



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Falcão Noda, Rafael; Martelanc, Roy; Securato, José Roberto  
Eficiência da Carteira de Mercado no Plano Média-Variância  
Revista Brasileira de Finanças, vol. 12, núm. 1, enero-marzo, 2014, pp. 67-88  
Sociedade Brasileira de Finanças  
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305830999004>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica  
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# Eficiência da Carteira de Mercado no Plano Média-Variância

(Mean-Variance Efficiency of the Market Portfolio)

Rafael Falcão Noda\*

Roy Martelanc\*\*

José Roberto Securato\*\*\*

## Resumo

Este estudo procura responder à crítica de inconsistência do CAPM baseada na alegação de que a carteira de mercado não está sobre a fronteira eficiente. Para tanto, faz-se uma otimização numérica, utilizando-se dados de ações brasileiras entre 2003 e 2012. Obtêm-se retornos e desvios padrão ajustados tais que (i) a fronteira eficiente passe pela carteira de mercado e (ii) sejam minimizadas as distâncias entre retornos e desvios padrão amostrais e ajustados. Da mesma forma que Levy & Roll (2010) encontraram para o mercado dos EUA, conclui-se que os ajustes necessários não são significativos, tanto para retornos quanto para desvios padrão. O resultado sugere que possíveis imprecisões do CAPM decorrem principalmente de erros de estimativa dos parâmetros utilizados, e não de inconsistência do modelo, e que outros fatores explicativos dos retornos podem ser pouco relevantes. Em decorrência, o resultado refuta a mencionada alegação de inconsistência do CAPM no Brasil.

**Palavras-chave:** CAPM; gestão de carteiras; custo de capital.

**Códigos JEL:** G11; G12; G32.

## Abstract

The objective of this study is to answer the criticism to the CAPM based on findings that the market portfolio is far from the efficient frontier. We run a numeric optimization model, based on Brazilian stock market data from 2003 to 2012. For each asset, we obtain adjusted returns and standard deviations such that (i) the efficient frontier intersects with the market portfolio and (ii) the distance between the adjusted parameters and the sample parameters is minimized. We conclude

---

Submetido em 21 de outubro de 2013. Reformulado em 7 de fevereiro de 2014. Aceito em 11 de abril de 2014. Publicado on-line em 2 de junho de 2014. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Newton C. A. da Costa Jr.

\*FEA-USP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: rafaelnoda@usp.br

\*\*FEA-USP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: rmartela@usp.br

\*\*\*FEA-USP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: securato@usp.br

*Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, Vol. 12, No. 1, March 2014, pp. 67-88*  
ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2014 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license -  
<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

that the adjusted parameters are not significantly different from the sample parameters, in line with the results of Levy and Roll (2010) for the USA stock market. Such results suggest that the imprecisions in the implementation of the CAPM stem mostly from parameter estimation errors and that other explanatory factors for returns may have low relevance. Therefore, our results contradict the above-mentioned criticisms to the CAPM in Brazil.

**Keywords:** CAPM; portfolio management; cost of capital.

## 1. Introdução

Diversos estudos concluem que o CAPM (Sharpe, 1964, Lintner, 1965) é o modelo mais utilizado para cálculo do custo de capital próprio, seja por grandes corporações internacionais (Bruner *et al.*, 1998) ou por profissionais que atuam em fusões e aquisições e *private equity* no Brasil (Garran, 2007).

No entanto, a validade do CAPM é amplamente debatida. Vários trabalhos testam o modelo com base em dados empíricos dos mercados de capitais, tanto no Brasil quanto em outros países, com conclusões conflitantes.

Alguns autores defendem a inadequação do CAPM, como, por exemplo, Gibbons (1982), Shanken (1985), Gibbons *et al.* (1989), Zhou (1991) e Bruni & Famá (1998). No Brasil, Hagler & Brito (2007) concluem pela inadequação do CAPM com base na metodologia GRS de Gibbons *et al.* (1989).

Os trabalhos que concluem pela inadequação do citado modelo usualmente argumentam que (i) a relação entre betas e retornos é fraca, (ii) a *proxy* da carteira de mercado está distante da fronteira eficiente no plano média-variância ou (iii) há outros fatores de risco, além do de mercado, capazes de explicar os retornos dos ativos.

Entre os autores que defendem a superioridade de modelos com a adição de fatores de risco, se destacam, internacionalmente, Banz (1981), Basu (1977), Fama & French (1992), Fama & French (1993) e Carhart (1997). Tais autores incluem fatores como tamanho, índice *book-to-market*, índice *price/earnings* e momento de mercado. No Brasil, Almeida & Eid Jr. (2010) e Machado & Medeiros (2011) aplicaram modelos multifatoriais com resultados similares.

Por outro lado, há aqueles que defendem que a eficiência da carteira de mercado em termos de média-variância, conforme proposto pelo CAPM, não pode ser rejeitada, como Levy & Roll (2010). No Brasil, o teste direto do CAPM desenvolvido por Nakamura (2000), com base na metodologia GRS, também conclui que não é possível rejeitar o CAPM.

Tendo em vista o contexto de resultados conflitantes, o objetivo deste trabalho é testar a eficiência de *proxies* para a carteira de mercado no Brasil, utilizando a metodologia proposta por Levy & Roll (2010), ainda não aplicada no país.

Ao contrário de estudos brasileiros anteriores, os quais testam a eficiência em termos de média-variância da *proxy* da carteira de mercado de forma direta, este estudo executa o teste de forma inversa, encontrando as menores variações nos dados amostrais (média de retornos dos ativos e variância dos retornos dos ativos) necessárias para tornar as *proxies* da carteira de mercado eficientes.

Acredita-se que tal metodologia seja superior às já adotadas para amostras brasileiras, dado que (i) não requer a definição a priori de uma taxa livre de risco, tarefa que pode ser especialmente difícil no mercado brasileiro, levando a resultados potencialmente inconsistentes, e que (ii) permitem-se ajustes simultâneos tanto nos retornos observados como nos desvios padrão dos retornos, o que aumenta os graus de liberdade. Portanto, conforme Levy & Roll (2010), enquanto as metodologias tradicionais testam somente um vetor de interceptos, ou alfas, a metodologia adotada neste trabalho analisa uma série de vetores de retornos médios e desvios padrão de retornos.

Com base em uma amostra brasileira no período entre 2003 e 2012, conclui-se que os parâmetros ajustados que tornam as *proxies* da carteira de mercado eficientes em termos de média-variância, não são significativamente diferentes dos parâmetros amostrais, o que, em contraste com alguns estudos, não permite rejeitar o CAPM. Pelo contrário, indica que possíveis imprecisões na aplicação do modelo decorrem principalmente da estimativa dos parâmetros utilizados.

Os resultados estão em linha com os obtidos por Nakamura (2000), ajudando a consolidar a ideia de que não é possível rejeitar o CAPM no mercado brasileiro, apesar de diversos estudos encontrarem fatores diversos capazes de explicar retornos de ações no Brasil. Isto pode se dever ao fato de que os fatores adicionais ao risco de mercado, apesar de serem estatisticamente significativos, têm importância econômica e poder explicativo

limitados, conforme identificado por Machado & Medeiros (2011).

Este estudo estrutura-se da seguinte forma: após esta breve introdução, apresenta-se o referencial teórico no item 2, a metodologia e descrição da amostra no item 3, os resultados e sua análise no item 4 e, por fim, as conclusões no item 5.

## 2. Revisão Bibliográfica

### 2.1 CAPM

Com base na teoria de gestão de carteiras desenvolvida por Markowitz (1952), Sharpe (1964) e Lintner (1965) desenvolveram o Capital Asset Pricing Model- CAPM, propondo que, em condições de equilíbrio de mercado, o retorno esperado de determinado ativo deve ser proporcional a seu risco não diversificável, ou risco de mercado, medido pelo  $\beta$ , o qual é calculado com base na covariância entre os retornos do ativo e os retornos da carteira de mercado, conforme a seguinte equação:

$$E(R_j) = R_f + \beta_j[E(R_m) - R_f]$$

onde:

$E(R_j)$ : retorno esperado para o ativo  $j$ ;

$R_f$ : taxa livre de risco, ou retorno do ativo com  $\beta = 0$ ;

$\beta$ : medida do risco não diversificável de determinado ativo;

$E(R_m)$ : retorno esperado para a carteira de mercado.

A carteira de mercado compõe-se por todos os ativos disponíveis, cada um com participação proporcional a seu valor de mercado.

### 2.2 Testes do CAPM e da eficiência em termos de média-variância da carteira de mercado

Há ampla literatura sobre testes empíricos do CAPM. Roll (1977) considera que testar a validade do CAPM é um procedimento altamente complexo, dada a necessidade de conhecer a verdadeira carteira de mercado, composta por todos os ativos disponíveis. Roll (1977) também considera que testar o CAPM é equivalente a testar a eficiência da carteira de mercado em termos de média-variância.

Diversos estudos utilizam a eficiência em termos de média-variância de uma *proxy* da carteira de mercado para testar o CAPM, com conclusões por vezes conflitantes.

Para testar a eficiência do índice CRSP equiponderado, Gibbons (1982) adota metodologia multivariada na qual utiliza 40 carteiras compostas por ações ordenadas por seus Betas como variáveis dependentes. A amostra é separada em 10 subperíodos de cinco anos, entre 1926 e 1975, utilizando-se retornos mensais. O autor rejeita o CAPM com nível de significância inferior a 1,0% para cinco dos 10 subperíodos.

Shanken (1985) testa o CAPM com base na eficiência do índice CRSP ponderado por valor, utilizando testes de regressão em *cross-section* e concluindo pela ineficiência do referido índice. Conclui também que tal ineficiência não pode ser explicada pelo efeito tamanho da firma.

Zhou (1991) testou a eficiência do mesmo índice como *proxy* da carteira de mercado, utilizando dados mensais entre 1926 e 1986, rejeitando sua eficiência com nível de significância inferior a 0,1% em 8 das 12 janelas de 5 anos analisadas.

Jobson & Korkie (1982) testaram a eficiência do índice CRSP ponderado por valor, chegando a resultados contrastantes: foi possível rejeitar o CAPM em apenas um dos quatro subperíodos analisados – entre 1961 e 1965.

No Brasil, há diversos estudos que rejeitam o CAPM, principalmente por encontrarem outros fatores de risco, além do de mercado, capazes de explicar os retornos de ativos no país.

Bruni & Famá (1998) analisaram fatores explicativos dos retornos das ações de empresas não financeiras negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo entre 1988 e 1996, não encontrando relação significativa entre retorno e Betas, o que contradiz o CAPM. Encontraram, por outro lado, relação significativa com o índice calculado com base no valor de mercado e no valor contábil das ações (B/M), em linha com Fama & French (1992).

Almeida & Eid Jr. (2010) utilizam a metodologia de Fama & MacBeth (1973), na qual se consideram os coeficientes angulares médios de regressões para diferentes ativos como variável dependente. Em tais regressões, as variáveis dependentes são os excessos de retornos mensais dos ativos em relação à taxa livre de risco e as variáveis explicativas incluem, principalmente, o logaritmo natural da capitalização de mercado e o logaritmo natural da relação *book-to-market* nos instantes  $t - k$ , para  $k = 0, 12, 36$  e 60 meses. A amostra utilizada incluiu ações negociadas na Bovespa entre junho de 1995 e junho de 2008. Almeida & Eid Jr. (2010) concluem que apenas o índice *book-to-market* mais recente foi relevante para prever os retornos dos ativos.

Machado & Medeiros (2011) desenvolveram estudo cujo principal objetivo foi testar a existência do prêmio por liquidez no mercado acionário brasileiro. Os autores utilizam regressões múltiplas em séries temporais, nas quais as variáveis dependentes são os retornos de 24 carteiras formadas com base no tamanho, índicebook-to-market, momento de mercado e liquidez, de forma similar ao proposto por Fama & French (1993) e Carhart (1997). Como variáveis explicativas utilizam-se fatores de risco relacionados às mesmas variáveis utilizadas para formar as carteiras, bem como o fator mercado, proposto pelo CAPM. Os autores concluem que todos os fatores adicionados aumentam o poder explicativo do modelo, sendo, portanto, que o CAPM foi o modelo com menor poder explicativo, medido com base no  $R^2$ . No entanto, a adição de fatores teve contribuição limitada: o modelo de cinco fatores apresentou um  $R^2$  de médio de 84,2%, comparado com 75,7% para o CAPM.

Paiva (2005) realizou comparação entre o CAPM e o *Downside Capital Asset Pricing Model*, ou D-CAPM, o qual se baseia na semivariância dos retornos como medida de risco. Utilizou uma amostra de empresas brasileiras no período entre 1996 e 2002, concluindo pela superioridade do D-CAPM.

Gibbons *et al.* (1989) desenvolveram teste multivariado para a eficiência de uma determinada carteira baseado na diferença entre (i) o quadrado do índice de Sharpe (Sharpe, 1966, 1998) da carteira  $q$ , ou carteira *ex-post* de tangência, formada com base nos  $N$  ativos, além da carteira de mercado, e (ii) o quadrado do índice de Sharpe da carteira cuja eficiência se quer testar:

$$Estatística\ GRS = \left( \frac{T - N - 1}{N} \right) \left( \frac{\frac{\hat{\mu}_q^2}{\hat{\sigma}_q^2} - \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}}{1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}} \right)$$

onde:

$T$  é o número de observações em série temporal;

$N$  é o número de ativos utilizados para formar a carteira  $q$ ;

$\hat{\mu}_i$  é a média de retornos da carteira  $i$ ;

$\hat{\sigma}_i$  é o desviopadrão dos retornos da carteira  $i$ ;

$q$  é a carteira de máximo quadrado do índice de Sharpe;

$m$  é a carteira testada

A interpretação da estatística GRS é que, quanto mais próxima de zero, mais eficiente é a carteira testada.

Utilizando tal metodologia, Gibbons *et al.* (1989) testam a eficiência do índice CRSP ponderado por valor (*CRSP Value-Weighted Index*), com uma amostra entre 1926 e 1982, e separando os ativos tanto em 10 carteiras ordenadas por tamanho das empresas quanto em 10 carteiras ordenadas pelos betas das empresas. Em teste inicial, utilizando as carteiras ordenadas pelos betas, concluem que não é possível rejeitar o CAPM. Em testes subsequentes, utilizando a metodologia multivariada, são capazes de rejeitar a eficiência do citado índice.

Entre os testes baseados na metodologia GRS aplicados no Brasil, destacam-se os realizados por Nakamura (2000) e por Hagler & Brito (2007).

Nakamura (2000) baseou-se em uma amostra brasileira no período entre janeiro de 1990 e abril de 1997, utilizando retornos mensais. O autor agrupou os ativos em quatro carteiras ordenadas com base nos Betas dos ativos. Conclui que não é possível rejeitar a eficiência do Índice Bovespa no mercado brasileiro.

Já Hagler & Brito (2007) examinam a eficiência em termos de média-variância dos índices Bovespa, IBX50 e FGV100 no período entre junho de 1989 e julho de 2003, utilizando a taxa média de CDBs pré-fixados de 30 dias como taxa livre de risco. Os autores concluem que a maioria dos testes rejeita a eficiência dos índices testados.

Em suma, pode-se separar os trabalhos brasileiros acerca da validade do CAPM em dois grupos: (i) aqueles que testam fatores explicativos para os retornos de ações além do fator mercado (Almeida & Eid Jr., 2010, Machado & Medeiros, 2011) e (ii) os testes diretos do CAPM (Hagler & Brito, 2007, Nakamura, 2000).

Ao mostrarem que o CAPM tem um  $R^2$  de 75,7% e que os quatro fatores adicionais o elevam a 84,2%, Machado & Medeiros (2011) mostram tanto que o CAPM pode ser questionado à luz de mais fatores e complementado por eles, quanto que essa complementação tem relevância relativamente modesta. O coeficiente  $b$ , para o fator mercado, foi significativo a 1% para todas as carteiras. Por outro lado, os coeficientes para os demais fatores não foram significativos em diversas das carteiras, e, quando significativos, normalmente apresentaram níveis inferiores de significância.

Almeida & Eid Jr. (2010) explicam os retornos das ações com fatores específicos das empresas, não incluindo o retorno do mercado, e obtêm  $R^2$  próximos a 30% para *large* e *midcaps* e próximos a 17% para as *small caps*.



Esse efeito pode se dever, pelo menos parcialmente, a uma correlação entre os fatores utilizados e o retorno de mercado, o que não permite rejeitar o CAPM.

Os resultados de Nakamura (2000) mostram que não é possível rejeitar a eficiência do Ibovespa. Já Hagler & Brito (2007) rejeitam a eficiência do Ibovespa, IBX50 e FGV100 na maioria dos testes realizados. No entanto, conforme os próprios autores, tal rejeição não implica em rejeição do CAPM, pois pode ser devida à ineficiência dos índices como representantes da carteira de mercado. Os citados índices incluem apenas parte das ações negociadas, além de, tanto no caso do Ibovespa quanto do FGV 100, não terem sua composição exclusivamente ponderada pelo valor de mercado dos ativos, conforme prevê o CAPM.

Além de apresentarem resultados conflitantes, tais testes diretos do CAPM, conforme Levy & Roll (2010), são altamente sensíveis à taxa livre de risco utilizada. Levy & Roll (2010) mostram que o CAPM só pode ser rejeitado com base na metodologia GRS na amostra americana caso a taxa livre de risco seja inferior a 0,3% ao mês ou superior a 1,3% ao mês. Os autores mostram também que tal metodologia só consegue rejeitar o CAPM, também para a amostra americana, para períodos superiores a aproximadamente 60 anos.

### 3. Metodologia e Amostra

#### 3.1 Metodologia

Conforme metodologia utilizada por Levy & Roll (2010), utiliza-se um problema de otimização no qual se procura tornar a *proxy* da carteira de mercado eficiente, com variações mínimas nos parâmetros amostrais  $\mu_i^{amostra}$  (médias dos retornos amostrais para cada um dos  $n$  ativos) e  $\sigma_i^{amostra}$  (desvios-padrão dos retornos amostrais para cada um dos  $n$  ativos). Não foram permitidas variações nas correlações entre os ativos.

O problema de otimização consiste em minimizar a distância entre os parâmetros amostrais  $\mu_i^{amostra}$  e  $\sigma_i^{amostra}$  e os parâmetros ajustados  $\mu_i^*$  e  $\sigma_i^*$ , conforme a seguinte função objetivo:<sup>1</sup>

<sup>1</sup>As diferenças entre os parâmetros amostrais e os testados são divididas pelos desvios padrão amostrais com o intuito de diminuir a importância dos ativos com maior desvio padrão dos seus retornos.

$$D((\mu, \sigma), (\mu^{amostra}, \sigma^{amostra})) = \sqrt{\alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_i - \mu_i^{amostra}}{\sigma_i^{amostra}} \right)^2 + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_i - \sigma_i^{amostra}}{\sigma_i^{amostra}} \right)^2} \quad (1)$$

onde:

$D$ : distância entre os parâmetros amostrais (médias e desvios-padrão) e os parâmetros testados;

$n$ : número de ativos;

$\alpha$ : parâmetro determinando os pesos relativos atribuídos às distâncias dos retornos e às distâncias dos desvios-padrão. Da mesma forma que Levy & Roll (2010), para este estudo utilizou-se  $\alpha = 0,75$  (maior peso para os retornos)

A minimização da função objetivo (1) está sujeita à seguinte restrição:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & & \cdots & \rho_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = q \times \begin{bmatrix} \mu_1 - r_z \\ \mu_2 - r_z \\ \vdots \\ \mu_n - r_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\rho_{i,j}$ : correlação entre os ativos  $i$  e  $j$ , a qual é mantida constante e igual à observação amostral;

$x_{mi}$ : peso do ativo  $i$  na carteira de mercado;

$q > 0$ : constante de proporcionalidade;

$r_z$ : retorno do ativo com  $\beta = 0$ .

A equação (2) possui  $2n + 2$  graus de liberdade, sendo  $n$  retornos médios ( $\mu_i$ ) e  $n$  desvios padrão dos retornos ( $\sigma_i$ ). Segundo Roll (1977), qualquer conjunto de  $2n + 2$  parâmetros que satisfaça a equação (2) torna a carteira de mercado eficiente em termos de média-variância.

Os parâmetros de retornos e desvios padrão dos retornos que minimizam a função objetivo (1) satisfazendo a restrição (2) são denominados, respectivamente,  $\mu_i^*$  e  $\sigma_i^*$ .

A hipótese nula testada é a de que as diferenças entre os retornos ajustados e os retornos amostrais,  $\mu_i^* - \mu_i^{amostra}$ , são estatisticamente iguais a zero, ou seja, de que os ajustes necessários aos retornos amostrais para tornar a *proxy* da carteira de mercado eficiente no plano média-variância não são significativos. A hipótese alternativa é de que tais diferenças são estatisticamente diferentes de zero.

A metodologia proposta difere das tradicionalmente utilizadas essencialmente por ser um teste reverso: enquanto as demais metodologias testam a eficiência de uma dada carteira, como no caso da GRS, este trabalho busca ajustes nos parâmetros amostrais que façam com que as *proxies* para a carteira de mercado sejam eficientes em termos de média-variância, ou seja, estejam sobre a fronteira eficiente.

Adicionalmente, não é necessária uma definição *a priori* de uma taxa livre de risco, a qual é tratada como um dos parâmetros parte do problema de estimação. Esta vantagem pode ser especialmente relevante no caso brasileiro, dada a dificuldade de estimativa para as taxas livres de risco para o longo prazo no país.

Por fim, a metodologia adotada permite ajustes simultâneos tanto nos retornos quanto nos desvios padrão dos retornos, aumentando o número de graus de liberdade do modelo. Enquanto os testes tradicionais verificam um vetor de retornos médios, este trabalho testa simultaneamente diversos vetores de retornos médios e desvios padrão dos retornos.

### 3.2 Amostra

Utilizaram-se ações para as quais estavam disponíveis séries de retornos mensais completas para um período de 10 anos, com 120 observações de re-

tornos para cada ação. Utilizou-se o período entre janeiro de 2003 e dezembro de 2012, para o qual havia 35 ações pertencentes ao índice Bovespa, as quais atendiam os requisitos mencionados. Como teste de robustez, as análises também foram realizadas para todas as ações listadas na Bovespa com séries de retornos mensais completas no período, totalizando 87 ativos, bem como para dois subperíodos de cinco anos, entre janeiro de 2003 e dezembro de 2007 e entre janeiro de 2008 e dezembro de 2012, para os quais foram utilizadas, respectivamente, 92 ações e 100 ações. A Tabela 1 resume as quatro amostras utilizadas.

**Tabela 1**  
Amostras utilizadas

Amostra	Período	Número de ações
1. Ações Ibovespa, período completo	Jan/2003 a Dez/2012	35
2. Todas as ações, período completo	Jan/2003 a Dez/2012	87
3. Todas as ações, primeiro subperíodo	Jan/2003 a Dez/2007	92
4. Todas as ações, segundo subperíodo	Jan/2008 a Dez/2012	100

### 3.3 Proxy da carteira de mercado

Conforme prevê o CAPM, bem como de acordo com pesquisas anteriores, entre elas Stambaugh (1982), utilizou-se como *proxy* para a carteira de mercado uma carteira incluindo todos os ativos analisados, com pesos iguais às suas respectivas capitalizações de mercado:

$$x_{mi} = \frac{\text{capitalização de mercado da empresa } i}{\sum_{j=1}^n \text{capitalização de mercado da empresa } j}$$

## 4. Resultados

### 4.1 Resultados para a Amostra 1 – Ações Ibovespa

A Tabela 2 mostra os retornos ajustados que tornam a *proxy* da carteira de mercado eficiente ( $\mu_i^*$ ), bem como as diferenças entre os citados retornos e os retornos amostrais, para a amostra 1.

Os resultados mostram que ajustes relativamente pequenos aos retornos amostrais são capazes de tornar a *proxy* da carteira de mercado eficiente em termos de média-variância. De forma mais específica, observa-se que, para todas as ações, as diferenças entre  $\mu_i^{\text{amostra}}$  e  $\mu_i^*$  são inferiores  $0,2 \sigma_i^{\text{amostra}}$  (desvios padrão amostrais). Nenhuma das diferenças é significativa a 1%.

Adicionalmente, conforme Bonferroni (1935), deve-se rejeitar um teste de comparação múltipla com um nível de confiança  $c$  se qualquer dos parâmetros é diferente do seu par amostral a um nível de confiança de  $c/k$ , onde

$k$  é o número de parâmetros. Nesta análise, são testados 70 parâmetros, sem qualquer diferença significativa a 1% – portanto, nenhuma das diferenças é significativa a (5/70)%, e as diferenças não são significativas conjuntamente. Ainda utilizando-se o mesmo teste, as diferenças não foram conjuntamente significativas a 5%.

Aplicaram-se também os testes de comparação múltipla de Benjamini & Hochberg (1995), robustos a dependência positiva, e os testes com a modificação proposta por Benjamini & Yekutieli (2001), robusta a outros tipos de dependência. Em nenhum dos testes foram encontradas diferenças significativas a 5% ou 1%. O p-valor médio individual foi de 55,5%, sendo que o menor p-valor individual encontrado foi de 4,1%, o qual é substancialmente superior aos valores críticos estimados pelas metodologias de comparação múltipla, mostrando baixa significância das diferenças. A aplicação das metodologias de Bonferroni, de Benjamini & Hochberg e de Benjamini & Yekutieli resultaram em p-valores críticos gerais corrigidos (*corrected overall critical p-values*) de 0,07%, 0,14% e 0,03%, respectivamente, todos para um nível de significância individual de 5,0%. Ou seja, o menor p-valor encontrado foi, respectivamente, 57,7 vezes, 28,8 vezes e 119,5 vezes o valor crítico necessário para rejeitar a hipótese nula de que a diferença entre os retornos ajustados e os amostrais é igual a zero, a um nível de significância de 5%. Os resultados desses testes indicam que, quase com certeza, não é possível rejeitar essa hipótese nula.

Tais resultados são coerentes com os obtidos por obtidos por Levy & Roll (2010) para o mercado dos Estados Unidos, utilizando a mesma metodologia, bem como com os obtidos por Nakamura (2000) para o mercado brasileiro, este último com base na metodologia GRS.

No caso dos desvios-padrão dos retornos (Tabela 3), observa-se que, para todas as ações, não foram necessários ajustes aos desvios-padrão dos retornos amostrais, ( $\sigma_i amostra$ ) para tornar a *proxy* para a carteira de mercado eficiente em termos de média-variância.

Tais resultados estão em linha com a ideia de que os desvios padrão históricos são uma boa estimativa dos desvios padrão esperados, ou seja, do risco esperado, e que os retornos históricos de ativos individuais tendem a ser uma estimativa menos precisa dos retornos futuros.

**Tabela 2**

Observações amostrais para os retornos ( $\mu_i^{amostra}$ ) e parâmetros mais próximos que tornam a *proxy* para a carteira de mercado eficiente em termos de média-variância ( $\mu_i^*$ )

i	Ação	$\mu_i$ amostra	$\mu_i^*$	$\mu_i$ amostra - $\mu_i^*$	$\sigma_i$ amostra	$(\mu_i \text{ amostra} - \mu_i^*)$ $\sigma_i$ amostra
1	AMBV4	2,5%	2,0%	0,5%	7,0%	0,07
2	BBDC4	2,4%	2,2%	0,2%	8,7%	0,02
3	BRAP4	2,6%	2,3%	0,3%	10,8%	0,03
4	BBAS3	2,7%	2,3%	0,4%	10,3%	0,04
5	BRKM5	2,4%	2,2%	0,3%	14,3%	0,02
6	CCRO3	3,9%	2,1%	1,8%	9,7%	0,19*
7	CMIG4	2,2%	2,1%	0,2%	8,7%	0,02
8	CPLE6	1,5%	2,0%	-0,5%	8,9%	-0,06
9	ELET3	0,8%	2,1%	-1,4%	12,2%	-0,11
10	ELET6	1,0%	2,1%	-1,1%	11,2%	-0,10
11	EMBR3	0,8%	2,1%	-1,3%	10,5%	-0,12
12	GGBR4	2,5%	2,3%	0,2%	11,4%	0,02
13	GOAU4	2,7%	2,3%	0,4%	11,0%	0,04
14	ITSA4	2,4%	2,2%	0,2%	8,2%	0,03
15	ITUB4	2,0%	2,2%	-0,2%	8,4%	-0,02
16	KLBN4	2,9%	2,1%	0,8%	9,5%	0,08
17	LIGT3	1,4%	2,1%	-0,7%	13,0%	-0,05
18	LAME4	3,7%	2,3%	1,4%	12,0%	0,12
19	OIBR3	1,0%	2,0%	-1,0%	11,0%	-0,09
20	OIBR4	0,9%	2,0%	-1,2%	9,4%	-0,13
21	PCAR4	1,5%	2,0%	-0,6%	8,7%	-0,06
22	PETR3	1,7%	2,3%	-0,6%	9,4%	-0,06
23	PETR4	1,8%	2,3%	-0,5%	9,3%	-0,05
24	RSID3	2,8%	2,3%	0,5%	20,0%	0,02
25	SBSP3	2,5%	2,1%	0,4%	9,1%	0,05
26	CSNA3	2,7%	2,3%	0,4%	11,6%	0,03
27	CRUZ3	2,7%	2,0%	0,7%	7,4%	0,10
28	SUZB5	1,4%	2,2%	-0,9%	11,3%	-0,08
29	VIVT4	1,5%	1,9%	-0,4%	6,6%	-0,06
30	TIMP3	2,1%	2,1%	0,0%	13,8%	0,00
31	TRPL4	2,6%	2,0%	0,6%	8,9%	0,06
32	USIM3	3,3%	2,4%	1,0%	14,3%	0,07
33	USIM5	3,1%	2,4%	0,7%	13,4%	0,05
34	VALE3	2,0%	2,3%	-0,3%	9,6%	-0,03
35	VALE5	2,0%	2,2%	-0,2%	9,2%	-0,03

\* Significativo a 1%.

\*\* Significativo a 1%.

**Tabela 3**

Observações amostrais para os desvios padrão dos retornos e parâmetros mais próximos que tornam a *proxy* de mercado eficiente em termos de média-variância

i	Ação	$\sigma_i$ amostra	$\sigma_i^*$	$\sigma_i$ amostra - $\sigma_i^*$	$\sigma_i$ Obs/Ótimo -1
s1	AMBV4	7,0%	7,0%	0,0%	0,0%
s2	BBDC4	8,7%	8,7%	0,0%	0,0%
s3	BRAP4	10,8%	10,9%	0,0%	0,0%
s4	BBAS3	10,3%	10,3%	0,0%	0,0%
s5	BRKM5	14,3%	14,3%	0,0%	0,0%
s6	CCRO3	9,7%	9,7%	0,0%	0,0%
s7	CMIG4	8,7%	8,7%	0,0%	0,0%
s8	CPLE6	8,9%	8,9%	0,0%	0,0%
s9	ELET3	12,2%	12,2%	0,0%	0,0%
s10	ELET6	11,2%	11,2%	0,0%	0,0%
s11	EMBR3	10,5%	10,5%	0,0%	0,0%
s12	GGBR4	11,4%	11,4%	0,0%	0,0%
s13	GOAU4	11,0%	11,0%	0,0%	0,0%
s14	ITSA4	8,2%	8,2%	0,0%	0,0%
s15	ITUB4	8,4%	8,4%	0,0%	0,0%
s16	KLBN4	9,5%	9,5%	0,0%	0,0%
s17	LIGT3	13,0%	13,0%	0,0%	0,0%
s18	LAME4	12,0%	12,0%	0,0%	0,0%
s19	OIBR3	11,0%	11,0%	0,0%	0,0%
s20	OIBR4	9,4%	9,4%	0,0%	0,0%
s21	PCAR4	8,7%	8,7%	0,0%	0,0%
s22	PETR3	9,4%	9,4%	0,0%	0,0%
s23	PETR4	9,3%	9,3%	0,0%	0,0%
s24	RSID3	20,0%	20,0%	0,0%	0,0%
s25	SBSP3	9,1%	9,1%	0,0%	0,0%
s26	CSNA3	11,6%	11,6%	0,0%	0,0%
s27	CRUZ3	7,4%	7,4%	0,0%	0,0%
s28	SUZB5	11,3%	11,3%	0,0%	0,0%
s29	VIVT4	6,6%	6,6%	0,0%	0,0%
s30	TIMP3	13,8%	13,8%	0,0%	0,0%
s31	TRPL4	8,9%	8,9%	0,0%	0,0%
s32	USIM3	14,3%	14,3%	0,0%	0,0%
s33	USIM5	13,4%	13,4%	0,0%	0,0%
s34	VALE3	9,6%	9,6%	0,0%	0,0%
s35	VALE5	9,2%	9,2%	0,0%	0,0%

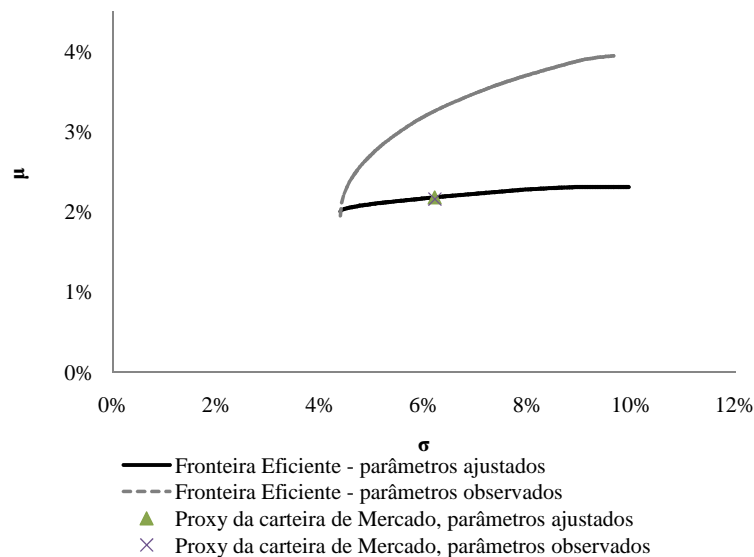
## 4.2 Fronteira eficiente

Conforme mostra a Figura 1, a mudança nos parâmetros amostrais causou movimento na fronteira eficiente e movimento pouco relevante no retorno esperado e desvio padrão dos retornos esperados da *proxy* da carteira de mercado, resultados em linha com os obtidos por Levy & Roll (2010).

Nota-se que mudanças não significativas nos parâmetros amostrais resultam em movimento substancial da fronteira eficiente no plano de média-variância, o que pode levar à rejeição indevida do CAPM. Tal movimento ocorre porque, com retornos *ex-post*, a fronteira eficiente tende a ser com-

posta por poucos ativos, os quais apresentaram retornos anormalmente altos e/ou riscos anormalmente baixos no período, provavelmente por motivos específicos e não esperados. Com a correção dos retornos esperados com base no risco, a fronteira eficiente passa a conter carteiras mais equilibradas, inclusive a carteira de mercado, substancialmente diferentes das carteiras atípicas formadas *ex-post*.

A *proxy* da carteira de mercado com os parâmetros ajustados está sobre a fronteira eficiente. Além disso, está próxima da *proxy* da carteira de mercado estimada com base nos dados amostrais.



**Figura 1**

Fronteiras eficientes e *proxy* da carteira de mercado no plano média-variância

### 4.3 Sumário dos resultados para as demais amostras

Como teste de robustez, as análises foram realizadas também considerando ações não pertencentes ao Ibovespa, bem como em dois subperíodos. A utilização de um número maior de ativos torna o teste mais ácido, tendo em vista que a fronteira eficiente torna-se necessariamente mais eficiente com a adição de ativos, enquanto a carteira de mercado tende a mover-se pouco, dado que é ponderada por valor e as ações de maior peso já estão incluídas nas análises com menos ativos. De fato, foram comparados os re-



sultados para 35 ativos (ações Ibovespa, período completo) com os para 87 ativos (todas as ações, período completo). A distância média entre as duas fronteiras eficientes é aproximadamente quatro vezes maior que a distância entre as *proxies* para a carteira de mercado.

No caso da Amostra 2, a qual inclui todas as ações com séries de retornos completas entre 2003 e 2012, a diferença entre o retorno ajustado e o retorno amostral foi significativa a 1% em apenas uma ação. Para as amostras do primeiro subperíodo, com 92 ativos, e do segundo subperíodo, com 100 ativos, a diferença entre o retorno ajustado e o retorno amostral foi significativa a 5% para apenas um ativo e não foi significativa a 1% para qualquer dos ativos.

Em nenhum dos casos as diferenças foram significativas a 5% ou a 1% com base nos testes de Bonferroni, Benjamini & Hochberg ou Benjamini & Yekutieli.

**Tabela 4**

Diferenças significativas, conforme amostras e metodologias utilizadas

	Grau de significância	Amostras			
		1. Ações Ibovespa, período completo	2. Todas as ações, período completo	3. Todas as ações, primeiro subperíodo	4. Todas as ações, segundo subperíodo
Univariado	5%	1	1	1	1
Univariado	1%	0	1	0	0
Bonferroni	5%	0	0	0	0
Bonferroni	1%	0	0	0	0
Benjamini & Hochberg	5%	0	0	0	0
Benjamini & Hochberg	1%	0	0	0	0
Benjamini & Yekutieli	5%	0	0	0	0
Benjamini & Yekutieli	1%	0	0	0	0

#### 4.4 Bootstrap

Como teste adicional de robustez realizou-se um *bootstrap*, tendo em conta especificamente que os retornos podem não apresentar uma distribuição normal. Como primeiro passo, cria-se uma matriz de retornos mensais para cada ativo, com 120 linhas (número de períodos) em colunas (número de ativos). Tal matriz é criada com base nos retornos observados, ajustados para que a média dos retornos seja igual a  $\mu_i^*$  e o desvio padrão dos retornos seja igual a  $\sigma_i^*$ . Mais especificamente, considera-se, conforme Levy & Roll (2010), que o retorno ajustado do ativo  $i$  no período  $t$ ,  $r_{i,t}^*$ , é uma transformação linear do retorno observado para o mesmo ativo, no mesmo período,  $r_{i,t}^{amostra}$ :

$$r_{i,t}^* = \mu_i^* - \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^{amostra}} \times \mu_i^{amostra} + \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^{amostra}} \times r_{i,t}^{amostra} \quad (3)$$

No caso específico deste estudo, como, em geral,  $\sigma_i^* = \sigma_i^{amostra}$ , tem-se:

$$r_{i,t}^* = \mu_i^* - \mu_i^{amostra} + r_{i,t}^{amostra} \quad (4)$$

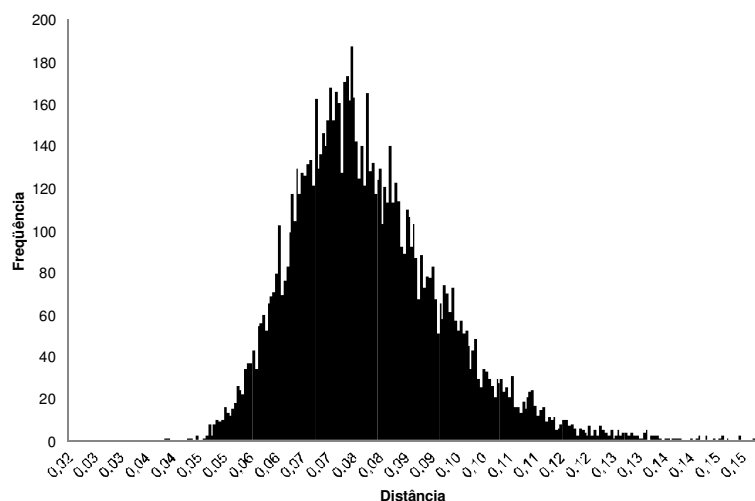
Após criação da matriz de retornos ajustados, criam-se 10.000 novas matrizes de retorno, com base em sorteios aleatórios e com reposição de linhas da matriz original, mantendo a consistência entre os retornos de diferentes ativos no mesmo período e considerando independência temporal dos retornos.

Calcula-se, então, a distância entre os parâmetros resultantes das matrizes sorteadas,  $\sigma_i^{sorteio}$  e  $\mu_i^{sorteio}$ , e os parâmetros ótimos,  $\sigma_i^*$  e  $\mu_i^*$ :

$$D((\mu^*, \sigma^*), (\mu^{sorteio}, \sigma^{sorteio})) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_i^{sorteio} - \mu_i^{amostra})^2 + \sum_{i=1}^n (\sigma_i^{sorteio} - \sigma_i^{amostra})^2} \quad (5)$$

A distância entre os parâmetros das matrizes sorteadas e os parâmetros ajustados é então comparada com a distância entre os parâmetros ajustados e os parâmetros amostrais.

Conforme mostra a Figura 2, em praticamente todos os sorteios, ou seja, 9.996 de 10.000, a distância entre os parâmetros ajustados e os parâmetros sorteados é superior à distância entre os parâmetros ajustados e os parâmetros amostrais, a qual é igual a 0,04.



**Figura 2**  
Resultados do *bootstrap*

Tais simulações mostram que a distância entre os parâmetros ajustados e os parâmetros amostrais é pequena e não significativa, reforçando a robustez dos resultados obtidos.

## 5. Conclusão

Este estudo testou a eficiência de diferentes *proxies* para carteira de mercado brasileira compostas por ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, encontrando as mínimas variações possíveis nos retornos e desvios-padrão dos retornos amostrais que tornam as referidas *proxies* eficientes em termos de média-variância.

Conclui-se que variações não significativas nos parâmetros amostrais são capazes de tornar as *proxies* para as carteiras de mercado eficientes em termos de média-variância, indicando que não é possível rejeitar a validade do CAPM no mercado acionário brasileiro. Os resultados estão em linha com Levy & Roll (2010), o qual utiliza a mesma metodologia para o mercado dos EUA, e com Nakamura (2000), que aplica a metodologia GRS no Brasil.

Por outro lado, contradizem estudos baseados em outras metodologias, principalmente (i) aqueles que testam diferenças no plano média-variância entre índices que atuam como *proxies* para a carteira de mercado e carteiras

de máxima eficiência calculadas, como Hagler & Brito (2007), e (ii) aqueles que testam outros fatores explicativos para os retornos, como Bruni & Famá (1998) e Machado & Medeiros (2011).

Há dois argumentos para a referida contradição. Primeiro, os trabalhos que testam diretamente o CAPM (Nakamura, 2000, Hagler & Brito, 2007) chegam a resultados conflitantes no Brasil. Segundo, os fatores adicionais ao de mercado trazem acréscimos limitados ao poder explicativo do CAPM. De fato, os resultados de Machado & Medeiros (2011) mostram que a utilização dos três fatores de Fama & French (1993) aumenta o poder explicativo do CAPM no Brasil, medido com base no  $R^2$ , em apenas 7,0 pontos percentuais. Eles mostram que as adições do quarto fator, o momento de mercado de Carhart, e do quinto fator, a liquidez, tampouco aumentaram de forma substancial o poder explicativo. Enquanto o modelo de um fator (CAPM) apresentou um  $R^2$  médio de 75,7%, o modelo de 5 fatores apresentou um  $R^2$  médio de 84,2%.

Uma limitação deste estudo é que, apesar de os resultados permitirem rejeitar as críticas ao CAPM, não são suficientes para confirmar a validade empírica do modelo. O estudo não testa, por exemplo, a hipótese de que não há outros fatores, além dos retornos da carteira de mercado, capazes de explicar os retornos dos ativos.

Os resultados indicam também que as dificuldades na aplicação do CAPM vêm da imprecisão na estimação dos parâmetros, principalmente dos retornos esperados. A utilização das médias dos retornos históricos pode incorporar resultados de eventos específicos ou atípicos, distorcendo os retornos esperados. Desta forma, a fronteira eficiente estimada com base em retornos históricos tende a conter grande participação de ativos que apresentaram retornos anormalmente altos no passado, os quais dificilmente se repetirão. A fronteira eficiente torna-se, portanto, pouco realista, com pontos anormalmente altos no plano média-variância.

Por motivos similares, estudos que testam o CAPM com base em retornos históricos e na distância entre a *proxy* da carteira de mercado e a fronteira eficiente podem rejeitar o modelo de forma equivocada. Conforme demonstrado neste estudo, variações não significativas nos retornos estimados resultam em fronteiras eficientes relativamente distantes, fazendo com que a *proxy* da carteira de mercado pareça ineficiente. Os resultados refutam a alegação de inconsistência do CAPM no Brasil baseada na distância entre a carteira de mercado e a fronteira eficiente. Adicionalmente, e em linha com a prática, os resultados indicam que a utilização dos

desviospadrão dos retornos históricos como estimativa do risco esperado é confiável – não foram necessários ajustes aos desviospadrão históricos para tornar as *proxies* para a carteira de mercado eficientes em termos de média-variância.

Como sugestão para estudos posteriores, pode-se aplicar a mesma metodologia a carteiras internacionalmente diversificadas e em períodos históricos mais extensos, chegando a *proxies* mais precisas para a carteira de mercado e permitindo resultados e conclusões mais abrangentes. Também é possível expandir a composição das *proxies* para a carteira de mercado para incluir retornos de outras classes de ativos, como imóveis e títulos de renda fixa com risco. Pode-se também incluir uma estimativa para ações de empresas de capital fechado, com base na variação de seus resultados e dos múltiplos coletados de transações de fusões e aquisições. Com isso, se testaria uma carteira de mercado mais próxima à originalmente proposta pelo CAPM, contribuindo para dirimir a crítica de Roll (1977), aprofundada, dentre outros, por Stambaugh (1982) e Roll & Ross (1994).

## Referências

- Almeida, Juliano R., & Eid Jr., William. 2010. Estimando O Retorno Das Ações Com Decomposição Do Índice Book-to-Market: Evidências Na Bovespa. *Revista Brasileira de Finanças*, **8**, 417–441.
- Banz, Rolf W. 1981. The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks. *Journal of Financial Economics*, **9**, 3–18.
- Basu, Sanjoy. 1977. Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis. *The Journal of Finance*, **32**, 663–682.
- Benjamini, Yoav, & Hochberg, Yosef. 1995. Controlling the False Discovery Rate: A Practical and Powerful Approach to Multiple Testing. *Journal of the Royal Statistical Society*, **57**, 289–300.
- Benjamini, Yoav, & Yekutieli, Daniel. 2001. The Control of the False Discovery Rate in Multiple Testing under Dependency. *Annals of statistics*, **29**, 1165–1188.
- Bonferroni, Carlo E. 1935. Il Calcolo Delle Assicurazioni Su Gruppi Di Teste. *Onore del Professore Salvatore Ortu Carboni*, 13–60.

- Bruner, Robert F., Eades, Kenneth M., Harris, Robert S., & Higgins, Robert C. 1998. Best Practices in Estimating the Cost of Capital: Survey and Synthesis. *Financial Practice and Education*, **8**, 13–28.
- Bruni, Adriano L., & Famá, Rubens. 1998. *Mercados Eficientes, CAPM e Anomalias: Uma Análise Das Ações Negociadas Na Bovespa (1988-1996)*. In SEMEAD.
- Carhart, Mark M. 1997. On Persistence in Mutual Fund Performance. *The Journal of Finance*, **52**, 57–82.
- Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, **47**, 427–465.
- Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 1993. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*, **33**, 3–56.
- Fama, Eugene F., & MacBeth, James D. 1973. Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests. *The Journal of Political Economy*, **81**, 607–636.
- Garran, Felipe T. 2007. *Metodologias Em Uso No Brasil Para a Determinação Do Custo de Capital Próprio Para Avaliação de Ativos Por Fluxo de Caixa Descontado*. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo.
- Gibbons, Michael R. 1982. Multivariate Tests of Financial Models. *Journal of Financial Economics*, **10**, 3–27.
- Gibbons, Michael R., Ross, Stephen A., & Shanken, Jay. 1989. A Test of the Efficiency of a Given Portfolio. *Econometrica*, **57**, 1121–1152.
- Hagler, Cristina E. M., & Brito, Ricardo D. de O. 2007. Sobre a Eficiência Dos Índices de Ações Brasileiros. *RAUSP*, **42**, 74–85.
- Jobson, J. Dave, & Korkie, Bob. 1982. Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency. *Journal of Financial Economics*, **10**, 433–466.
- Levy, Moshe, & Roll, Richard. 2010. The Market Portfolio May Be Mean / Variance Efficient After All. *The Review of Financial Studies*, **23**, 2462–2491.

- Lintner, John. 1965. Security Prices, Risks and Maximal Gains from Diversification. *The Journal of Finance*, **XX**, 587–615.
- Machado, André V., & Medeiros, Otávio R. 2011. Modelos de Precificação de Ativos e O Efeito Liquidez: Evidências Empíricas No Mercado Acionário Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, **9**, 383–412.
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77–91.
- Nakamura, Wilson T. 2000. Estudo Empírico Sobre a Eficiência Da Carteira Teórica Do Índice BOVESPA. *Revista de Administração Mackenzie*, **1**, 67–81.
- Paiva, Felipe D. 2005. Modelos de Precificação de Ativos Financeiros de Fator Único?: Um Teste Empírico Dos Modelos CAPM e D-CAPM. *Caderno de Pesquisas em Administração*, **12**, 49–65.
- Roll, Richard. 1977. A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics*, **4**, 129–176.
- Roll, Richard, & Ross, Stephen A. 1994. On the Cross-Sectional Relation Between Expected Returns and Betas. *The Journal of Finance*, **49**, 101–121.
- Shanken, Jay. 1985. Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM. *Journal of Financial Economics*, **14**, 327–348.
- Sharpe, William F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, **19**, 425–442.
- Sharpe, William F. 1966. Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, **39**, 119–138.
- Sharpe, William F. 1998. The Sharpe Ratio. *Streetwise – The Best of the Journal of Portfolio Management*, 169–185.
- Stambaugh, Robert F. 1982. On the Exclusion of Assets from Tests of the Two-Parameter Model: A Sensitivity Analysis. *Journal of Financial Economics*, **10**, 237–268.
- Zhou, Guofu. 1991. Small Sample Tests of Portfolio Efficiency. *Journal of Financial Economics*, **30**, 165–191.