



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Riegel Sant'Anna, Leonardo; Filomena, Tiago Pascoal; Borenstein, Denis  
Index Tracking com Controle do Número de Ativos  
Revista Brasileira de Finanças, vol. 12, núm. 1, enero-marzo, 2014, pp. 89-119  
Sociedade Brasileira de Finanças  
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305830999005>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal

Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# ***Index Tracking* com Controle do Número de Ativos**

(Index Tracking with Control on the Number of Assets)

**Leonardo Riegel Sant'Anna\***

**Tiago Pascoal Filomena\*\***

**Denis Borenstein\*\*\***

## ***Resumo***

*Index tracking* é uma estratégia de investimento passiva, com objetivo de formar portfólios para reprodução do desempenho de um índice do mercado. Esse artigo apresenta uma proposta de modelagem de otimização de *index tracking* com controle do número de ativos na carteira, correspondente à restrição de custos de transação. O modelo é aplicado ao Ibovespa entre Jan/2009 e Jul/2012. Foram formadas carteiras sem limite de ativos e com limite de 40, 30 e 20 ativos, com rebalanceamento em 20, 40 e 60 períodos. Os resultados evidenciam a composição de carteiras estatisticamente significativas para acompanhar a rentabilidade do índice, especialmente para rebalanceamento de 60 períodos, com custos de transação mais baixos devido ao maior intervalo de rebalanceamento. Verificou-se também que alterações de parâmetros do *solver Cplex* não influenciaram os resultados, especialmente para tempo de solução. Assim, concluímos sobre a necessidade de aplicar métodos heurísticos para formação de carteiras com menos ativos.

**Palavras-chave:** *index tracking*; otimização de carteira; programação quadrática inteira.

**Códigos JEL:** C61; G11.

---

Submetido em 25 de agosto de 2013. Reformulado em 10 de março de 2014. Aceito em 28 de abril de 2014. Publicado on-line em 2 de junho de 2014. Editor responsável: Antonio Zoratto Sanvicente. Os autores reconhecem e agradecem o suporte financeiro por parte da FAPERGS (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul), com o auxílio número 0859-12-7.

\*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil. E-mail: lrsantanna@outlook.com

\*\*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil. E-mail: tpfilomena@ea.ufrgs.br

\*\*\*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil. E-mail: dborenstein@ea.ufrgs.br

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, Vol. 12, No. 1, March 2014, pp. 89–119  
ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2014 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license -  
<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

## Abstract

Index tracking is a passive investment strategy, which aims at generating portfolios to reproduce a specific market index's performance. This article proposes a model for a index tracking problem with control on the number of assets in the portfolio, which corresponds to a restriction in transaction costs. The model is applied to Ibovespa (sample: 67 stocks) from January/2009 to July/2012. Portfolios were formed without limiting the amount of stocks and limiting this amount to 40, 30 and 20 stocks, with rebalancing periods of 20, 40 and 60 trading days. The results were satisfactory especially for the 60 days rebalancing period, in which transaction costs become lower due to the longer rebalancing period. We also verified that changes in Cplex parameters didn't influence the results especially in relation to the computational times. Therefore, we also conclude about the need of using heuristic approaches to form portfolios with smaller amounts of assets.

**Keywords:** index tracking; portfolio optimization; quadratic integer programming.

## 1. Introdução

O início da Teoria Moderna de Portfólio ocorreu com Markowitz (1952), que propôs um modelo de média-variância para seleção de carteira. Nesse modelo, a variância dos retornos dos ativos é usada como medida de risco, e é feita a otimização do trade-off entre risco e retorno esperado. Com base na literatura de investimentos, verificamos que há basicamente dois tipos de fundos de investimentos: fundos de administração ativa e de administração passiva (Roll, 1992, Beasley *et al.*, 2003, Maringer & Oyewumi, 2007).

Fundos de administração ativa possuem, em geral, gestão mais flexível e maior quantidade de transações de compra e venda. Assim, tendem a apresentar custos maiores de gestão e de transações (pois têm maior volume de operações). Estratégias ativas assumem que os mercados são ineficientes e tentam explorar desequilíbrios resultantes desse fator.

Por outro lado, fundos de administração passiva têm gestão menos flexível e comumente seguem critérios previamente definidos, apresentando menores custos de gestão e de transações por ter menor volume de transações. Essa estratégia baseia-se na hipótese de que há eficiência nos mercados e que, no longo prazo, os rendimentos dos mercados não tendem a ser superados por fundos ativos, tendo como fundamento a teoria de mercados eficientes (Fama, 1970); por consequência, rendimentos de índices de referência dos mercados também não tendem a ser superados. Frino & Gallagher (2001), por exemplo, demonstram que investimentos em estratégias passivas apresentam, em média, desempenho superior do que investimen-

tos em estratégias ativas no longo prazo. Fama & French (2010) são outro exemplo de estudo que demonstra que fundos ativos têm tendência a apresentar rendimento abaixo do rendimento do mercado.

Fundos de *index tracking* (*index funds*, ou também fundos de índice) são uma forma de investimento passivo que visa replicar o rendimento de um índice de referência (por exemplo: Ibovespa). Através de Frino & Gallagher (2001) e Fama & French (2010), podemos entender a relevância de fundos passivos e da estratégia de *index tracking*, como forma de acompanhar o rendimento do mercado com custos reduzidos e desempenho que tende a ser superior a fundos ativos. O uso de *index tracking* pode ser feito, por exemplo, para formação de fundos de índices ou, também, para formação de ETFs (do inglês, *Exchange-Traded Funds*) – ativos que representam fundos de índice e que têm se popularizado no mercado brasileiro nos últimos anos (Borges *et al.*, 2012).

A primeira opção para se montar um *index fund* seria realizar uma réplica total do índice (compor um portfólio com os ativos que formam o índice e seus respectivos pesos). Porém, essa estratégia apresenta desvantagens como a atribuição de peso bastante baixo a alguns ativos e maiores custos de transação na medida em que a carteira é atualizada ao longo do tempo (Barro & Canestrelli, 2009, Canakgoz & Beasley, 2009).

Assim, os modelos de *index tracking* apresentam, entre outras restrições, a limitação da quantidade de ativos para compor a carteira, de forma a diminuir a quantidade de transações do portfólio e reduzir custos de transação e gestão. Neste estudo, buscamos apresentar um modelo de *index tracking* com otimização de programação quadrática inteira, similar ao proposto por Gaivoronski *et al.* (2005), de forma a replicar um índice com controle do número de ativos da carteira. O uso de Gaivoronski *et al.* (2005) como referência justifica-se por esse artigo ser um trabalho amplamente referenciado na literatura, com a apresentação de modelos com diferentes abordagens relacionadas ao tema, por exemplo, discutindo custos de transação e de rebalanceamento.

Conforme destacam Barro & Canestrelli (2009), com limitação da quantidade de ativos, dificilmente teremos a reprodução exata do índice; portanto, o modelo de otimização visa minimizar o erro (diferença) de *tracking* da carteira em relação ao índice (minimização do *tracking error*), ou seja, minimizar a diferença entre rendimento da carteira e rendimento do índice. Assim, o foco é minimizar o erro de *tracking* com restrição da quantidade de ativos do portfólio, o que representa uma limitação de custos

de transação e gestão. Nesse estudo, adotamos o erro de *tracking* de cada carteira otimizada como sendo a diferença entre o rendimento acumulado da carteira e o rendimento acumulado do índice no intervalo de tempo fora da amostra.

Trabalhos acadêmicos recentes sobre o assunto buscam, em sua maioria, solucionar o problema de *index tracking* com uso de heurísticas para formação de carteiras com quantidade bastante reduzida de ativos; nosso objetivo é verificar que mesmo carteiras com quantidade um pouco maior de ativos podem realizar satisfatoriamente o tracking do índice mantendo custos baixos (verificados através dos valores de turnover). Pretende-se demonstrar que, mesmo com uma técnica simples de solução, apoiada a um leve relaxamento no controle do número de ativos, pode-se obter uma abordagem eficiente de *index tracking* com controle de ativos sem o uso de técnicas numéricas mais complexas ou de heurísticas de difícil implementação e parametrização.

Para aplicação do modelo, adotamos o índice Ibovespa (índice de referência do mercado brasileiro), para o período de Janeiro/2009 a Julho/2012, com um total de 890 observações diárias. Foram realizados testes para formar quatro tipos de carteiras: sem limite de quantidade de ativos e com limites de 40, 30 e 20 ativos. Os períodos de rebalanceamento adotados são 20, 40 e 60 observações diárias (ou seja, rebalanceamento mensal, bimestral e trimestral).

Pelos testes realizados, constatou-se a eficiência dessa estratégia especialmente em termos de custos. Contudo, na medida em que reduzimos a quantidade de ativos da carteira, os tempos de solução crescem de forma exponencial, de modo que não conseguimos formar carteiras com menos de 20 ativos. Porém, para carteiras de 20 ou mais ativos (especialmente para rebalanceamento trimestral), temos soluções satisfatórias em termos de custo (com baixos valores de *turnover* médios mensais), tempos de solução e estatísticas que apontam forte correlação das carteiras formadas com o índice.

Para realização dos testes, utilizamos o solver de otimização *Cplex* (que consiste em um software de otimização usado para solução de problemas numéricos de pesquisa operacional), por ser um dos solvers mais utilizados comercialmente. Com a realização de testes complementares, constatamos que alterações de parâmetros de configuração do *Cplex* não influenciaram os resultados obtidos para esse modelo de otimização. Nestes testes, obtivemos variações bastante pequenas nos resultados, especialmente nos tempos

de solução, o que demonstra a robustez do método aplicado.

O artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 destaca uma revisão bibliográfica sobre o problema de *index tracking*, apresentando diversos métodos de solução tratados na literatura; a seção 3 apresenta o modelo adotado nesse estudo; a seção 4 apresenta os resultados obtidos; e a seção 5 apresenta as principais conclusões.

## 2. Revisão da Literatura

O problema de *index tracking* é representado na literatura contemporânea com modelos que empregam diferentes métodos de solução. Analisando-se alguns desses artigos recentes, podemos agrupá-los por métodos de solução similares como, por exemplo, uso de métodos heurísticos (Beasley *et al.*, 2003, Oh *et al.*, 2005, Maringer & Oyewumi, 2007, Jeurissen & Van Den Berg, 2008, Krink *et al.*, 2009, Guastaroba & Speranza, 2012, Scozzari *et al.*, 2012), uso de cointegração (Dunis & Ho, 2005, Caldeira & Portugal, 2010) e uso de programação quadrática (Jansen & Van Dijk, 2002, Coleman *et al.*, 2006, Yao *et al.*, 2006).

Gaivoronski *et al.* (2005) discutem diferentes abordagens do problema de *index tracking*, realizando otimização apenas usando um *solver* e, também, aplicando métodos heurísticos.

Esses autores usam restrições relativas à análise de risco do portfólio, rebalanceamento das carteiras (portfólios dinâmicos) e restrição de custos de transação. Entre as principais conclusões, é verificado que o erro de *tracking* tende a ser melhor com uso de amostras maiores para a otimização (maiores amostras *in-sample*); além disso, o desempenho das carteiras também é influenciado pela quantidade de ativos da carteira e pela forma de realização de rebalanceamentos. Por ser um dos estudos mais referenciados na literatura de *index tracking*, optamos por adotar esse artigo como referência para elaboração de nosso modelo de otimização.

Outro tipo de abordagem do problema de *index tracking* envolve uso de cointegração (Dunis & Ho, 2005, Caldeira & Portugal, 2010). Dunis & Ho (2005) utilizam esse método com a justificativa de que ele incorpora “comovimentos” de longo prazo nos preços dos ativos; dessa forma, há a tendência de formação de carteiras mais estáveis, exigindo menos operações de rebalanceamento e diminuindo os custos de transação. Os autores realizaram testes para diferentes intervalos de rebalanceamento, obtendo melhores resultados para rebalanceamento trimestral, com forte cointegração entre carteiras e índice. Caldeira & Portugal (2010) também

utilizam cointegração como forma de se obter carteiras mais estáveis, pois, conforme os autores, esse método permite a percepção de tendências estocásticas nas séries de preços das ações, exigindo menos rebalanceamentos.

Jansen & Van Dijk (2002), Coleman *et al.* (2006) fazem uso direto de programação quadrática para *index tracking* com reduzido número de ativos, porém sem uso de restrição inteira para controlar o tamanho das carteiras. Como os autores afirmam, esse problema possui complexidade computacional NP-Hard, o que significa que o tempo de processamento é elevado para formação de carteiras reduzidas. Como solução, são formadas carteiras reduzidas com um método que consiste na realização de diversas otimizações em sequência, com diminuição gradual da amostra de ativos. Assim, os autores eliminam a restrição inteira para obter soluções mais rapidamente. De forma similar, Yao *et al.* (2006) também usam programação quadrática sem inclusão de restrição inteira para limitação do tamanho da carteira; no caso desses autores, a definição dos ativos da carteira de *index tracking* é exógena, feita antes da otimização do modelo.

Quanto ao uso de métodos heurísticos na literatura contemporânea sobre *index tracking*, é recorrente a adoção das chamadas heurísticas de evolução diferencial e algoritmos genéticos, baseando-se em conceitos de teoria evolutiva advinda do campo da biologia. Dois trabalhos bastante referenciados sobre esse assunto são Beasley *et al.* (2003) e Oh *et al.* (2005). Ambos os artigos apresentam modelagens que incluem restrições de custos de transação e de rebalanceamento. Porém, o objetivo, nesses artigos, é a formação de carteiras de número bastante reduzido de ativos, proporcionalmente ao tamanho das amostras. No caso de Beasley *et al.* (2003), o objetivo é a formação de carteiras de 10 ativos com amostras de até 225 ativos – diferentemente do presente artigo, em que buscamos formar carteiras de tamanho superior com uma amostra menor.

Maringer & Oyewumi (2007) e Scozzari *et al.* (2012) também aplicam modelagens de programação quadrática e inteira, com controle da quantidade de ativos e também do peso máximo de ativos em cada carteira. Para solução, ambos os artigos usam heurísticas de evolução diferencial, devido ao uso de uma quantidade maior de restrições e o emprego de restrição inteira para formação de carteiras reduzidas. Os testes realizados permitiram verificar a tendência de se obter menores erros de *tracking* com aumento da quantidade de ativos da carteira, sendo que essa melhora no erro é decrescente na medida em que se aumenta a quantidade de ativos. Da

mesma forma, Guastaroba & Speranza (2012) propõem uma formulação integrada com programação linear e inteira e uma heurística de evolução diferencial denominada KernelSearch para solução do modelo. Nos testes, foram utilizados oito índices com amostras de até 2.151 ativos e formação de carteiras com no máximo 90 ativos; assim, nota-se novamente a necessidade de um método heurístico para formação de carteiras reduzidas proporcionalmente ao tamanho da amostra.

Em suma, a análise descrita acima de diversos artigos demonstra que diversos métodos podem ser utilizados para o problema de *index tracking*. Porém, essencialmente, a literatura contemporânea trata desse problema para formação de carteiras de número bastante reduzido de ativos. Por exemplo, no caso de Guastaroba & Speranza (2012), são formadas carteiras de 90 ativos para uma amostra de 2.151 ativos, ou seja, carteiras com aproximadamente 4,2% dos ativos da amostra; em Beasley *et al.* (2003), são formadas carteiras de 10 ativos a partir de uma amostra de 225 ativos, ou seja, carteiras com cerca de 4,4% dos ativos da amostra.

Todos os artigos analisados apresentam resultados satisfatórios em termos de realização de tracking de um índice. Porém, possuem foco diferente do presente artigo, em que buscamos formar carteiras de 20 ou mais ativos a partir de uma amostra de 67 ativos (são carteiras com ao menos 30% dos ativos da amostra). Nosso objetivo, portanto, é verificar que mesmo carteiras de tamanho um pouco maior podem apresentar bons resultados em termos de *tracking* ao mesmo tempo em que têm custos reduzidos, podendo-se obter soluções de forma mais simples em relação à aplicação de métodos heurísticos. Além disto, trata-se do primeiro trabalho que aplica programação matemática para análise de *index tracking* ao Ibovespa.

A revisão realizada permite antecipar alguns dos resultados do presente artigo; acompanhando Gaivoronski *et al.* (2005), espera-se que os resultados obtidos demonstrem que o erro de tracking tende a aumentar conforme o tamanho das carteiras é diminuído e, também, conforme aumenta-se o período de rebalanceamento. Com base em Jansen & Van Dijk (2002) e Coleman *et al.* (2006), espera-se que, com a diminuição gradual das carteiras otimizadas, torne-se bastante difícil a solução do modelo através de uso direto de um *solver* de otimização, considerando que nosso modelo foi empregado com uso de restrição inteira e, portanto, constitui-se num modelo de complexidade computacional NP-Hard.

### 3. Formulação

O problema de *index tracking* possui um espaço de solução bastante largo, de crescimento exponencial. Por exemplo, no caso de realizarmos *tracking* do índice Ibovespa (composto por 69 ativos) com uma carteira de 20 ativos, a quantidade de portfólios que podem ser formados é  $69!/(20! * 49!) = 1,156 * 10^{17}$ . Por esse motivo, diversos autores utilizam heurísticas para a solução do problema para carteiras com baixa quantidade de ativos (por exemplo, 05 ou 10 ativos no caso do Ibovespa). A alta complexidade aponta para dificuldade de se obter soluções ótimas (ou próximas das soluções ótimas) devido ao tempo computacional necessário para otimização.

Para demonstrar o modo como o problema foi formulado e aplicado, apresenta-se inicialmente o modelo de otimização (item 3.1). Posteriormente, demonstra-se a forma de seleção e organização dos dados para aplicação do modelo (item 3.2). Para formulação e desenvolvimento do modelo, a seguinte notação é empregada:

- $x_i$  = variável de peso do ativo  $i$  na carteira, sendo  $0 \leq x \leq 1$ ;
- $z_i$  = variável binária para cada ativo  $i$ ;
- $r_{i,t}$  = parâmetro: retorno do ativo  $i$  no momento de tempo  $t$ ;
- $R_t$  = parâmetro: retorno do índice no momento  $t$ ;
- $t$  = momento de tempo;
- $T$  = parâmetro: total de momentos de tempo;
- $N$  = parâmetro: quantidade de ativos da amostra;
- $K$  = parâmetro: quantidade limite de ativos na carteira;
- $\vartheta$  = parâmetro: limite mínimo de erro entre carteira e índice em cada  $t$ ;
- $\theta$  = parâmetro: limite máximo de erro entre carteira e índice em cada  $t$ .

### 3.1 Modelo de otimização

O modelo de otimização utilizado nesse artigo foi elaborado com base na função objetivo apresentada em Gaivoronski *et al.* (2005). Nesse modelo, tem-se a definição de duas variáveis de decisão ( $x_i$  e  $z_i$ ), e a função objetivo busca minimizar a variância da diferença entre retorno do portfólio e do índice, conforme abaixo:

$$\text{Minimizar : } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \left( \sum_{i=1}^N x_i \cdot r_{i,t} \right) - R_t \right]^2 \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^N (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \geq \vartheta, \forall t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i \cdot r_{i,t}) - R_t \leq \theta, \forall t \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K \quad (5)$$

$$x_i \leq z_i, \forall i \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \forall i \quad (7)$$

$$z_i = 0; 1, \forall i \quad (8)$$

O objetivo do modelo é minimizar o *tracking error* da carteira em relação ao índice. O retorno do índice em cada momento ( $R_t$ ) é calculado a partir do valor médio do índice Ibovespa nos momentos  $t$  e  $t - 1$ ; da mesma forma, o retorno de cada ativo em cada momento de tempo ( $r_{i,t}$ ) é calculado a partir do preço médio de cada ativo, conforme abaixo:

$$R_t = \frac{\text{índice\_médio}_t}{\text{índice\_médio}_{t-1}} - 1 \quad r_{i,t} = \frac{\text{preço\_médio}_{i,t}}{\text{preço\_médio}_{i,t-1}} - 1$$

As restrições (2) e (3) limitam a diferença de rendimento entre carteira e índice a um valor mínimo e a um valor máximo de erro – constantes  $\vartheta$  e  $\theta$  provenientes definidas – para cada momento  $t$ . A restrição (4) estabelece que 100% do valor disponível é aplicado nos ativos. As restrições (5) e (6), em conjunto, definem a limitação da quantidade de ativos que podem ser alocados na carteira (quantidade definida pela constante  $K$ ). As restrições (7) e (8) definem a faixa de valores das variáveis de decisão (sendo que  $z_i$  é binária com valor 1 se o ativo  $i$  é incluído na carteira e valor 0 caso contrário).

### 3.2 Base de dados e descrição do problema

Para aplicação do modelo, conforme já citado, foi utilizado o índice Ibovespa. Os ativos selecionados foram os 67 ativos componentes do Ibovespa no período de maio/2012 a agosto/2012 – considerando que o índice possui 69 ativos; porém, dois ativos foram retirados por falta de dados no período (ativos excluídos: ALLL3 e OIBR3). Foram formadas carteiras sem limite de quantidade de ativos e carteiras limitadas a 40, 30 e 20 ativos. Conforme será detalhado, não foi possível formar carteiras com menos de 20 ativos devido à dificuldade com o tempo de solução.

Adotamos, para a constante  $T$ , o valor de 150 (amostra *in-sample*), correspondente a 150 observações diárias. Trata-se de um período relativamente longo, entre sete e oito meses, pois cada mês possui aproximadamente 20 dias úteis. Assim, tentamos seguir a proposta de Gaivoronski *et al.* (2005) sobre o uso de períodos *in-sample* mais longos por apresentarem tendência a gerar carteiras mais estáveis; o uso de  $T = 150$  implica que, para cada execução do modelo de otimização, usamos os históricos de retornos diários das ações nos 150 períodos de tempo anteriores (ou seja, retornos nos 150 dias úteis anteriores). Cada carteira formada com a otimização (usando o histórico de 150 dias úteis anteriores) é projetada sobre os retornos de  $n$  períodos de tempo subsequentes (neste estudo, adotamos  $n$  igual a 20, 40 ou 60, o que representa, respectivamente, rebalanceamento mensal, bimestral e trimestral das carteiras). Ou seja, para formarmos a primeira carteira de investimento para  $n = 60$ , por exemplo, utilizamos intervalo de dados *in-sample* de  $1 \leq t \leq 150$ , e o portfólio formado é projetado sobre os retornos no intervalo de tempo  $150 \leq t \leq 210$  (intervalo *out-of-sample* para projeção dos resultados em *rolling horizon*). A segunda carteira é formada com dados de  $61 \leq t \leq 210$ , e a projeção é feita em  $210 \leq t \leq 270$ , e assim sucessivamente.

A base de dados adotada é composta pelos preços médios diários dos ativos para o intervalo de 13/jan/2009 e 14/jul/2012 (obtidos através do sistema Economatica). Temos dessa forma 890 momentos de tempo (observações diárias de preços dos ativos). Considerando o intervalo de tempo da amostra adotada, podemos formar um total de 36 carteiras em sequência se optarmos por rebalanceamento mensal, ou seja,  $n = 20$ ; já com uso de rebalanceamento bimestral,  $n = 40$ , podemos formar 18 carteiras em sequência; e, para rebalanceamento trimestral,  $n = 60$ , podemos formar 12 carteiras no total. Os valores dos parâmetros  $\vartheta$  e  $\theta$  foram definidos individualmente para cada carteira formada; foram adotados sempre valores iguais em módulo, alterando apenas o sinal (ex.  $\vartheta = -0,002$  e  $\theta = 0,002$ , buscando-se formar o menor intervalo possível entre esses dois parâmetros para que o modelo tenha solução. Nos testes realizados,  $\vartheta$  oscila entre  $-0,0015$  e  $0,0065$ , e  $\theta$  oscila entre  $0,0015$  e  $0,0065$ .

#### 4. Resultados

Para solução do modelo proposto, adotou-se a linguagem de programação AMPL, com uso do pacote de otimização *Cplex*. Os testes computacionais foram realizados em computador com processador Intel® Core™ i5-2310 @ 2.90 GHz, 8GB RAM DDR3 e Windows® 7. Adotamos o *solverCplex* por se tratar de um dos pacotes de otimização mais difundidos e utilizados comercialmente, além de ser adequado para programação quadrática e inteira.

Estabelecemos, ao executar cada uma das otimizações (otimização de cada carteira via *Cplex*), tempo limite de execução do solver de 3.600 segundos, com meta de se obter *gap* máximo de 5% para cada carteira, considerando que este é o percentual padrão utilizado pela literatura sobre otimização de carteiras (conforme feito, por exemplo, em Filomena & Lejeune (2014)). O *gap* de resposta corresponde à diferença percentual entre a solução obtida e a solução ótima estimada (isto é, o *gap* refere-se à tolerância da resposta obtida em relação à otimalidade; com *gap* de 5%, temos 95% de confiança de que a resposta obtida é a resposta ótima –o cálculo deste *gap* trata-se de uma estimativa feita pelo *Cplex* com base na diferença entre *lower bound* e *upper bound* que são obtidos durante a solução do problema de otimização).

A seguir, apresentamos os resultados dos testes realizados para solução do modelo de otimização (item 4.1); na sequência, apresentamos uma breve comparação entre os resultados aqui obtidos e um ETF atualmente disponí-

vel no mercado (seção 4.2), realizamos também uma breve discussão em uma comparação com resultados de outros artigos sobre *index tracking* (seção 4.3) e, então, descrevemos os testes e resultados com alteração de parâmetros do *solverCplex*, a fim de verificar se alterações no solver podem influenciar os resultados obtidos inicialmente (seção 4.4).

#### 4.1 Resultados

Os principais resultados são apresentados na Figura 1, com projeção das carteiras para intervalo *out-of-sample* de 60 períodos; Tabelas 1, 2, 3 e 4, com resumo dos principais resultados por tipo de carteira formada – sem limite de ativos e com limite de 40, 30 e 20 ativos; e Tabela 5, com estatísticas separadas por intervalo *out-of-sample*. Em relação à projeção das carteiras formadas ao longo do tempo, percebemos na Figura 1 que os resultados são satisfatórios, com as carteiras formadas realizando o *tracking* do índice de forma bastante consistente para rebalanceamento trimestral (sendo que a aderência é bastante similar para os casos de rebalanceamento mensal e bimestral).



**Figura 1**

Projeção de resultados das carteiras com intervalo *out-of-sample* de 60 períodos – rebalanceamento trimestral

Pode-se perceber a tendência de que as carteiras apresentem, em média, erro positivo em relação ao índice (ou seja, o rendimento médio das carteiras tende a ser superior ao rendimento do índice). Isso se deve à modelagem de otimização empregada; dessa forma, a curva do índice na figura permanece abaixo das curvas das carteiras. Essa tendência também é observada nas Tabelas 1 a 4, em que, para os quatro tipos de carteiras formadas, o *tracking error* médio permanece baixo, porém sempre positivo. Em todos os casos, o *tracking error* é crescente conforme aumenta a quantidade de períodos *out-of-sample* (aumento da volatilidade), o que é natural dado o maior intervalo de rebalanceamento. Vemos ainda esse movimento de erro positivo em relação ao índice na Tabela 5, em que o retorno médio das carteiras é sempre positivo, apesar de os retornos acumulados serem negativos nesse período de análise (exceto para o caso de projeção de 60 períodos com carteira de 30 ativos, em que o retorno acumulado é positivo, tendo, por consequência, maior erro de *tracking*).

Em relação aos tempos de solução e valores de *gap* (Tabelas 1 a 4), verificamos que o problema deixa de ter condições de ser resolvido na otimalidade com a diminuição da quantidade limite de ativos das carteiras. Considerando que o limite máximo adotado para o *gap* é 5%, devemos tratar os resultados para carteiras sem limite de ativos e com limite de 40 e 30 ativos como resultados consistentes; nesses casos, o *gap* médio obtido fica bem próximo dos 5%. Já para carteiras de 20 ativos, o *gap* médio ultrapassa 5%, e dessa forma as respostas obtidas não podem ser consideradas confiáveis (apesar dos baixos valores de *tracking* obtidos mesmo com *gaps* elevados).

Podemos considerar como cenário ideal a realização do *tracking* com portfólios compostos por no máximo 10 ativos, no caso do Ibovespa; porém, não é possível atingir esse ponto com solução da modelagem na otimalidade. Conforme já ressaltando, trata-se de um modelo que extrapola a capacidade de solução dos programas comerciais disponíveis, havendo necessidade de se utilizar heurísticas para solução com uso de um número baixo de ativos.

Deve-se considerar que, para formação de carteiras de 30 ativos, embora o tempo de solução médio seja próximo de 5 minutos, o tempo máximo atinge 1 hora para intervalo *out-of-sample* de 20 períodos e aproximadamente 40 minutos para intervalos de 40 e 60 períodos. Porém, dado que o intervalo de rebalanceamento é elevado e que os valores de *gap* não ultrapassam significativamente 5% nas projeções de 40 e 60 períodos, podemos tratar esses fatores como atenuantes do problema de tempo de solução. Nota-se a questão de custos baixos especialmente para o intervalo de 60 períodos, com *turnover*<sup>1</sup> mensal de 11,6%.

Em relação aos custos, conforme Tabelas 1 a 4, a vantagem da realização de rebalanceamento de 60 períodos pode ser percebida claramente pelos valores médios mensais de *turnover*. Considerando que um dos objetivos principais da estratégia de *index tracking* é ter custos baixos, o rebalanceamento em 60 períodos apresenta claro destaque nos quatro tipos de carteiras, uma vez que o maior período de rebalanceamento não demonstra piora considerável de Volatilidade em relação ao índice (conforme valores de Volatilidade Diária e Anual na Tabela 5).

---

<sup>1</sup>Forma de cálculo do turnover de uma Carteira 2 em relação a uma Carteira 1 anterior:  $Turnover = (\sum_{i=1}^N |x_i^2 - x_i^1|)/2$ , sendo  $x_i^2$ =peso do ativo  $i$  na carteira 2, e  $x_i^1$ =peso do ativo  $i$  na carteira 1.

**Tabela 1**  
Resultados para formação de carteiras sem limite de ativos

Carteiras Sem Limite de Ativos						
Intervalo out-of-sample	20 períodos		40 períodos		60 períodos	
Resultados	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap
Média	0,159	0,00%	0,159	0,00%	0,16	0,00%
Mínimo	0,14	0,00%	0,14	0,00%	0,14	0,00%
Máximo	0,172	0,00%	0,172	0,00%	0,172	0,00%
Desvio Padrão	0,01	0,00%	0,011	0,00%	0,01	0,00%
Tracking Error (diferença entre rendimento do portfólio e do índice)						
Média	0,08%		0,09%		0,28%	
Mínimo	-1,04%		-2,15%		-1,64%	
Máximo	1,01%		1,51%		3,01%	
Desvio Padrão	0,58%		0,89%		1,25%	
Turnover Mensal						
Média	17,41%		11,44%		9,42%	
Mínimo	7,13%		6,87%		5,22%	
Máximo	36,90%		17,17%		14,54%	
Desvio Padrão	6,50%		2,96%		2,57%	

Fonte: Elaborado pelos autores.





**Tabela 2**  
Resultados para formação de carteiras com limite de 40 Ativos

Carteiras com Limite de 40 Ativos						
Intervalo out-of-sample	20 períodos		40 períodos		60 períodos	
Valores de saída	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap
Média	1,158	2,91%	0,9	2,87%	0,844	2,87%
Mínimo	0,156	0,00%	0,172	0,00%	0,156	0,00%
Máximo	9,36	5,10%	1,654	4,88%	2,465	4,78%
Desvio Padrão	1,462	1,68%	0,353	1,67%	0,616	2,00%
TrackingError (Diferença entre Rendimento do Portfólio e do Índice)						
Média	0,09%		0,08%		0,32%	
Mínimo	-1,10%		-2,15%		-1,64%	
Máximo	1,10%		1,51%		2,97%	
Desvio Padrão	0,59%		0,89%		1,25%	
Turnover Mensal						
Média	19,62%		12,40%		10,21%	
Mínimo	6,45%		7,32%		5,22%	
Máximo	37,73%		17,48%		14,54%	
Desvio Padrão	7,20%		2,93%		2,53%	

Fonte: Elaborado pelos autores.



**Tabela 3**  
Resultados para formação de carteiras com limite de 30 ativos

Carteiras com Limite de 30 Ativos						
Intervalo out-of-sample	20 períodos		40 períodos		60 períodos	
Valores de saída	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap
Média	355,773	5,07%	205,32	5,01%	278,48	4,92%
Mínimo	0,92	3,94%	1,03	4,36%	0,92	3,94%
Máximo	3600,43	7,59%	2391,6	5,41%	2391,6	5,56%
Desvio Padrão	899,294	0,51%	553,374	0,23%	675,031	0,42%
TrackingError (Diferença entre Rendimento do Portfólio e do Índice)						
Média	0,09%		0,10%		0,39%	
Mínimo	-1,67%		-2,67%		-2,21%	
Máximo	1,27%		1,25%		3,06%	
Desvio Padrão	0,67%		0,92%		1,43%	
Turnover Mensal						
Média	23,71%		14,81%		11,61%	
Mínimo	10,03%		9,41%		6,36%	
Máximo	43,78%		22,31%		16,01%	
Desvio Padrão	7,77%		3,47%		2,49%	

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 4**  
Resultados para formação de carteiras com limite de 20 ativos

Carteiras com Limite de 20 Ativos						
Intervalo out-of-sample	20 períodos		40 períodos		60 períodos	
Valores de saída	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap	Tempo de solução (segundos)	Gap
Média	2941,078	13,00%	2900,026	12,66%	2629,175	11,65%
Mínimo	345,573	5,00%	345,573	5,00%	536,191	5,00%
Máximo	3600,55	25,19%	3600,55	25,19%	3600,3	24,26%
Desvio Padrão	1081,267	7,44%	1180,001	7,12%	1284,222	7,88%
TrackingError (Diferença entre Rendimento do Portfólio e do Índice)						
Média	0,05%		0,18%		0,32%	
Mínimo	-2,24%		-2,22%		-2,52%	
Máximo	1,24%		1,41%		2,35%	
Desvio Padrão	0,84%		0,92%		1,45%	
Turnover Mensal						
Média	29,45%		16,35%		12,03%	
Mínimo	12,62%		9,92%		6,81%	
Máximo	53,42%		22,33%		18,77%	
Desvio Padrão	11,15%		3,82%		3,81%	

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 5**

Resultados para formação de Carteiras com intervalo out-of-sample de 20 períodos

Estatísticas	Intervalo Out-of-Sample de 20 Períodos				
	Ibovespa	Sem Limite de Ativos	Limite de 40 Ativos	Limite de 30 Ativos	Limite de 20 Ativos
Retorno Médio Por Carteira	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
Retorno Acumulado	-3,76%	-0,90%	-0,71%	-0,67%	-2,03%
Volatilidade Diária	1,25%	1,25%	1,25%	1,26%	1,28%
Volatilidade Anual	19,86%	19,90%	19,89%	19,95%	20,25%
Correlação com Ibovespa	1,000	0,992	0,992	0,99	0,987
Assimetria	-0,392	-0,395	-0,388	-0,388	-0,395
Curtose	1,755	1,706	1,72	1,676	1,626
Estatísticas	Intervalo Out-of-Sample de 40 Períodos				
	Ibovespa	Sem Limite de Ativos	Limite de 40 Ativos	Limite de 30 Ativos	Limite de 20 Ativos
Retorno Médio Por Carteira	0,00%	0,01%	0,00%	0,01%	0,01%
Retorno Acumulado	-3,76%	-2,37%	-2,47%	-2,12%	-0,41%
Volatilidade Diária	1,25%	1,25%	1,25%	1,25%	1,28%
Volatilidade Anual	19,86%	19,88%	19,88%	19,86%	20,24%
Correlação com Ibovespa	1,000	0,992	0,991	0,99	0,987
Assimetria	-0,392	-0,391	-0,39	-0,376	-0,386
Curtose	1,755	1,793	1,814	1,726	1,863
Estatísticas	Intervalo Out-of-Sample de 60 Períodos				
	Ibovespa	Sem Limite de Ativos	Limite de 40 Ativos	Limite de 30 Ativos	Limite de 20 Ativos
Retorno Médio Por Carteira	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
Retorno Acumulado	-3,76%	-0,73%	-0,27%	0,55%	-0,57%
Volatilidade	1,25%	1,26%	1,26%	1,26%	1,27%
Volatilidade Anual	19,86%	19,92%	19,94%	19,93%	20,23%
Correlação com Ibovespa	1,000	0,992	0,991	0,99	0,987
Assimetria	-0,392	-0,402	-0,401	-0,376	-0,402
Curtose	1,755	1,795	1,813	1,731	1,835

As estatísticas apresentadas na Tabela 5 corroboram a boa qualidade das soluções obtidas. Para os três períodos de rebalanceamento, notamos valores de Retorno Médio das carteiras próximos dos valores do Ibovespa. Da mesma forma, verificamos que os Retornos Acumulados, para o período analisado, também permanecem próximos do índice para os três intervalos *out-of-sample* projetados. Os valores de Volatilidade Diária e Anual aproximam-se do índice em todos os casos, da mesma forma que os valores de Correlação, Assimetria e Curtose. Verificamos que a Volatilidade tende a aumentar um pouco e a Correlação tende a diminuir um pouco com uma menor quantidade de ativos compondo os portfólios, o que aponta para aumento do risco na medida em que a quantidade de ativos na carteira é reduzida.

Pela Tabela 5, percebemos que o retorno acumulado de cada um dos quatro tipos de carteiras não varia de forma conjunta conforme o intervalo

de rebalanceamento é incrementado. Por exemplo, no caso de carteiras de 30 ativos, o retorno acumulado melhora (ou seja, se aproxima do retorno acumulado do índice) quando aumentamos o rebalanceamento de 20 para 40 dias úteis, e piora (distanciando-se do índice) quando o rebalanceamento passa para 60 períodos; já no caso de carteiras limitadas a 20 ativos, o retorno acumulado piora na passagem de rebalanceamento de 20 para 40 dias úteis, e após sofre uma leve melhora na passagem para 60 dias úteis. Assim, não percebemos um movimento sincronizado entre retornos acumulados para diferentes tipos de rebalanceamento, como ocorre na relação entre erro médio de *tracking* e *turnover* médio mensal.

Podemos verificar esse *trade-off* existente entre Erro Médio de *Tracking* das carteiras e *Turnover* Médio Mensal através das Tabelas 1 a 4. Nota-se que, para os quatro tipos de carteiras testadas (sem limite de ativos e com limites de 40, 30 e 20 ativos), o *turnover* médio mensal diminui e o erro médio de *tracking* cresce na medida em que aumentamos o intervalo de rebalanceamento. Em consequência desse *trade-off*, apresenta-se naturalmente a questão sobre como definir o que é preferível: buscar um menor erro médio de *tracking* mesmo que isso represente aumento do *turnover* mensal, ou optar por menor *turnover* (ou seja, menores custos) sob o risco de se obter maiores erros de *tracking*.

Através da literatura pesquisada, não foi possível encontrar referências a respeito de como lidar com esse *trade-off* entre erro de *tracking* e custos representados pelo *turnover*. Nota-se que essa é uma decisão do investidor, que necessita optar entre maiores custos para atualização da carteira ou a tendência de ter um portfólio sujeito a maiores oscilações.

#### 4.2 Desempenho versus política de um ETF de mercado

A fim de analisar os resultados obtidos, realizamos um breve exercício com a evolução dos retornos acumulados anuais na projeção da carteira limitada a 20 ativos com rebalanceamento trimestral. O motivo desse teste foi baseado no ativo BOVA11 (Fundo IShares Ibovespa Fundo de Índice) em negociação na Bovespa, que consiste em um ETF que visa replicar o rendimento do Ibovespa (sendo que, para isso, esse ETF faz uma réplica do Ibovespa, incorporando os 69 ativos do índice). De acordo com o Regulamento deste ETF,<sup>2</sup> existe a expectativa de que a diferença entre o rendimento anual acumulado do fundo em relação ao Ibovespa não seja superior

<sup>2</sup>Regulamento disponível em [http://br.ishares.com/product\\_info/fund/overview/BOVA11.htm](http://br.ishares.com/product_info/fund/overview/BOVA11.htm) (acesso em 21/abr/2014), página 40, Artigo 43, item (iii).

a 4 pontos percentuais; e, caso o erro do fundo em relação ao índice ultrapasse 4 pontos percentuais, é esperado que esse erro retorne para o limite de 4p.p. dentro de 30 dias úteis (caso contrário, há a necessidade de que a administradora do fundo forneça explicações aos cotistas sobre os motivos desse erro de aderência).

Assim, optamos por adotar 4p.p. como limite de erro entre retornos acumulados anuais da carteira e do índice. Para isso, utilizamos a projeção da carteira limitada a 20 ativos com rebalanceamento trimestral pois, para esse período de rebalanceamento, essa carteira apresenta erro médio de *tracking* menor que as carteiras de 30 e 40 ativos (Tabelas 1 a 4), além de *turnover* médio mensal de apenas 12,026%. Para isso, precisamos considerar o seguinte: a amostra de dados adotada é formada pelos preços de ativos de 12/01/2009 a 17/07/2012, sendo que os preços de 12/01/09 a 19/08/09 são usados para primeira execução do modelo de otimização (amostra *in-sample* de 150 dias úteis), ou seja, as projeções das carteiras são de 20/08/09 a 17/07/12; assim, a projeção das carteiras otimizadas inicia em 20/08/09 e, a partir de 27/08/10, podemos verificar o retorno acumulado por 252 dias úteis (ano comercial) – ou seja, retorno acumulado entre 20/08/09 e 27/08/10.

Dessa forma, a partir de 27/08/10, podemos verificar diariamente qual o retorno acumulado anual para a carteira e para o índice, verificando assim o erro acumulado anual (que é o erro utilizado como referência no Regulamento do ativo BOVA11). Ou seja, verificamos a evolução do erro acumulado anual através do erro anual entre 20/08/09 e 27/08/10, entre 21/08/09 e 30/08/10, e assim sucessivamente (atualizando diariamente esse erro acumulado anual). O erro de tracking corresponde à diferença entre o rendimento acumulado anual da carteira e o rendimento acumulado anual do índice. A evolução desse erro ao longo do intervalo de quase dois anos (27/08/10 a 17/07/12) pode ser vista na Figura 02 a seguir.

Por esse critério, os resultados demonstram que o erro foi superior a 4% apenas em três momentos: no dia 01/02/12, no intervalo entre os dias 16/03/12 a 20/03/12 (3 dias úteis) e no intervalo entre 29/03/12 e 02/05/12 (que compreende 23 dias úteis). Dessa forma, em nenhum momento o erro permanece acima de 4p.p. por mais de 30 dias úteis sem convergir de volta para dentro da meta estipulada.



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 2**

Evolução do erro acumulado anual entre a Carteira com Limite de 20 Ativos e o índice Ibovespa

Conforme a Tabela 05, o retorno acumulado do índice em todo o período de análise (20/08/09 a 17/07/12) foi de -3,757%, enquanto que o retorno acumulado da carteira de 20 ativos (com rebalanceamento trimestral – 60 períodos) foi de -0,567%. Apesar desse erro acumulado em torno de 3,2 pontos percentuais ser aparentemente grande, deve ser considerado que se trata de uma diferença acumulada ao longo de quase três anos. Além disso, através da análise feita acima com os retornos anuais acumulados, vemos que essa estratégia atenderia à restrição de erro imposta pelo Regulamento do ativo BOVA11. Dessa forma, esse ETF poderia ser composto por apenas 20 ativos, em vez do total de 69 ativos que são atualmente utilizados.

Em relação ao erro de rendimento entre as carteiras e o índice, é necessário considerar que estamos adotando uma política mais restritiva do que a usada pelo ETF BOVA11. Analisando esse ETF, verifica-se que seu erro em relação ao Ibovespa é bastante reduzido (erro menor do que o que obtivemos em nossos testes). Porém, esse ETF realiza uma réplica total do índice, ou seja, é composto por todos os ativos do Ibovespa e seus respectivos pesos. Ao utilizarmos uma política mais restritiva, formando carteiras de quantidade reduzida de ativos, é natural que haja um aumento do erro de *tracking*. Conforme as Tabelas 01 a 04, nota-se que o maior relaxamento do problema (aumentando a quantidade de ativos das carteiras) permite a geração de menores erros de *tracking*. Porém, mesmo com a formação de carteiras menores (aumentando a restrição do problema), conseguimos seguir um fundo que tem uma política mais flexível, e com a vantagem de reduzir os custos de transação envolvidos.

A partir dessa análise sobre o erro acumulado anual, podemos concluir

também sobre a existência de um *trade-off* existente entre erro de *tracking* e *turnover* mensal. Considerando os testes realizados, vemos que as projeções apontam para a possibilidade de se aceitar uma tendência de erro maior em troca de menores custos, uma vez que o erro tende a permanecer dentro do limite estipulado.

### 4.3 Discussão dos resultados

Conforme análise realizada da literatura, não foi possível localizarmos estudos similares que utilizaram a mesma base de dados aqui adotada. Além disso, nesse estudo, buscamos realizar testes para formação de carteiras com quantidade um pouco maior de ativos, sendo que a literatura contemporânea tem foco em métodos de solução para carteiras bastante reduzidas.

Devido a essas particularidades, torna-se difícil a comparação dos resultados aqui obtidos com os resultados de outras análises. Apesar disso, realizamos uma breve comparação dos resultados obtidos em nossos testes com os resultados obtidos por Beasley *et al.* (2003) e Guastaroba & Speranza (2012) – pois esses dois estudos utilizam a mesma base de dados, apesar de empregarem métodos diferentes de solução.

A Tabela 06 apresenta de forma sucinta os resultados de Beasley *et al.* (2003), de Guastaroba & Speranza (2012) e os resultados aqui obtidos (“Resultados para Índice Ibovespa”), de forma a permitir uma melhor compreensão dos resultados desse estudo. Para isso, comparamos os valores de erro de *tracking* para cada tipo de carteira formada e o correspondente valor de percentual. O cálculo do erro de *tracking* (TE), nesse caso, corresponde à diferença entre a soma dos quadrados dos desvios dos retornos de cada carteira em relação ao índice (considerando os retornos diários do intervalo fora da amostra). O valor de Percentual corresponde à relação  $TE/DesP_{R_t}$ , sendo  $DesP_{R_t}$  o desvio padrão dos retornos diários do índice no intervalo fora da amostra. No caso dos “Resultados para Índice Ibovespa”, utilizamos os resultados das carteiras de limite de 40, 30 e 20 ativos com rebalanceamento trimestral. Considerando que, com rebalanceamento trimestral, podemos formar um total de 12 carteiras otimizadas em sequência para cada tipo de portfólio que formamos (40, 30 e 20 ativos), os valores de *tracking error* e de percentual correspondem à média do *tracking error* e do percentual dessas 12 carteiras.

Dessa forma, apesar de Beasley *et al.* (2003) e Guastaroba & Speranza (2012) utilizarem amostras diferentes do que foi usado no presente

estudo, podemos perceber que, em nosso artigo, o erro de *tracking* aumenta principalmente para o caso de resultados para índice Ibovespa com carteiras de 20 ativos. Porém, intuitivamente podemos afirmar que esse erro deve-se ao fato de termos soluções com *gap* médio acima de 11% e, por consequência, erro médio de *tracking* elevado e com maior desvio padrão (conforme Tabela 04). Apesar disso, comparando-se o caso de carteiras de 20 ativos para o Ibovespa com os resultados de carteiras de 10 ativos para amostra de 31 ativos, em Beasley *et al.* (2003) e Guastaroba & Speranza (2012), vemos que o percentual para carteiras do Ibovespa é menor. Isso demonstra que o índice Ibovespa tem maior volatilidade que os índices usados pelos outros dois estudos, o que também ajuda a justificar maiores valores de erro de *tracking*.

**Tabela 6**

Comparação dos resultados de Beasley *et al.* (2003) e Guastaroba & Speranza (2012) com os resultados para o índice Ibovespa

Beasley, Meade e Chang (2003)				
A*	C**	C/A***	Trackingerror	Percentual
31	10	0,32	1,27E-03	3,827
85	10	0,12	2,05E-03	10,091
89	10	0,11	9,58E-04	5,527
98	10	0,1	1,03E-03	6,805
225	10	0,04	8,21E-04	2,89
Guastaroba e Speranza (2012)				
A*	C**	C/A***	Trackingerror	Percentual
31	10	0,32	1,27E-03	3,824
85	10	0,12	2,05E-03	10,09
89	10	0,11	9,59E-04	5,528
98	10	0,1	1,03E-03	6,805
225	10	0,04	8,21E-04	2,89
Resultados para Índice Ibovespa				
A*	C**	C/A***	Trackingerror	Percentual
67	40	0,6	3,42E-03	0,342
67	30	0,45	6,14E-03	0,614
67	20	0,3	2,24E-02	2,239

\*A = Tamanho da amostra; \*\*C = Tamanho da carteira; \*\*\*C/A = Relação entre carteira e amostra.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em suma, conforme citado anteriormente, não é trivial fazermos uma comparação direta dos resultados obtidos nesse estudo com os resultados de outros artigos, por utilizarmos um método de solução mais simples e uma

amostra de dados que não foi empregada por outros autores. Apesar disso, a comparação realizada demonstra que obtivemos resultados próximos aos de outros autores, especialmente em termos de percentual, o que ajuda a justificar os valores um pouco mais elevados de *tracking error*.

#### 4.4 Resultados para alterações de parâmetros no solver Cplex

Após conclusão dos testes descritos acima, realizamos novos testes computacionais com o solver Cplex, fazendo alterações em parâmetros do solver a fim de verificar a possibilidade de se obter tempos de solução mais baixos do que os obtidos inicialmente.

Para isso, foi realizada uma análise de parâmetros do Cplex que, se alterados, podem influenciar os tempos de solução. Os parâmetros analisados estão listados a seguir.

- “coeffreduce”: realizamos testes desabilitando essa instrução ( $coeffreduce = 1$ ), que é aplicada na fase de pré-processamento do problema, influenciando o desempenho do Cplex no caso de programação inteira através de alterações no algoritmo *branch-and-bound*;
- “probe”: realizamos testes desabilitando essa instrução ( $probe = -1$ ) que define se o Cplex realiza, no pré-processamento, uma sondagem nos problemas de programação linear e inteira afim de preparar o processo de solução;
- “mipemphasis”: realizamos alteração desse parâmetro para alteração do método de *branch-and-cut* para solução do problema. Com essa alteração, o *solver* deve trabalhar com ênfase em encontrar novas possíveis soluções ( $mipemphasis = 1$ ), sem foco na busca da solução ótima;
- “fpheur”: desabilitamos essa instrução ( $fpheur = -1$ ) para alterar o uso, pelo Cplex, da “feasibility pump heuristic”. Dessa forma, podemos obter respostas mais rápidas especialmente em casos em que não é exigida uma solução ótima;
- “mipsearch”: alteramos essa instrução para definir que o Cplex utilize apenas o tipo de busca por *branch-and-bound* ( $mipsearch = 1$ ) ou o tipo de busca dinâmica ( $mipsearch = 2$ ) para solução do modelo;

- “rinsheur”: desabilitamos essa instrução ( $rinsheur = -1$ ) que afeta o uso da heurística de Rins (do inglês, “*relaxation induced neighborhood search heuristic*”), determinando que o Cplex não utilize essa heurística durante a solução do problema.

Após seleção dessas instruções, realizamos testes computacionais iniciais para verificar como elas poderiam afetar os tempos de solução. Para tal, executamos testes em que as carteiras de investimento são limitadas a 20 ativos. Adotando  $n = 20$  (amostra *out-of-sample* de 20 períodos), podemos formar um total de 36 carteiras de investimentos para o período de análise (conforme já explicado anteriormente). Escolhemos  $n = 20$ , em vez de  $n = 40$  ou  $n = 60$ , por ser a opção em que podemos formar mais carteiras (pois podemos formar 36 carteiras de investimentos para  $n = 20$ , 18 para  $n = 40$  e 12 para  $n = 60$ ). Dessas 36 carteiras, selecionamos duas aleatoriamente e realizamos otimização dessas duas carteiras utilizando oito diferentes conjuntos de instruções.

As instruções utilizadas nos oito testes e os resultados obtidos para esses testes podem ser vistos na Tabela 07, que apresenta tempo de solução (em segundos) de cada uma das duas carteiras testadas, para cada combinação de instruções (cada um dos oito testes). Notamos, assim, que esses novos testes com alterações de parâmetros do Cplex não produziram modificações consideráveis nos tempos de solução, exceto para dois casos; no sétimo e oitavo testes, tem-se redução significativa do tempo de solução da otimização para as duas carteiras.

**Tabela 7**

Resultados para testes iniciais com alteração de parâmetros do Cplex

Instruções utilizadas	Tempo de solução (em segundos)	
	Carteira A	Carteira B
Solução original (sem alterações no Cplex)	2310,09	1710,36
1º Teste: fpheur = -1 rinsheur = -1	2389,78	1925,52
2º Teste: fpheur = -1 rinsheur = -1 mipemphasis = 1	2670,09	1395,33
3º Teste: fpheur = -1 rinsheur = -1 mipsearch = 1	2199,72	1824,19
4º Teste: fpheur = -1 rinsheur = -1 mipsearch = 2	2366,28	1825,77
5º Teste: rinheur = -1	2359,98	1926,07
6º Teste: fpheur = -1	2315,71	1603,01
7º Teste: probe = -1	1926,26	1297,21
8º Teste: coeffreduce = 1	1723,53	1338,1

Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim, essas duas instruções (“*probe = -1*” e “*coeffreduce = 1*”)

foram então aplicadas para otimização de todas as 36 carteiras de investimentos que podem ser formadas para o caso de projeções de intervalo de 20 períodos. Dessa forma, buscamos então verificar de forma clara se essas instruções impactarão os tempos de solução do Cplex.

Após execução da otimização das 36 carteiras de investimento com uso da instrução “coeffreduce=1” (mantendo a instrução “probe” com seu valor *default*) e, após, com uso da instrução “probe=-1” (mantendo a instrução “coeffreduce” com seu valor *default*), podemos ver o resumo dos resultados obtidos em termos de tempo de solução na Tabela 08. Nessa tabela, podemos também ver os resultados sobre *gap* de solução e valores de erro das carteiras em relação ao índice.

**Tabela 8**  
Resultados para testes finais com alteração de parâmetros do Cplex

		Soluções originais	coeffreduce = 1	probe = -1
Tempo de solução (em segundos)	Médio	2941.08	2892.95	2978.53
	Mínimo	345.57	578.61	519.80
	Máximo	3600.55	3600.43	3600.32
	Desvio Padrão	1081.27	1123.71	1016.16
Gap	Médio	13.00%	13.27%	13.47%
	Mínimo	5.00%	5.00%	5.00%
	Máximo	25.19%	26.07%	36.24%
	Desvio Padrão	7.44%	7.25%	8.26%
Erro da carteira em relação ao índice	Médio	0.050%	0.046%	0.061%
	Mínimo	-2242%	-2282%	-2242%
	Máximo	1236%	1383%	1236%
	Desvio Padrão	0.840%	0.886%	0.839%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Percebemos então que, apesar de os testes iniciais terem indicado que cada uma dessas instruções poderia afetar os tempos de solução das otimizações, esses resultados apontam para conclusão em contrário. Constatamos que os tempos médios de solução para as otimizações sem alterações no Cplex são similares aos tempos de solução para cada uma das duas alterações de parâmetro. Da mesma forma, o tempo de solução máximo é praticamente o mesmo, em torno de 3600 segundos. Apenas o tempo mínimo tem alteração mais significativa, sendo que as alterações no Cplex resultaram em aumento do tempo mínimo de processamento.

Da mesma forma, vemos que os valores de *gap* e de erro da carteira em relação ao índice são bastante similares. Nota-se que não há grandes variações entre os resultados das otimizações sem alterações no Cplex e

com as alterações de parâmetros. Isso atesta que os resultados são parecidos e mudanças nas configurações do Cplex não geram diferenças nos resultados.

De forma geral, esses resultados demonstraram que, para esse problema de otimização que está sendo trabalhado, a alteração de parâmetros do *solver* para tentativa de diminuição dos tempos de solução não gerou resultados significativos e foi ineficiente. Temos assim um indicativo de que alterações nos parâmetros do *solver* não implicam mudança de qualidade das respostas obtidas, e que é necessário o uso de um método heurístico para solução desse problema de otimização com número reduzido de ativos (quantidade menor que 20 ativos, no caso da amostra adotada nesse artigo).

## 5. Conclusões

Nesse artigo, apresentamos uma proposta de modelagem para solução do problema de *index tracking* realizando-se controle do número de ativos das carteiras. O modelo foi aplicado para o índice Ibovespa no período de Jan/2009 a Jul/2012. Com o uso de uma amostra de 67 ativos, foram formados quatro tipos de carteiras para períodos de rebalanceamento mensal, bimestral e trimestral, considerando que nosso objetivo nesse artigo consiste em trazer um método de *index tracking* para o ambiente brasileiro e aplicar uma técnica de solução mais simples e que exige um relaxamento um pouco maior no controle do número de ativos das carteiras.

Considerando-se os valores de *tracking error* e *turnover*, pode-se afirmar que os resultados são satisfatórios para os casos testados (de diferentes intervalos *out-of-sample* e com carteiras de diferentes tamanhos, exceto para carteiras limitadas a 20 ativos, em que os valores de *gap* não ficam abaixo de 5%). Especialmente para o caso de carteiras de 30 ativos com 60 períodos *out-of-sample*, temos custos baixos (*turnover* médio mensal de 11,6%, conforme expresso na Tabela 03) com erro de *tracking* baixo e tempo de solução, em média, abaixo de 5 minutos. Para esse caso, temos ainda os valores de Volatilidade, Correlação, Assimetria e Curtose bastante próximos do Ibovespa. Já para carteiras de 20 ativos, também temos bons resultados, com as ressalvas de que há um aumento do tempo médio de processamento para resolver o problema e de que as respostas possuem *gap* médio acima de 5%.

Realizamos também comparações dos resultados com um ETF do mercado brasileiro (que busca seguir o índice Ibovespa) e também com resultados de outros autores. Dessa forma, verificamos que, com carteiras de

20 ativos, poderíamos atender as exigências do ETF BOVA11, apesar de estarmos utilizando uma política mais restritiva em relação à quantidade de ativos. Além disso, verificamos que nossos resultados se assemelham aos apresentados por trabalhos análogos de pesquisa, em termos de erro de *tracking*, exceto para formação de carteiras de 20 ativos; nesse caso, temos erro de *tracking* um pouco superior, porém com a ressalva de que percebemos que o Ibovespa também possui uma volatilidade um pouco maior, o que contribui para o aumento do erro.

Realizamos também alterações de parâmetros do *solver* Cplex a fim de verificar se é possível a obtenção de respostas para esse problema com menores tempos de solução. Verificamos então que alterações no Cplex não tendem a influenciar os tempos de solução, para o caso desse problema de otimização que está sendo trabalhado. Isso auxilia a conclusão de que é necessário o uso de algum método alternativo de solução para que possam ser formadas carteiras de menor quantidade de ativos com manutenção de tempos de solução baixos.

Podemos observar que a modelagem quadrática inteira proposta nesse artigo não converge para a solução ótima quando o número limite de ativos incluídos na carteira diminui muito, o que aponta para a necessidade de uso de heurísticas para aprimorar a relação entre tempo de solução e *gap*; isso permitirá a formação de carteiras com menor quantidade de ativos (por exemplo, carteiras de 05 ou 10 ativos para o caso do Ibovespa). Adicionalmente, podem-se considerar as seguintes propostas como possíveis futuras pesquisas: inclusão no modelo de restrições de controle de turnover e de controle de pesos mínimo e máximo de cada ativo na carteira.

## Referências

- Barro, Diana, & Canestrelli, Elio. 2009. Tracking Error: A Multistage Portfolio Model. *Annals of Operations Research*, **165**, 47–66.
- Beasley, John E., Meade, Nigel, & Chang, Tien-Jye. 2003. An Evolutionary Heuristic for the Index Tracking Problem. *European Journal of Operational Research*, **148**, 621–643.
- Borges, Elaine C., Eid Jr., Willian, & Yoshinaga, Cláudia E. 2012. Exchange Traded Funds versus Fundos Indexados No Brasil. *Revista de Finanças Aplicadas*, **1**, 1–15.
- Caldeira, João F., & Portugal, Marcelo. 2010. Estratégia Long-Short, Neu-

tra Ao Mercado, e Index Tracking Baseadas Em Portfólios Cointegrados. *Revista Brasileira de Finanças*, **8**, 469–504.

Canakgoz, Nilgun A., & Beasley, John E. 2009. Mixed-Integer Programming Approaches for Index Tracking and Enhanced Indexation. *European Journal of Operational Research*, **196**, 384–399.

Coleman, Thomas F., Li, Yuying, & Henniger, Jay. 2006. Minimizing Tracking Error While Restricting the Number of Assets. *Journal of Risk*, **8**, 33–56.

Dunis, Christian L., & Ho, Richard. 2005. Cointegration Portfolios of European Equities for Index Tracking and Market Neutral Strategies. *Journal of Asset Management*, **6**, 33–52.

Fama, Eugene. 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, **25**, 383–417.

Fama, Eugene, & French, Kenneth. 2010. Luck versus Skill in the Cross-Section of Mutual Fund Returns. *The Journal of Finance*, **65**, 1915–1947.

Filomena, Tiago P., & Lejeune, Miguel A. 2014. Warm-Start Heuristic for Stochastic Portfolio Optimization with Fixed and Proportional Transaction Costs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **161**, 308–329.

Frino, Alex, & Gallagher, David R. 2001. Tracking S&P 500 Index Funds. *Journal of Portfolio Management*, **28**, 44–55.

Gaivoronski, Alexei A., Krylov, Sergiy, & Van der Wijst, Nico. 2005. Optimal Portfolio Selection and Dynamic Benchmark Tracking. *European Journal of Operational Research*, **163**, 115–131.

Guastaroba, Gianfranco, & Speranza, Maria Grazia. 2012. Kernel Search: An Application to the Index Tracking Problem. *European Journal of Operational Research*, **217**, 54–68.

Jansen, Roel, & Van Dijk, Ronald. 2002. Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, **28**, 33–39.

- Jeurissen, Roland, & Van Den Berg, Jan. 2008. *Optimized Index Tracking Using a Hybrid Genetic Algorithm*. IEEE Congress on Evolutionary Computation, Hong Kong.
- Krink, Thiemo, Mittnik, Stefan, & Paterlini, Sandra. 2009. Differential Evolution and Combinatorial Search for Constrained Index-Tracking. *Annals of Operations Research*, **172**, 153–176.
- Maringer, Dietmar, & Oyewumi, Olufemi. 2007. Index Tracking with Constrained Portfolios. *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, **15**, 57–71.
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**, 77–91.
- Oh, Kyong, Joo, Kim, Tae, Yoon, & Min, Sungky. 2005. Using Genetic Algorithm to Support Portfolio Optimization for Index Fund Management. *Expert Systems with Applications*, **28**, 371–379.
- Roll, Richard. 1992. A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *Journal of Portfolio Management*, **18**, 12–22.
- Scozzari, Andrea, Tardella, Fabio, Paterlini, Sandra, & Krink, Thiemo. 2012. Disponível em <http://ssrn.com/abstract=2066672>. Acesso em: 27/4/2014.
- Yao, David D., Zhang, Shuzhong, & Zhou, Xun Yu. 2006. Tracking a Financial Benchmark Using a Few Assets. *Operations Research*, **54**, 232–246.