equação (6) decaem mais rapidamente que na equação (7).

Por exemplo, para as observações diárias dos retornos das ações da VALE no período de 1 de agosto de 1994 até 15 de junho de 2012, os parâmetros 1 e β do modelo GARCH foram de 0,133 e 0,840, respectivamente. Assim, $(\alpha_1 + \beta)^{10} = 0,7606$, enquanto que $\beta^{10} = 0,1749$, então r_{t-10^2} (uma observação de 10 dias atrás) recebe um peso que equivale a 17,49% daquele associado ao r_t^2 na previsão de qualquer volatilidade futura.

Segundo Ederington & Guan (2010), existem vários modelos de memória longa utilizadosna previsão de volatilidade que estabelecem um fator de decaimento menor que o proporcionado pelo modelo GARCH, todavia, em todos esses modelos, que lançam mão de funções lineares da volatilidade em $t + 1$ para prever volatilidades futuras, o peso relativo dado às observações recentes e futuras são os mesmos independentemente do horizonte de previsão.

Essa relação permanece a mesma nos casos de volatilidade integrada. Somando os valores obtidos na equação (5) para $k = 1$ até s, onde $s \geq 2$, e dividindo-se o resultado por s, obtém-se a previsão de volatilidade integrada para o período compreendido entre $t + 1$ e $t + s$, V_{t+s}:

$$E_t(V_{t+s}) = (1/s) \sum_{k=1}^{s} v_{t+k} = \alpha_s + \gamma_s \sum_{j=0}^{J} \beta^j r_{t-j}^2 \tag{8}$$

onde,

$$\alpha_s = (1/s) \sum_{k=1}^{s} \left[\alpha_0 \sum_{j=0}^{k-2} (\alpha_1 + \beta)^j + (\alpha_1 + \beta)^{k-1} \alpha_0^{'} \right] \tag{9}$$

e

$$\gamma_s = (\alpha_1/s) \sum_{k=1}^{s} (\alpha_1 + \beta)^{k-1}$$

Nota-se por meio da equação (8) que o impacto relativo de r_{t-j}^2 e r_{t-j-m}^2 na volatilidade integrada de t a $t + s$ é a mesma razão m, para qualquer valor de s, como pode ser observado a seguir:

$$\frac{\partial E_t(V_{t+s}) / \partial r_{t-j-m}^2}{\partial E_t(V_{t+s}) / \partial r_{t-j}^2} = \beta^m \tag{10}$$

Ainda de acordo com os autores, os parâmetros GARCH, obtidos por máxima verossimilhança, para gerar a volatilidade para o período $t + 1$ não são os mesmos para estimar a volatilidade para o período $t + k$, quando k é maior que 1.

Entretanto, Marcellino *et al.* (2006) comparam modelos recursivos e modelos "direct forecast", nos quais os parâmetros são estimados em função do horizonte de previsão, e, após analisarem 170 séries temporais de dados macroeconômicos mensais norte-americanos, apontam que a abordagem recursiva seria mais eficiente se o modelo fosse corretamente especificado. Todavia, esses mesmos autores ressaltam que os modelos "direct forecast" apresentariam resultados mais robustos frente a potenciais erros de especificação no modelo.

Por outro lado Ederington & Guan (2010) esclarecem que melhores estimativas de longo prazo seriam obtidas se a equação (8) fosse alterada de modo a permitir que o parâmetro β varie em função do horizonte de previsão s:

$$E_t(V_{t+s}) = (1/s)\sum_{k=1}^{s} v_{t+k} = \alpha_s + \gamma_s \sum_{j=0}^{J} \beta_s^j r_{t-j}^2 \tag{11}$$

Ademais,esses mesmos autores suportam a ideia de que quanto maior o horizonte de previsão, maior deverá ser o termo β_s para que melhores estimativas de volatilidade sejam obtidas.

Modelo TGARCH

O modelo TGARCH acrescenta ao modelo GARCH da equação (1) um termo que captura a assimetria da volatilidade: $\alpha_2 D_t r_t^2$, onde $D_t = 1$ ser $t < 0$, e $D_t = 0$ se $r_t \geq 0$:

$$v_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \alpha_2 D_t r_t^2 + \beta v_t \tag{12}$$

Após sucessivas substituições, e utilizando-se $V_t = E_{t-1}(rt)^2$, chega-se a seguinte expressão para a volatilidade no tempo $t + k$:

$$E_t(v_{t+k}) = \alpha_k + \alpha_1 \delta_k \sum_{j=0}^{J} \beta^j r_{t-j}^2 + \alpha_2 \delta_k \sum_{j=0}^{J} \beta^j D_{t-j} r_{t-j}^2 \tag{13}$$

onde $\alpha_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \beta^j \alpha_0$, $\delta_K = \prod^{k-2} j = 0 \varsigma_t = \alpha_1 + \alpha_2 D_t + \beta$.

Ederington & Guan (2010) evidenciam que, se os choques nos tempos $t-j-m$ e $t-j$ apresentarem o mesmo sinal, os pesos relativos das previsões da volatilidade futura ocorrerão na razão mpara qualquer horizonte de previsão k, do mesmo modo como ocorreu com o modelo GARCH discutido na Seção anterior.

Da equação (13) pode-se chegar a seguinte equação para a volatilidade integrada:

$$E_t(V_{t+s}) = (1/s)\sum_{k=1}^{s} v_{t+k} = \alpha_s + \gamma_{1s} + \gamma_{2s}\sum_{j=0}^{J}\beta_s^j D_{t-j} r_{j=0}^2 \qquad (14)$$

onde $\gamma_{1s} = (1/s)\sum_{k=1}^{s}\alpha_1\delta_k$ e $\lambda_{2s} = (1/s)\sum_{k=1}^{s}\alpha_2\delta_k$.

Modelo EGARCH

Considere-se agora o modelo EGARCH, o qual é de particular interesse, uma vez que ele tende a apresentar memória mais longa que o modelo GARCH, isto é, o efeito das observações tendem a perdurar por mais tempo. O modelo EGARCH possui a forma:

$$ln(v_(t+1)) = \alpha_0 + \beta ln(v_t) + \gamma_1|r_t/\sigma_t| + \gamma_2(r_t/\sigma_t) \qquad (15)$$

Ederington & Guan (2010) demonstram que a equação para o cálculo do logaritmo da estimativa da volatilidade pontual no tempo $t+k$, após substituições recursivas para frente, passa a ser:

$$ln(v_{t+k}) = [alpha + \gamma_1\sqrt{2/\pi}]\sum_{j=0}^{k-2}\beta^j + \beta^{k-1} ln(v_{t+1}) \qquad (16)$$

Ademais, esses autores argumentam que se os choques de observações defasadas em m períodos apresentarem os mesmos sinais, e as volatilidades condicionais dos períodos dessas observações forem iguais; então haverá resultados análogos aos encontrados para os modelos GARCH e TGARCH, nos quais as derivadas parciais das observações defasadas de m períodos são na razão β^m. De onde se conclui que o impacto relativo dos retornos passados na previsão de volatilidade não depende do horizonte de previsão k.

Para o modelo EGARCH, Ederington & Guan (2010) definem a volatilidade integrada, V_{t+s}, como sendo a média geométrica das volatilidades de $t+1$ até $t+s$. Assim, V_{t+s} passa a ser definida pela seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
ln(V_{t+s}) &= (1/s)\sum_{k=1}^{s}\ln(v_{t+k}) \qquad (17)\\
&= \lambda_{1s} + \lambda_{2s}\sum_{j=0}^{J}\beta^{j}|r_{t-j}/\sigma_{t-j}| + \lambda_{3s}\sum_{j=0}^{J}\beta^{j}(r_{t-j}/\sigma_{t-j})
\end{aligned}
$$

onde, $\lambda_{1s} = (1/S)\sum\limits_{k=1}^{S}\left[\left(\alpha + \gamma_1\sqrt{2/\pi}\right)\sum\limits_{j=0}^{k-2}\beta^{j} + \alpha^{'}\beta^{k-1}\right]$,
$\lambda_{2s} = (\gamma_1/S)\sum\limits_{k=1}^{S}, \gamma_{3s} = (\gamma_2/S)\sum\limits_{k=1}^{S}\beta^{k-1}$ e $\alpha^{'}$ é α a constante da equação
$ln(v_{t+1}) = \alpha^{'} + \gamma_1\sum\limits_{j=0}^{J}\beta^{j}|r_{t-j}/\sigma_{t-j}| + \gamma_2\sum\limits_{j=0}^{J}\beta^{j}(r_{t-j}/\sigma_{t-j})$.

2.3 Modelo ARLS

O modelo dos Mínimos Quadrados Absolutos (ARLS), sugerido por Ederington & Guan (2005), permite que os pesos relativos entre as observações recentes e antigas variem em função do horizonte de previsão. Assim como ocorre para o modelo GARCH, no modelo ARLS os pesos atribuídos às volatilidades passadas decaem exponencialmente e incorporam reversão à média. Entretanto, o modelo considera o desvio-padrão ao invés da variância e é baseado nos valores absolutos dos choques dos retornos e, não, no quadrado desses choques. Segundo os autores, isso ocorre, pois os modelos baseados nos quadrados dos retornos tendem a prever grandes aumentos de volatilidade após retornos extremos, fato que raramente se confirma com as observações realizadas.

A expressão para o modelo ARLS é a seguinte:

$$ASD(s)_t = \alpha_S + \gamma_S\sum_{j=0}^{J}\sqrt{\Pi/2}\beta_S^{j}|r_{t-j}| \qquad (18)$$

onde $ASD(s)t$ é o desvio-padrão dos retornos do período compreendido entre $t+1$ a $t+s$. Essa expressão é estruturalmente idêntica à do modelo GARCH apresentada na equação (11), exceto pelo seguinte:

i) O desvio-padrão substitui a variância no lado esquerdo da equação;

ii) O retorno absoluto $|r_{t-j}|$ substitui r_{t-j}^2 no lado direito da equação;

iii) Os coeficientes β_s, α_s e γ_s podem variar em função do horizonte de previsão, s; e

iv) O termo $\sqrt{\pi/2}$ é adicionado.

3. Metodologia

3.1 Dados

O conjunto de dados utilizados compõe-se dos retornos logarítmicos diários do índice IBOVESPA; das ações da Vale e Petrobrás; das taxas de juros de 1 ano e 3 anos de títulos do governo brasileiro emitidos em reais; e da taxa de câmbio Real/Dólar. As séries começam em agosto de 1994 ou na primeira data de dados disponíveis para o ativo e terminam em junho de 2012. A série das taxas de câmbio Real/Dólar começa em fevereiro de 1999, pois procurou-se excluir o efeito de quebra estrutural produzida pela mudança de regime cambial no Brasil em janeiro de 1999. A fonte dos dados, períodos de tempo e algumas estatísticas descritivas encontram-se relacionados na Tabela 1. Ademais, em conformidade com o estudo realizado por Ederington & Guan (2010) para o mercado norte-americano, considerou-se os horizontes de previsão de 10, 20, 40 e 80 dias úteis.

Tabela 1
Ativos e dados

Ativos e dados				
			Retornos Diários (X 1000)	
Ativos	Período	N° observações	Média	Desv. Padrão
Petrobrás	1/8/94-15/6/12	4421	0,733	28,0719
Vale	1/8/94-15/6/12	4421	0,787	26,7166
Ibovespa	1/8/94-15/6/12	4421	0,588	23,0839
Real/Dólar	1/2/99-15/6/12	3543	0,0001	11,041
Taxa 1 ano	28/3/97-29/6/12	1306	0,03	0,8736
Taxa 3 anos	28/3/97-15/6/12	1300	0,063	3,57

Fonte: Bloomberg.

3.2 Modelos

Modelo GARCH

Para testar se as previsões de volatilidade obtidas por meio do modelo GARCH poderiam ser melhoradas variando-se o termo β_s em função do horizonte de previsão, utilizou-se uma regressão não linear de mínimos quadrados (NLMQ) para se obter os parâmetros β_s, α_s e λ_s da equação

(11). A variável dependente, $AV(s)_t = (1/S)\sum_{i=1}^{S} r_{t+i}^2$, corresponde à variância média observada no período de $t+1$ até $t+s$. Dito de outra forma, $AV(s)_t = (1/S)\sum_{i=1}^{s} r_{t+i}^2$. Desse modo, os parâmetros β_S, α_s e λ_S foram estimados por meio da aplicação dos mínimos quadrados ao seguinte par de equações:

$$AV(s)_t = \alpha_s + \lambda_s Z_t + \epsilon_t \tag{19}$$

onde, $Z_t = \sum_{j=0}^{J} \beta_S^j r_{t-j}^2$.

Para o cálculo de Z_t estipulou-se $J = 200$, pois como $\beta < 1$, β^j é um número muito próximo de zero para valores elevados de J.

Para se calcular os termos Z_t fez-se o β variar (em intervalos de 0,01) de 0,50 até 1, resultando, portanto, em 51 coeficientes diferentes e 51 equações de regressão correspondentes a esses coeficientes. Dentre essas equações, foi escolhida aquela que apresentou a menor soma dos quadrados dos erros. Da equação escolhida extraiu-se os parâmetros β_s, α_s e λ_s.

O procedimento utilizado na regressão não linear de mínimos quadrados (NLMQ) mencionada acima visa a obter os parâmetros que resultemna menor raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (RMSE) das previsões de variância. Desse modo, pode-se verificar se os parâmetros que minimizam a soma dos quadrados dos erros da variância diferem daqueles obtidos por meio do modelo GARCH e se esses parâmetros variam em função do horizonte de previsão.

Modelo TGARCH

Assim como no modelo GARCH, Ederington & Guan (2010) sustentam a hipótese de que os modelos de previsão de volatilidade com a menor raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (RMSE) podem ser obtidos, permitindo-se que o parâmetro β varie em função do horizonte de previsão e que o parâmetro ótimo?s aumenta com o horizonte de previsão. Para testar essa hipótese os autores sugerem o uso do modelo TGARCH modificado com o uso da regressão (NLMQ) para estimar o modelo:

$$AV(s)_t = \alpha_s + \lambda_{1s} Z_{1t} + \lambda_{2s} Z_{2t} + \epsilon_t \tag{20}$$

onde, $Z_{1t} = \sum_{j=0}^{J} \beta_s^j r_{t-j}^2$ e $Z_{2t} = \sum_{j=0}^{J} \beta_s^j D_{t-j} r_{t-j}^2$.

Como no modelo GARCH modificado da equação (19), $AV(s)_t$ representa a variância real observada no período $t+1$ a $t+s$.

Utilizando-se os dados dos mesmos ativos do mercado brasileiro discutidos na Seção 3.1, estimou-se os parâmetros para o modelo TGARCH padrão da equação (12) e os parâmetros sdo modelo TGARCH modificado.

Modelo EGARCH

Da mesma forma que o realizado para os modelos GARCH e TGARCH, verificou-se se as melhores estimativas de volatilidade são obtidas pela variação do termo β_s em função do horizonte de previsão. Para efetuar esse teste lançou-se mão do modelo EGARCH modificado definido pela expressão a seguir:

$$ln(AV(s)_t) = \lambda_{1s} + \lambda_{2s} Z_{2t} + \lambda_{3s} Z_{3t} + \epsilon_t \tag{21}$$

onde, $Z_{2t} = \sum_{j=0}^{J} \beta^j |r_{t-j}/\hat{\sigma}_(t-j)|$ e $Z_{3t} = \sum_{j=0}^{J} \beta^j (r_{t-j}/\hat{\sigma}_{t-j})$.

Para a equação acima, $\hat{\sigma}_{t-j}$ corresponde à estimativa da volatilidade para o dia $t-j$.

Utilizando-se os dados dos mesmos ativos do mercado brasileiro discutidos na Seção 3.1, estimou-se os parâmetros para o modelo EGARCH padrão da equação (15) e os parâmetros sdo modelo EGARCH modificado.

Modelo ARLS

A equação (18) do modelo ARLS, descrita na Seção 2.2.4, foi estimada por meio de regressão linear, na qual a variável dependente, $ASD(s)t$, foi obtida pelo desvio-padrão observado no período compreendido entre $t+1$ a $t+s$. Para se gerar as séries de variáveis independentes, lançou-se mão da função $W(\beta) = \sqrt{\pi/2} \sum_{j=0}^{200} \beta^j |r_{t-j}|$, usando-se valores de β de 0,5 a 1 (em incrementos de 0,01). Desse modo, efetuou-se a regressão de $ASD(s)t$ em $W(\beta)t$, utilizando-se o método dos mínimos quadrados, repetiu-se essa regressão para cada valor de β e escolheu-se os valores de β, α e λ para a regressão que apresentasse a menor soma dos quadrados dos resíduos.

3.3 Precisão das previsões fora da amostra (out-of-sample)

Nesta Seção comparou-se o quão precisos são os modelos de previsão de volatilidade, considerando-se as previsões fora da amostra (*out-of-sample*).

Para os modelos GARCH, TGARCH e EGARCH, estimou-se seus modelos tradicionais definidos por meio das equações (1), (12) e (15), respectivamente, e as versões modificadas desses modelos definidas pelas equações (19), (20) e (21), respectivamente, as quais permitem que os parâmetros variem em função do horizonte de previsão, utilizando-se uma regressão não linear de mínimos quadrados (NLMQ). Por exemplo, estimou-se separadamente o modelo GARCH da equação (1) e o modelo GARCH modificado da equação (19) e foram usados ambos os modelos para prever a volatilidade futura.

No total comparou-se sete modelos: GARCH, TGARCH, EGARCH, as três versões modificadas destes modelos, e o ARLS.

Raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (RMSE)

Ederington & Guan (2010) sugerem como primeira medida de acurácia do modelo de previsão out-of-sample a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (RMSE) definida como:

$$RMSE(s,j,k) = \sqrt{(1/T)\sum_{t=1}^{T} FE(s,j,k)_t^2} \tag{22}$$

onde, $FE(s,j,k)_t$ é o erro de previsão de volatilidade para um horizonte de previsão de s dias para o ativo j no dia t, referente ao modelo k.

Uma questão a ser tratada é qual medida de volatilidade deve ser usada, pois como foi visto até o momento, os modelos GARCH e TGARCH estimam a variância, o modelo ARLS estima o desvio-padrão e o modelo EGARCH estima o logaritmo do desvio-padrão. Neste artigo foram utilizados como medida de volatilidade os desvios-padrão dos choques dos retornos, pois, como argumentam Poon e Granger (2003) o desvio-padrão é melhor que a variância, já que a variância é mais suscetível a outliers e distanciamento da hipótese de normalidade.

Além disso, em Black & Scholes (1973) e na maioria dos modelos de apreçamento de opções, o preço da opção é aproximadamente uma função linear do desvio-padrão para opções *near-the-money*, aquelas cujo preço do exercício apresenta valor próximo ao preço do ativo-objeto. Ademais, as medidas de VaR são funções lineares do desvio padrão.

O erro de previsão do desvio-padrão é calculado como $FE(s,j,k)_t = Fore(s,j,k)_t - Act(s,j)_t$, onde $Fore(s,j,k)_t$ é a previsão para o desvio-padrão anualizada para um horizonte de s dias de $t+1$ até $t+s$ para o ativo j usando o modelo k; e $Act(s,j)_t$ é o desvio-padrão real observado, calculado utilizando-se as últimas 252 observações de retornos diários (o que corresponde aproximadamente a um ano de dados diários).

Para a geração das previsões *out-of-sample*, os modelos foram estimados usando 1260 observações diárias dos retornos, o que corresponde a aproximadamente 5 anos de dados diários. Posteriormente, esses modelos foram utilizados para realizar previsões, as quais foram comparadas com as últimas 252 observações diárias dos retornos que foram separadas do resto da amostra (*out-of-sample*).

Média dos Erros Absolutos (MAE)

Além da RMSE, utilizou-se outro critério para avaliar o poder de previsão *out-of-sample* dos sete modelos de previsão mencionados acima, a Média dos Erros Absolutos, $MAE(s,j,k)$, definida como $MAE(s,j,k)=$ $[(1/T)\sum_{t=1}^{T}|FE(s,j,k)_t|]$.

4. Resultados

4.1 Modelos

Modelo GARCH

As estimativas de do modelo GARCH da equação (1), a distribuição de erros que proporcionou a menor soma dos quadrados dos resíduos para as distribuições testadas (normal, t-student, *Generalized Error Distribution* (GED), *skew normal*, *skew t-student* e *skew* GED), bem como as estimativas de β_s do modelo GARCH modificado com o uso da regressão (NLMQ) da equação (11) são evidenciados na Tabela 2. Essas estimativas foram obtidas com todas as observações contidas na amostra (*in sample*). Pode-se observar que das 24 estimativas de β no modelo GARCH modificado, 17 apresentaram valor igual ou superior aos valores de calculados pelo modelo GARCH padrão, representando, portanto 70% dos casos. Esses resultados estão de acordo com a argumentação de Ederington & Guan (2010) de que melhoresprevisões de volatilidade são obtidas com o incremento do peso relativo das observações mais antigas à medida que o horizonte de previsão se amplia.

Todavia, nota-se que boa parte da exceção a esse comportamento dos parâmetros concentra-se nas previsões de volatilidade para a taxa de juros de 3 anos, pois os β_s estimados pelo modelo GARCH modificado foram menores que o β estimado pelo modelo GARCH padrão, indo de encontro, portanto, à hipótese sustentada pelos autores citados no parágrafo anterior.

Tabela 2
Estimativas do modelo GARCH e horizontes de previsão

Estimativas do modelo GARCH e horizontes de previsão						
Ativo	Estimativas de β	Distribuição resíduos	Valores de β_s que minimizam a soma dos quadrados dos erros do modelo modificado (*in sample*)			
	GARCH*		10 dias	20 dias	40 dias	80 dias
Petrobrás	0,88	SkewGED	0,85	0,9	0,95	0,94
Vale	0,85	GED	0,96	0,97	0,97	0,96
IBOV	0,87	Normal	0,88	0,92	0,96	0,95
Real/Dólar	0,86	Skew t-student	0,8	0,91	0,88	0,85
Taxa 1y	0,74	Normal	0,99	0,98	0,98	1
Taxa 3y	0,92	Normal	0,87	0,9	0,87	0,88
Média	0,85		0,89	0,93	0,94	0,93

$*p - value < 0,01.$

As diferenças na importância relativa entre as observações antigas e as recentes são significativas. Considere, por exemplo, o peso atrelado a uma observação de 20 dias úteis atrás, r^2_{t-20}, relativo ao peso atrelado à observação de hoje, r^2_t, na geração de previsão de volatilidade. Para o modelo GARCH o β médio estimado para os seis ativos é de 0,85, o que corresponde a um peso atrelado à observação r^2_{t-20} de 3,88% ($\beta^j = (0,85)^{20}$) do peso atrelado à observação atual, $r^2 t$. Esses pesos são os mesmos, independente do horizonte de previsão. Por outro lado, ao se usar o modelo GARCH modificado para 20 dias de previsão, por exemplo, percebe-se que o β_S médio para os 6 ativos passa a ser de 0,93, o que corresponde a um peso atrelado à observação r^2_{t-20} de 23,42% ($\beta_j = (0,92)^{20}$) do peso atrelado à observação atual, $r^2 t$.

Desse modo, percebe-se que a volatilidade no modelo GARCH modificado de 20 dias úteis atrás tem impacto 6 vezes maior que aquele registrado para a mesma volatilidade no modelo GARCH padrão.

Modelo TGARCH

Os resultados para os parâmetros β para o modelo TGARCH padrão da equação (12), a distribuição de erros que proporcionou a menor soma dos quadrados dos resíduos para as distribuições testadas (normal, t-student, *Generalized Error Distribution* (GED), skew normal, skew t-student e skew GED), e os parâmetros β_s do modelo TGARCH modificado são mostrados na Tabela 3:

Tabela 3
Estimativas do modelo TGARCH e horizontes de previsão

Ativo	Estimativas de β		Valores de β_s que minimizam a soma dos quadrados dos erros do modelo modificado (in sample)			
	TGARCH*	Distribuição Resíduos	10 dias	20 dias	40 dias	80 dias
Petrobrás	0,88	Skew GED	0,91	0,93	0,95	0,95
Vale	0,84	Normal	0,95	0,96	0,97	0,96
IBOV	0,87	Normal	0,89	0,91	0,97	0,96
Real/Dólar	0,88	Skew Normal	0,82	0,89	0,85	0,84
Taxa 1y	0,9	Skew t-student	0,94	0,92	1,00	1,00
Taxa 3y	0,89	Skew Normal	0,87	0,9	0,87	0,87
Médias	0,87		0,9	0,92	0,93	0,93

*$p - value < 0,01$.

Pode-se observar que das 24 estimativas de no modelo TGARCH modificado, 18 apresentaram valor igual ou superior aos valores de calculados pelo modelo TGARCH padrão para o respectivo ativo, representando, portanto 75% dos casos. Esses resultados também estão alinhados com a investigação de Ederington & Guan (2010) para dados do mercado financeiro norte-americano.

Assim como o ocorrido para o modelo GARCH, observa-se que o padrão de aumento de sem função do horizonte de previsão não se verifica nas previsões de volatilidade para a taxa de juros de 3 anos, pois os β_s estimados pelo modelo TGARCH modificado foram menores que o β estimado pelo modelo TGARCH padrão.

Modelo EGARCH

Os resultados dos parâmetros β para o modelo EGARCH padrão da equação (15), a distribuição de erros que proporcionou a menor soma dos quadrados dos resíduos para as distribuições testadas (normal, t-student, *Generalized Error Distribution* (GED), skew normal, skew t-student e skew GED), e os parâmetros β_s do modelo EGARCH modificado são mostrados na Tabela 4:

Tabela 4
Estimativas do modelo EGARCH e horizontes de previsão

Ativo	Estimativas de β		Valores de β_s que minimizam a soma dos quadrados dos erros do modelo modificado (in sample)			
	EGARCH*	Distribuição Resíduos	10 dias	20 dias	40 dias	80 dias
Petrobrás	0,97	Skew GED	0,92	0,94	0,95	0,94
Vale	0,97	Normal	0,95	0,96	0,97	0,97
IBOV	0,96	Normal	0,93	0,95	0,96	0,95
Real/Dólar	0,98	Skew t-student	0,76	0,94	0,81	0,79
Taxa 1y	0,97	Skew t-student	0,94	0,92	1,00	1,00
Taxa 3y	0,97	Normal	0,96	0,95	0,99	1,00
Médias	0,97		0,91	0,94	0,95	0,94

*$p - value < 0,01$.

Em conformidade com os resultados encontrados por Ederington & Guan (2010) para o mercado norte-americano, observa-se na tabela 4, que as estimativas de β para o modelo EGARCH são maiores que aquelas realizadas para os modelos GARCH e TGARCH. As médias das estimativas de dos seis ativos investigados foram de 0,85 para o modelo GARCH contra 0,97 para o modelo EGARCH, resultando em uma memória mais longa e um maior peso dado às observações mais antigas para o modelo EGARCH. Para ilustrar esse ponto, nota-se que a média de 0,85 do modelo GARCH faz com que o peso atribuído ao retorno de 20 dias atrás, r_{t-20}^2, seja de somente 3,88% ($\beta^j = (0,85)^{20}$) daquele atribuído a r_t^2. Todavia, a média de 0,97 faz com que o peso atribuído ao retorno de 20 dias atrás, r_{t-20}^2, seja 54,38% ($\beta^j = (0,97)^{20}$)daquele atribuído a r_t^2.

Ademais, pôde-se verificar que, em 77% dos casos, os sestimados pelo modelo EGARCH modificado não apresentaram decréscimo em seus valores com o aumento do horizonte de previsão.

Entretanto, diferentemente do constatado Ederington & Guan (2010) para o mercado norte-americano, verificou-se, para os ativos do mercado brasileiro estudados, que os β_s dos modelos EGARCH modificados não foram, de forma predominante, maiores que os β_s dos modelos EGARCH padrão, pois, na Tabela 4, observa-se que dos 24 β_s estimados para o modelo EGARCH modificado, apenas 4 (16,6%) apresentaram valores superiores aos respectivos β estimados por meio do modelo EGARCH padrão.

Modelo ARLS

A Tabela 5 apresenta os resultados para as estimativas de β_s do modelo ARLS:

Tabela 5
Estimativas do modelo ARLS e horizontes de previsão

Estimativas do Modelo ARLS e Horizontes de Previsão				
Ativo	Valores de bque minimizam a soma dos quadrados dos erros do modelo modificado(In Sample)			
	10 dias	20 dias	40 dias	80 dias
Petrobrás	0,9	0,93	0,94	0,93
Vale	0,94	0,95	0,94	0,96
IBOV	0,88	0,91	0,94	0,94
Real/Dólar	0,89	0,91	0,89	0,87
Taxa 1y	0,72	0,84	0,81	0,83
Taxa 3y	0,9	0,89	0,88	0,9
Médias	0,87	0,91	0,9	0,91

Na tabela 5, nota-se que as médias dos β_s obtidas por meio do modelo ARLS para cada horizonte de previsão são maiores que o β médio de 0,85 obtido por meio do modelo GARCH padrão, evidenciando, mais uma vez, o aumento do valor do parâmetro β em função do horizonte de previsão. Isso significa que, quando comparado ao modelo GARCH, o modelo ARLS atribui maior peso para as observações mais antigas devido ao maior horizonte de previsão. Por exemplo, para um horizonte de previsão s=20, enquanto no modelo ARLS a observação de 20 dias atrás, r_{t-20}, recebe um peso de 13,58% ($\beta^j = (0,91)^{20}$) – considerando-se a média de β_{20} para os seis diferentes ativos – daquele atribuído à observação mais recente, $|r_t|$; no modelo GARCH a observação de 20 dias atrás, r_{t-20}^2, recebe um peso de 3,88% ($\beta^j = (0,85)^{20}$) do peso dado à observação mais recente, r_t^2.

4.2 Precisão das previsões fora da amostra (*out-of-sample*)

Raiz Quadrada da Média dos Quadrados dos Erros (RMSE)

Os valores para as raízes quadradas das médias dos quadrados dos erros, RMSE (s, j, k), para as previsões de desvio-padrão dos retornos são apresentados na Tabela 6 para todos os modelos de previsão k, e horizontes de previsão $s = 10, 20$ e 40 dias úteis para os seis ativos, j. Os menores valores para RMSE, para cada linha, encontram-se destacados em negrito, enquanto que o segundo menor valor encontra-se destacado em itálico.

Tabela 6
Raiz Quadrada da Média dos Quadrados dos Erros (RMSE)

Raiz Quadrada da Média dos Quadrados dos Erros (RMSE)							
	ARLS	GARCH		EGARCH		TGARCH	
Ativo		Standard	Modified	Standard	Modified	Standard	Modified
Painel A – 10 dias							
Petrobrás	*0,1336*	0,1361	0,1358	0,1721	**0,1249**	0,1422	0,1445
Vale	*0,1334*	0,1505	0,1435	0,1653	**0,1211**	0,1512	0,1435
IBOV	*0,1035*	0,1145	0,107	0,1362	**0,094**	0,1211	0,1105
Real/Dólar	0,0872	0,1329	*0,0871*	0,1772	**0,0778**	0,1562	0,0891
Taxa 1y	*0,0705*	0,082	0,0724	0,0836	0,072	0,083	**0,0697**
Taxa 3y	**0,0174**	0,022	0,0205	0,032	*0,0211*	0,0216	0,053
Painel B – 20 dias							
Petrobrás	*0,118*	0,1343	0,1181	0,1917	**0,1073**	0,1486	0,1221
Vale	*0,1168*	0,1393	0,1205	0,1758	**0,1025**	0,1461	0,1219
IBOV	*0,09*	0,1124	0,0923	0,1511	**0,0828**	0,1296	0,0932
Real/Dólar	0,0665	0,0882	*0,0663*	0,0961	0,0674	0,0913	**0,0621**
Taxa 1y	**0,0061**	0,007	0,0074	0,0069	*0,0066*	0,0093	0,0211
Taxa 3y	**0,0169**	0,018	0,0186	0,0359	0,0203	*0,0174*	0,0549
Painel C – 40 dias							
Petrobrás	*0,0898*	0,1568	0,0859	0,2257	**0,0761**	0,1759	0,0911
Vale	0,0979	0,1522	*0,0958*	0,2012	**0,0823**	0,1658	0,1759
IBOV	0,0872	0,1329	*0,0871*	0,1772	**0,0778**	0,1562	0,0891
Real/Dólar	0,0591	0,1002	*0,0581*	0,1072	0,0616	0,105	**0,058**
Taxa 1y	**0,0041**	0,0084	0,0054	*0,0047*	0,0058	0,0105	0,0191
Taxa 3y	**0,0163**	0,0176	0,0191	0,0444	0,0201	*0,0165*	0,0565

Como mostrado na Tabela 6, nenhum modelo apresenta as melhores previsões para todos os ativos em todos os horizontes de previsão, todavia percebe-se a predominância dos modelos ARLS e EGARCH modificado. Esses resultados encontram-se alinhados com a pesquisa realizada por Ederington & Guan (2010) para o mercado norte-americano.

Verifica-se que neste artigo há seis ativos e três horizontes de previsão. Dessas 18 combinações ativo /horizonte de previsão, o modelo EGARCH modificado, o qual permite que o parâmetro β varie em função do horizonte de previsão, apresenta o menor RMSE *out-of-sample* em 10; e o modelo ARLS em 5. Nenhum outro modelo de previsão apresentou menor RMSE em mais que 3 combinações ativo/horizonte de previsão.

A predominância dos modelos EGARCH modificado e ARLS é reforçada ao constatar-se que o modelo EGARCH modificado apresentou o menor ou o segundo menor RMSE em 61% dos casos, enquanto que o modelo ARLS apresentou o menor ou o segundo menor ou RMSE em 72% dos casos.

Média dos Erros Absolutos (MAE)

Os cálculos das MAE (s, j, k) para os diversos mercados e horizontes de previsão encontram-se na Tabela 7.

Os resultados observados na Tabela 7 são basicamente os mesmos obtidos pelo critério RMSE evidenciado na Tabela 6, nos quais se manteve a predominância dos modelos EGARCH modificado e ARLS sobre os demais.

Das 18 combinações ativo/horizonte de previsão, o modelo EGARCH modificado apresentou o menor MAE em 12; e o modelo ARLS em 5 combinações. Assim como observado para o critério RMSE, nenhum outro modelo de previsão apresentou menor MAE em mais que 3 combinações ativo/horizonte de previsão.

Ademais, verificou-se que o modelo EGARCH modificado apresentou o menor ou o segundo menor MAE em 94,4% dos casos, enquanto que o modelo ARLS apresentou o menor ou o segundo menor ou MAE em 88,8%.

Em resumo, pode-se dizer que o modelo EGARCH modificado e o modelo ARLS proposto por Ederington & Guan (2005) apresentaram preponderância em relação aos outros cinco modelos no que diz respeito às previsões de volatilidade *out-of-sample* para horizontes de previsão superiores a um período (dia).

Aqueles modelos apresentam a característica comum de permitir que o parâmetro β_s varie em função do horizonte de previsão, o que não ocorre com os modelos GARCH, TGARCH e EGARCH tradicionais.

Desse modo, percebe-se, para as séries financeiras observadas, que a menor parcimônia dos modelos modificados, já que utilizam parâmetros diferentes para cada horizonte de previsão, é justificada pelos menores RMSE e MAE observados, quando comparados àqueles obtidos pelos modelos padrão.

Tabela 7
Média dos Erros Absolutos (MAE)

Média dos Erros Absolutos (MAE)							
	ARLS	GARCH		EGARCH		TGARCH	
Ativo		Standard	Modified	Standard	Modified	Standard	Modified
S - 10 dias							
Petrobrás	*0,0956*	0,1038	0,1031	0,1359	**0,0858**	0,1047	0,1084
Vale	*0,0941*	0,1222	0,109	0,1327	**0,0842**	0,1204	0,113
IBOV	*0,0706*	0,0864	0,0726	0,1032	**0,0599**	0,087	0,0746
Real/Dólar	*0,05*	0,0643	0,0556	0,0654	**0,0484**	0,0642	0,0531
Taxa 1 ano	**0,0046**	0,0048	0,0066	0,0055	*0,0047*	0,0071	0,0165
Taxa 3 anos	**0,014**	0,0196	0,0188	0,0287	*0,0147*	0,0193	0,0526
S - 20 dias							
Petrobrás	*0,0893*	0,1023	0,0963	0,134	**0,0782**	0,1034	0,0999
Vale	*0,0804*	0,0943	0,0917	0,1176	**0,0698**	0,0943	0,0922
IBOV	*0,0632*	0,0805	0,0682	0,1012	**0,052**	0,0827	0,0659
Real/Dólar	*0,0501*	0,0645	0,0522	0,0702	**0,047**	0,065	0,0508
Taxa 1 ano	**0,0046**	0,0048	0,0066	0,0055	*0,0047*	0,0071	0,021
Taxa 3 anos	**0,0142**	0,0158	0,0164	0,0308	*0,0151*	0,0154	0,0542
S - 40 dias							
Petrobrás	0,0746	0,1279	*0,0712*	0,1457	**0,062**	0,1309	0,0733
Vale	*0,074*	0,1034	0,0798	0,1297	**0,0605**	0,1087	0,1581
IBOV	*0,0673*	0,0972	0,0745	0,113	**0,0548**	0,1062	0,0746
Real/Dólar	*0,0481*	0,0738	0,0482	0,078	**0,0461**	0,0765	0,0482
Taxa 1 ano	**0,0033**	0,0071	0,0051	0,0038	*0,0035*	0,0095	0,019
Taxa 3 anos	0,0141	*0,0131*	0,0167	0,0364	0,0156	**0,0126**	0,0561

5. Conclusão

O apreçamento de opções e medidas de Value-at-Risk (VaR) normalmente demandam previsões de volatilidade para períodos, cujos horizontes são superiores à frequência de observação dos dados utilizados para gerar essas previsões.

Os modelos tradicionais da família GARCH para estimar a volatilidade para períodos mais longos lançam mão de substituições recursivas, as quais forçam que a importância relativa entre as observações mais antigas e as mais recentes permaneça a mesma seja qual for o horizonte de previsão da volatilidade, apesar de a importância absoluta de ambas as observações, antigas e recentes, declinarem devido à reversão à média.

Por outro lado, mostrou-se que observações mais antigas são relativamente mais importantes que as mais recentes na previsão de volatilidade para horizontes de previsão mais longos. Adicionalmente, foram estimadas versões modificadas dos modelos GARCH, TGARCH, EGARCH e o modelo ARLS sugerido por Ederington & Guan (2005), os quais apresentam a característica de permitir que os valores dos parâmetros dos modelos variem em função do horizonte de previsão. As estimativas de volatilidade fora da amostra (*out-of-sample*) para vários ativos e horizontes de previsão foram comparadas entre os sete modelos de previsão. Apesar de nenhum modelo ter apresentado as melhores estimativas para todas as combinações ativo/horizonte de previsão, houve predominância dos modelos EGARCH modificado e ARLS, pois apresentaram os menores valores de RMSE e MAE.

Por todo o exposto, pode-se concluir que gerar estimativas de volatilidade para longos horizontes de previsão por meio dos modelos tradicionais que empregam substituições recursivas mostrou-se inapropriado; e que os métodos de previsão de volatilidade devem permitir que as observações mais antigas sejam relativamente mais importantes que as mais recentes na previsão de volatilidade para horizontes mais longos.

Referências

Andersen, Torben G., & Bollerslev, Tim. 1997. Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns. *Journal of Finance*, **52**, 975–1005.

Andersen, Torben G., Bollerslev, Tim, Christoffersen, Peter F., & Diebold, Francis X. 2006. Volatility and Correlation Forecasting. *In:* Elliot, Graham, Granger, Cliver W. J., & Timmermann, Allan (eds), *Handbook of Economic Forecasting*. Amsterdam: Elsevier.

Baillie, Richard T., Bollerslev, Tim, & Mikkelsen, Hans O. 1996. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **74**, 3–30.

Black, Fischer, & Scholes, Myron. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.

Bollerslev, Tim, & Mikkelsen, Hans O. 1996. Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility. *Journal of Econometrics*, **73**, 151–184.

Christoffersen, Peter F., & Diebold, Francis X. 2000. How Relevant Is

Volatility Forecasting for Financial Risk Management? *Review of Economics and Statistics*, **82**, 12–22.

Christoffersen, Peter F., Diebold, Francis X., & Schuermann, Til. 1998. Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management. *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, **4**, 109–118.

Ding, Zhuanxin, & Granger, Clive W. J. 1996. Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach. *Journal of Econometrics*, **73**, 185–215.

Ding, Zhuanxin, Granger, Clive W. J., & Engle, Robert F. 1993. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.

Ederington, Louis H., & Guan, Wei. 2005. Forecasting Volatility. *Journal of Futures Markets*, **25**, 465–490.

Ederington, Louis H., & Guan, Wei. 2010. Longer-Term Time-Series Volatility Forecasts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **45**, 1055–1076.

Engle, Robert F., & Bollerslev, Tim. 1986. Modeling the Persistence of Conditional Variances. *Econometrics Reviews*, **5**, 1–50.

Engle, Robert F., & Manganelli, Simone. 2004. CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics*, **22**, 367–381.

Figlewski, Stephen. 1997. Forecasting Volatility. *Financial Markets, Institutions, and Instruments*, **6**, 1–88.

Marcellino, Massimiliano, Stock, James H., & Watson, Mark W. 2006. A Comparison of Direct and Iterated Multistep AR Methods for Forecasting Macroeconomic Time Series. *Journal of Econometrics*, **135**, 499–526.