



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

Müller, Fernanda Maria; Bayer, Fábio Mariano
Avaliações numéricas das inferências no modelo Beta-Skewt-EGARCH
Revista Brasileira de Finanças, vol. 13, núm. 1, enero, 2015, pp. 40-73
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305842561002>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal

Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Avaliações numéricas das inferências no modelo Beta-Skew-t-EGARCH

(Numerical evaluation of likelihood inferences in Beta-t-Skew-EGARCH models)

Fernanda Maria Müller*

Fábio Mariano Bayer**

Resumo

O modelo Beta-Skew-t-EGARCH foi recentemente proposto para modelar a volatilidade de retornos financeiros. A estimação dos parâmetros do modelo é feita via máxima verossimilhança. Esses estimadores possuem boas propriedades assintóticas, mas em amostras de tamanho finito seus desempenhos podem ser pobres. Com a finalidade de avaliar as propriedades em amostras de tamanho finito dos estimadores pontuais e do teste da razão de verossimilhanças proposto para testar a presença de dois componentes de volatilidade, realizou-se um estudo de simulações de Monte Carlo. Os resultados numéricos indicam que os estimadores de máxima verossimilhança de alguns parâmetros do modelo são consideravelmente viesados em amostras inferiores a 3000. A avaliação numérica do teste de dois componentes proposto, em termos de tamanho e poder do teste, evidenciou sua utilidade prática. Ao final do trabalho foi realizada uma aplicação a dados reais do teste de dois componentes proposto e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH.

Palavras-chave: Beta-Skew-t-EGARCH; estimadores de máxima verossimilhança; simulação de Monte Carlo; teste da razão de verossimilhanças; volatilidade.

Códigos JEL: G17; C58; C15; C13; C52.

Submetido em 15 de dezembro de 2014. Reformulado em 17 de abril de 2015. Aceito em 27 de abril de 2015. Publicado on-line em 6 de Novembro de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

*Universidade Federal de Santa Maria. E-mail: nandamuller90@gmail.com

**Universidade Federal de Santa Maria. E-mail: bayer@ufsm.br

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, 13, No. 1, January 2015, pp. 1-xx
ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2014 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license -
<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

Abstract

The Beta-Skew-t-EGARCH model was recently proposed in literature to model the volatility of financial returns. The inferences over the parameters of the model are based on maximum likelihood method. These estimators have good asymptotic properties, however in finite sample sizes their performance can be poor. With the purpose of evaluating the finite sample performance of point estimators and of the likelihood ratio test proposed to the presence of two components of volatility, we present a Monte Carlo simulation study. Numerical results indicate that the maximum likelihood estimators of some parameters of the model are considerably biased in sample sizes smaller than 3000. The evaluation results of the proposed two-component test, in terms of size and power of the test, showed its practical usefulness in sample sizes greater than 3000. At the end of the work we present an application in a real data of the proposed two-component test and the model Beta-Skew-t-EGARCH.

Keywords: Beta-Skew-t-EGARCH; maximum likelihood estimator; Monte Carlo simulation; likelihood ratio test, volatility.

1. Introdução

Séries financeiras e econômicas costumam apresentar características estilizadas que não podem ser capturadas por meio de modelos lineares. As principais características relatadas na literatura indicam que essas séries exibem agrupamentos de volatilidade (*clusters*) (Liu, 2000, Mandelbrot, 1963), distribuições com caudas mais pesadas do que a distribuição normal, comportamento não linear, algumas dependências não temporais e volatilidade não constante ao longo do tempo (Tsay, 2010, Danielsson, 2011, Francq & Zakoian, 2010). Para modelar essas características foram propostos na literatura os modelos heterocedásticos condicionais. Entre os mais conhecidos está o modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH) (Engle, 1982) e seu caso generalizado (GARCH) (Bollerslev, 1986). Apesar da contribuição desses modelos para análise de séries financeiras e econômicas eles apresentam algumas limitações (Tsay, 2010). Como alternativa, inúmeras generalizações da classe de modelos ARCH-GARCH têm sido apresentadas na literatura. Uma ampla revisão sobre modelos GARCH pode ser consultada em Francq & Zakoian (2010).

Recentemente, para modelar retornos financeiros com características de assimetria, efeito de alavancagem e excesso de curtose, foi proposto o modelo Beta-Skew-t-EGARCH (Harvey & Sucarrat, 2014). Esse modelo estende o modelo Beta-t-EGARCH (Harvey & Chakravarty, 2008, Harvey, 2013) para o caso de assimetria. A especificação exponencial do modelo

tem a vantagem de evitar restrições de não negatividade sobre os parâmetros e permite que as condições de estacionariedade sejam obtidas de forma direta (Sucarrat, 2013). Esse modelo apresenta várias atratividades para sua utilização em séries financeiras e econômicas, como a robustez a *outliers* e a saltos de volatilidade (Harvey & Sucarrat, 2014). Outro aspecto importante relacionado a esse modelo é a possibilidade de decompor a volatilidade em dois componentes, um de curto prazo e outro de longo prazo. O componente de curto prazo captura os efeitos transitórios da volatilidade e o componente de longo prazo modela os movimentos mais lentos da volatilidade, que estão associados a efeitos permanentes.

Alguns autores sugerem que o comportamento da volatilidade é melhor descrito por meio de modelos de volatilidade com componentes, comparado aos modelos de volatilidade tradicionais (Wang & Ghysels, 2015). Engle & Lee (1999) ao propor o modelo GARCH de dois componentes encontraram indícios da superioridade desse modelo em comparação ao modelo GARCH tradicional. Os trabalhos de Adrian & Rosenberg (2008), Chen & Shen (2004), Christoffersen *et al.* (2008) e Guo & Neely (2008) também reforçam a importância de utilizar modelos de volatilidade com dois componentes. Os melhores resultados obtidos podem ser justificados pela elevada correlação de longo prazo presente nas séries financeiras, que dificultam a correta especificação da volatilidade por meio de um modelo com um componente de curto prazo, como o modelo GARCH (Christoffersen *et al.*, 2008). Essa característica, reforça a utilização de modelos de componentes, como o modelo proposto Harvey & Chakravarty (2008) e Harvey & Sucarrat (2014), para correta especificação da volatilidade dos retornos financeiros.

Para estimação dos parâmetros do modelo Beta-Skew-t-EGARCH são utilizados os estimadores de máxima verossimilhança (EMV). Os EMV apresentam, sob certas condições de regularidade, propriedades assintóticas desejáveis, como consistência, normalidade, eficiência e não tendenciosidade (Casella & Berger, 2002, Andersen *et al.*, 2009, Luger, 2012, Pawitan, 2001, Lehmann, 1983, Lindsey, 1996). As inferências realizadas em pequenas amostras, como construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses, consideram essas aproximações assintóticas dos estimadores. No entanto, em pequenas amostras as aproximações podem ser pobres e produzir estimativas significativamente diferentes do valor do parâmetro (Kenward & Roger, 1997, Hippel, 2013). Ademais, verifica-se que para a classe de modelos GARCH os estimadores de máxima verossimilhança

apresentam, em geral, dificuldades em pequenas amostras (Hwang & Pereira, 2006, Bianchi *et al.*, 2011). Detalhes sobre as propriedades assintóticas dos EMV em modelos GARCH podem ser encontradas em Douc *et al.* (2004), Lumsdaine (1995), Chan & McAleer (2002), Xie (2009), Engle *et al.* (1985), Mendes (2000) e Hwang & Pereira (2006), entre outros trabalhos.

Nesse sentido, a principal contribuição deste trabalho será analisar por meio de simulações de Monte Carlo o desempenho dos EMV do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em amostras de tamanho finito. No trabalho de Harvey & Sucarrat (2014), onde é proposto o modelo, não é apresentado um amplo estudo numérico sobre o desempenho desses estimadores. Essa avaliação numérica ajudará a estabelecer quão confiáveis são as estimativas e as conclusões inferenciais retiradas das análises feitas em amostras de tamanho finito. Isso auxiliará na definição do tamanho amostral em que os estimadores apresentam boa performance, de forma semelhante ao apresentado em Hwang & Pereira (2006) para o modelo GARCH. A falta de conhecimento das propriedades estatísticas de modelos GARCH em amostras finitas pode causar dificuldades na inferência e na escolha do algoritmo de otimização mais eficiente para o modelo (Chan & McAleer, 2002). Para responder a esse objetivo serão geradas amostras pseudo-aleatórias e considerados diferentes tamanhos amostrais, bem como diferentes valores para os parâmetros do modelo.

O segundo objetivo é a proposição de um teste da razão de verossimilhanças para testar se a série de dados deve ser modelada por meio de um modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um ou dois componentes de volatilidade. Esse teste da razão de verossimilhanças será denominado de teste de dois componentes. Esse objetivo responde a uma necessidade prática que não é explorada no trabalho original de Harvey & Sucarrat (2014). O teste auxiliará na determinação do modelo que melhor descreve os dados. Com a finalidade de avaliar o desempenho do teste de dois componentes, serão avaliadas as aproximações das estatísticas de teste pela distribuição nula limite qui-quadrado em amostras de tamanho finito por meio de simulações de Monte Carlo. Para analisar as influências dessas aproximações no desempenho do teste de dois componentes, serão avaliados o tamanho e o poder do teste.

Por último, será realizada uma aplicação do teste de dois componentes proposto e do modelo Beta-Skew-t-EGARCH à cotações diárias do índice de mercado da Alemanha, DAX 30. O período amostral analisado, de 23 de novembro de 1995 a 20 de agosto de 2014, compreende períodos de tur-

bulência e calmaria no mercado financeiro, que podem levar a variações na volatilidade. Com a aplicação pretende-se investigar a acurácia do modelo para identificar os períodos de turbulência presentes no período analisado, bem como do teste de dois componentes na seleção do modelo Beta-Skew-t-EGARCH que melhor descreve o comportamento dos dados.

2. O modelo e os procedimentos inferenciais

Nesta seção serão apresentados os modelos Beta-Skew-t-EGARCH com um componente e com dois componentes de volatilidade, bem como o teste de dois componentes proposto.

2.1 Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente

A estrutura do modelo Beta-Skew-t-EGARCH de primeira ordem com um componente de volatilidade é descrito por Sucarrat (2013) da seguinte maneira:

$$y_t = \exp(\lambda_t)\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim st(0, \sigma_\varepsilon^2, \nu, \gamma), \quad \nu > 2, \quad \gamma \in (0, \infty), \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\lambda_t = \omega + \lambda_t^\dagger, \quad (2)$$

$$\lambda_t^\dagger = \phi_1 \lambda_{t-1}^\dagger + \kappa_1 u_{t-1} + \kappa^* \text{sgn}(-y_{t-1})(u_{t-1} + 1), \quad |\phi| < 1, \quad (3)$$

em que y_t indica o retorno financeiro no tempo t , σ_t é a escala ou volatilidade e ε_t é o erro condicional, que possui distribuição t assimétrica, com média zero, escala σ_ε^2 , ν graus de liberdade e assimetria γ ($\varepsilon_t \sim st(0, \sigma_\varepsilon^2, \nu, \gamma)$). Harvey & Sucarrat (2014) argumentam que para essa especificação e para a distribuição t assimétrica não é necessário padronizar a variância de ε_t igual a um. Para inserir a assimetria no modelo, Harvey & Sucarrat (2014) utilizam o método proposto por Fernández & Steel (1998). Quando $\gamma < 1$ a variável é assimétrica a esquerda e para $\gamma > 1$ é assimétrica a direita e em situações em que $\gamma = 1$ a variável é simétrica. Para atender ao pressuposto de estacionariedade é necessário que $|\phi_1| < 1$ (Sucarrat, 2013, Harvey & Sucarrat, 2014). O desvio padrão condicional y_t é obtido por $\sigma_t \sigma_\varepsilon$ (Sucarrat, 2013).

Referente às Equações (2) e (3) ω é interpretado como o longo termo da log-densidade, ϕ é o parâmetro GARCH, quanto maior o valor do parâmetro maior a persistência dos *clusters*, κ é o parâmetro ARCH, quanto maior o valor absoluto do parâmetro maior é a resposta aos choques, κ^* é o

parâmetro de alavancagem, $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal e u_t é o escore condicional. O escore condicional, dado na Equação (10), é obtido pela derivada da log-densidade de y_t em relação a λ_t (Sucarrat, 2013). O uso do escore condicional é intuitivo, pois define a direção que melhora o ajuste do modelo ou da densidade em t , dado a posição do parâmetro (Creal *et al.*, 2013). Ao utilizar essa estrutura obtêm-se maior precisão da previsão da observação um passo a frente (Creal *et al.*, 2011).

O diagnóstico da qualidade de ajuste do modelo pode ser realizada por meio da análise dos resíduos padronizados, dado por $\hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}_t$, $t = 1, \dots, n$, conforme exposto na obra de Harvey (2013). O autor sugere a utilização de testes portmanteau, como Ljung-Box (Ljung & Box, 1978) e Box-Pierce (Box & Pierce, 1970), para investigar a presença de correlação serial em $\hat{\varepsilon}_t^2$ e em \hat{u}_t . No trabalho de Harvey & Sucarrat (2014), além do teste Ljung-Box, os autores utilizam o teste ARCH para investigar a presença de heterocedasticidade em $\hat{\varepsilon}_t$ e em \hat{u}_t .

2.2 Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes

Além do modelo com um componente os autores derivam um modelo de dois componentes de volatilidade, baseado na proposta de Engle & Lee (1999). Nessa nova estrutura o modelo decompõe a volatilidade em um componente de curto prazo e outro de longo prazo (Sucarrat, 2013). Esse modelo permite ganhos na qualidade de ajuste e acomoda a propriedade de longa memória presente nas autocorrelações dos valores absolutos (Harvey & Sucarrat, 2014). A especificação do modelo é dada por (Sucarrat, 2013):

$$y_t = \exp(\lambda_t)\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim st(0, \sigma_\varepsilon^2, \nu, \gamma), \quad \nu > 2, \quad \gamma \in (0, \infty), \quad t = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\lambda_t = \omega + \lambda_{1,t}^\dagger + \lambda_{2,t}^\dagger, \quad (5)$$

$$\lambda_{1,t}^\dagger = \phi_1 \lambda_{1,t-1}^\dagger + \kappa_1 u_{t-1}, \quad |\phi_1| < 1, \quad (6)$$

$$\lambda_{2,t}^\dagger = \phi_2 \lambda_{2,t-1}^\dagger + \kappa_2 u_{t-1} + \kappa^* \text{sgn}(-y_{t-1})(u_{t-1} + 1), \quad |\phi_2| < 1, \quad \phi_1 \neq \phi_2, \quad (7)$$

em que $\lambda_{1,t}^\dagger$ e $\lambda_{2,t}^\dagger$ são interpretados como os componentes de longo prazo e curto prazo respectivamente. O modelo não é identificado quando $\phi_1 = \phi_2$. Para estabilidade e estacionariedade do modelo é necessário que $|\phi_1| < 1$ e $|\phi_2| < 1$ (Harvey & Sucarrat, 2014).

A log-densidade do modelo Beta-Skew-t-EGARCH é dada por (Harvey

& Sucarrat, 2014):

$$\ln f_y(y_t) = \ln 2 - \ln(\gamma + \gamma^{-1}) + \ln \Gamma((\nu + 1)/2) - \frac{1}{2} \ln \pi - \ln \Gamma(\nu/2) - \frac{1}{2} \ln \nu - \lambda_{t|t-1} - \frac{\nu + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{(y_t - \mu)^2}{\gamma^{2\text{sgn}(y_t - \mu)} \nu e^{2\lambda_{t|t-1}}} \right). \quad (8)$$

Assim, a função de log-verossimilhança é definida por:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^n \ln f_y(y_t), \quad (9)$$

em que $\theta = (\omega, \phi_1, \phi_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa^*, \nu, \gamma)$ é um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Dessa forma, os valores $\hat{\theta} = (\hat{\omega}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2, \hat{\kappa}^*, \hat{\nu}, \hat{\gamma})$ que maximizam a função de log-verossimilhança $\ell(\theta)$ são os estimadores de máxima verossimilhança de θ . Não há forma fechada para maximização de $\ell(\theta)$, sendo necessário o uso de métodos numéricos para obtenção de $\hat{\theta}$.

O escore condicional do modelo Beta-Skew-t-EGARCH pode ser descrito por (Harvey & Sucarrat, 2014, Sucarrat, 2013):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_y(y_t)}{\partial \lambda_t} &= u_t \\ &= \frac{(\nu + 1)[y_t^2 + y_t \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t)]}{\nu \exp(2\lambda_t) \gamma^{2\text{sgn}(y_t + \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t))} + (y_t + \mu_{\varepsilon^*} \exp(\lambda_t))^2} - 1, \end{aligned} \quad (10)$$

em que $\ln f_y(y_t)$ é a log-densidade de y_t dada em (8). O escore condicional u_t conduz ambos os componentes. No entanto, o parâmetro de alavancagem (κ^*) está inserido somente na equação de curto prazo (7). Isso é justificado porque os choques importam somente para o componente de curto prazo que captura o aumento temporário da volatilidade após um choque (Harvey & Sucarrat, 2014).

Na literatura são identificadas evidências de que as séries financeiras e econômicas estão sujeitas a diferentes frequências (Engle & Lee, 1999) e apresentam componentes de volatilidade heterogêneos (Cho & Elshahat, 2011). Uma alternativa encontrada por diversos autores para modelar essa característica tem sido utilizar modelos de volatilidade com dois componentes (Cho & Elshahat, 2011). Dentre os modelos de dois componentes apresentados na literatura está o Beta-Skew-t-EGARCH. Desse modo, para auxiliar na seleção do modelo que apresenta melhor qualidade de ajuste,

será apresentado um teste da razão de verossimilhanças para testar se a série de retornos em estudo é ocorrência de um processo com um ou dois componentes. O teste proposto é apresentado na próxima subseção.

2.3 Teste de dois componentes

Nesta subseção será apresentado um teste da razão de verossimilhanças que auxiliará na seleção do modelo Beta-Skew-t-EGARCH que melhor descreve o comportamento dos dados. O objetivo é testar se os parâmetros ϕ_2 e κ_2 , dados em (7), são nulos. Sob essa hipótese nula, o modelo adequado é o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade (2). Sob hipótese alternativa, os parâmetros ϕ_2 e κ_2 são diferentes de zero. Neste caso, deve-se ajustar os dados por meio de um modelo com dois componentes de volatilidade (5).

Dada y_1, \dots, y_n uma amostra de variáveis aleatórias de uma população com função de log-verossimilhança (9) e seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, o interesse reside em testar a seguinte hipótese nula:

$$\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0),$$

versus a hipótese alternativa:

$$\mathcal{H}_1 : (\phi_2, \kappa_2) \neq (0, 0).$$

Para testar a hipótese nula define-se a seguinte estatística da razão de verossimilhanças (LR):

$$LR = 2 \left[\ell(\hat{\theta}_1) - \ell(\hat{\theta}_0) \right],$$

em que $\hat{\theta}_1$ é o vetor de estimadores sob a hipótese alternativa e $\hat{\theta}_0$ correspondem ao vetor de estimadores restritos sob a hipótese nula.

Sob hipótese nula e em grandes amostras, assumindo certas condições de regularidade, a estatística de teste LR tem aproximadamente distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade (Cordeiro & Cribari-Neto, 2014). Para situações em que a estatística de teste calculada excede o valor crítico (≈ 5.991 para $\alpha = 0.05$) da distribuição qui-quadrado, ao nível de significância escolhido, rejeita-se a hipótese nula. Nesse caso, conclui-se que ϕ_2 e κ_2 são diferentes de zero e, dessa forma, deve-se ajustar o modelo com dois componentes (5).

Convém salientar que em pequenas amostras a aproximação da distribuição da estatística de teste LR pela distribuição qui-quadrado pode ser pobre. Nessas situações, podem ocorrer taxas de rejeição da hipótese nula distorcidas (Kebblowski, 2005, Ferrari *et al.*, 2005, Stein *et al.*, 2014). Por esse motivo será avaliado o desempenho do teste da razão de verossimilhanças em amostras de tamanho finito, por meio de simulações de Monte Carlo. Nos trabalhos de Lumsdaine (1995), Noh (1997) e Busch (2005) são encontradas avaliações empíricas da utilização do teste LR para inferências nos modelos GARCH.

3. Resultados numéricos

Esta seção será subdividida em duas partes: i) avaliação dos estimadores pontuais; e ii) avaliação do teste de dois componentes. Todas as implementações computacionais foram realizadas em linguagem de programação R (R Core Team, 2014). Para a estimação dos parâmetros foram consideradas as funções do pacote *betategarch* (versão 3.1) (Sucarrat, 2013). Para as simulações de Monte Carlo foram consideradas 10000 réplicas e os tamanhos amostrais utilizados foram iguais a $n = 500, 1000, 2000, 3000$ e 5000 .

3.1 Avaliação dos estimadores pontuais

Nesta subseção será avaliada a performance dos EMV do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em amostras de tamanho finito por meio de simulações de Monte Carlo. Para a avaliação dos estimadores pontuais, em cada cenário avaliado, considerou-se média, viés, viés relativo percentual (VR %), variância (Var) e erro quadrático médio (EQM) de cada estimador. Alguns cenários considerados foram retirados dos exemplos simulados no trabalho de Sucarrat (2013). Os cenários possuem comportamento semelhante aos modelos ajustados nas aplicações em dados reais realizadas por Harvey & Sucarrat (2014).

Para gerar os retornos do modelo com um componente de volatilidade foi utilizada a estrutura apresentada na Equação (1). Na Tabela 1 são apresentados os resultados da avaliação numérica dos EMV utilizando o seguinte cenário: $\omega = 0,1$, $\phi_1 = 0,95$, $\kappa_1 = 0,05$, $\kappa^* = 0,02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0,8$. O segundo cenário ilustrado na Tabela 2 não considera o componente de assimetria (γ) e o terceiro cenário exposto na Tabela 3 não possui o componente de alavancagem (κ^*). Os demais valores dos parâmetros permanecem os mesmos da Tabela 1.

Ao analisar as estimativas de Monte Carlo apresentadas na Tabela 1, identifica-se que $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}_1$, $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}^*$ e $\hat{\gamma}$ do modelo com um componente, independente do tamanho amostral, exibem vieses próximos a zero. As estimativas de ϕ_1 , embora próximas ao valor do parâmetro, para o modelo com um componente, em nenhum dos tamanhos amostrais analisados chega a ser numericamente igual ao valor paramétrico. As estimativas do parâmetro ARCH, $\hat{\kappa}_1$, mostraram-se mais comportadas. Para o cenário sem o componente de alavancagem, ilustrado na Tabela 3, verifica-se que para o tamanho amostral 500 a estimativa média do parâmetro ARCH foi numericamente igual a do valor do parâmetro. Para o modelo GARCH clássico, Hwang & Pereira (2006) sugerem que o tamanho amostral adequado para modelar um GARCH (1,1) deve ser de no mínimo 500 observações e para um modelo ARCH (1) 250 observações. Também, observa-se que o viés das estimativas de $\hat{\phi}_1$ e de $\hat{\kappa}_1$ são negativas para o modelo com um componente. Esse resultado é consistente com os encontrados por Hwang & Pereira (2006) para os EMV do modelo GARCH. Em aplicações práticas, Fantazzini (2009) observa que o modelo VaR (Valor-em-Risco) (Jorion, 2007) estimado com modelos GARCH apresenta estimativas pobres em pequenas amostras. O viés negativo identificado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH nos tamanhos amostrais menores, indica que em média o modelo tende a subestimar a persistência dos *clusters* (ϕ) e o impacto dos choques passados (κ). Isso pode comprometer as inferências realizadas com o modelo em pequenas amostras.

Relativo aos graus de liberdade, nota-se que as estimativas de ν são bastante distorcidas. Esse resultado é mais acentuado para o tamanho amostral 500, onde $\hat{\nu}=59,267$, para $\nu = 10$. No cenário sem o componente de alavancagem (Tabela 3), percebe-se que para esse tamanho amostral o estimador apresentou resultados médios mais próximos ao valor do parâmetro ($\hat{\nu} = 18,063$). De maneira geral, observa-se que os melhores resultados para $\hat{\nu}$, nos três cenários avaliados, são identificados para tamanhos amostrais superiores ou iguais a 2000. Nesses cenários, para esse valor de n , é identificado um viés relativo percentual de aproximadamente 7,30%. Para os estimadores do modelo Cópula GARCH com distribuição *t*-Student, para dados assimétricos, Bianchi *et al.* (2011) identificaram viés de até 30% superior ao parâmetro graus de liberdade para o mesmo tamanho amostral. De acordo com Fernández & Steel (1998) o parâmetro de assimetria controla a alocação da massa e os graus de liberdade representam o comportamento da cauda (*tail*) da distribuição de dados. O uso de distribuições que acomodam

as caudas pesadas reduz a influência de *outliers* e produz estimativas mais robustas (Fonseca *et al.*, 2008). Séries financeiras apresentam evidências de presença de caudas pesadas (Jacquier *et al.*, 2004). Uma estimativa mal comportada dos graus de liberdade pode resultar na utilização de uma distribuição imprópria para modelar os dados com essa característica (Fonseca *et al.*, 2008), pois a medida que $\nu \rightarrow \infty$ a distribuição se aproxima da normal (Dánielsson, 2011). Dessa forma, conforme aumentam os graus de liberdade naturalmente menor será a curtose excedente. O alto viés identificado para o estimador $\hat{\nu}$ pode resultar no incorreto ajuste das caudas pesadas presentes em séries financeiras e econômicas com tamanhos amostrais inferiores a 2000.

Verifica-se também que $\hat{\nu}$ apresenta altos valores de EQM nos tamanhos amostrais menores que 2000. Conforme observado na Tabela 1 para $n = 500$ o EQM é $174,187 \times 10^5$ e para $n = 1000$ obtêm-se EQM = 452,943, enquanto para $n = 2000$ identificou-se EQM = 6,991. Para os demais estimadores, a medida que o tamanho amostral aumenta o valor do EQM converge para zero mais rapidamente. Esse comportamento indica que os estimadores são consistentes. O EQM incorpora dois componentes importantes para avaliação dos estimadores, um deles é mensurar a variabilidade (precisão) e outro mensurar o viés (exatidão) do estimador (Casella & Berger, 2002).

Com a finalidade de investigar se o viés de $\hat{\nu}$ permanece alto conforme a curtose excedente aumenta, realizou-se a avaliação numérica dos estimadores com os valores ν iguais a 5 e a 7. Os resultados serão omitidos por questão de brevidade. Com a nova estrutura observou-se que o viés, bem como o viés relativo percentual do estimador diminui nos cenários com menores valores de ν . Para $n = 500$ e $\nu = 10$ obteve-se o VR % igual a 492,675 % (Tabela 1), já para $\nu = 7$ identificou-se VR = 30,037 % e enquanto para $\nu = 5$ o viés relativo foi igual a 12,942%. Ainda, constata-se que os valores da variância e do EQM de $\hat{\nu}$ reduziram. No tamanho amostral 500 e $\nu = 10$ identificou-se que a variância do estimador foi igual a $174,163 \times 10^5$; já para $\nu = 5$ obteve-se variância igual a 8,928.

Um resultado interessante apontado por Iglesias & Phillips (2012) ao analisar as propriedades dos estimadores do modelo GARCH-em-média, é que o viés e a variância desses estimadores é menor para processos que possuem maior persistência da volatilidade. Desse modo, almeja-se avaliar se esse comportamento é observado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH. Foram realizadas duas simulações adicionais, que serão

omitidas por questão de brevidade. Na primeira foi elevado o valor do parâmetro de persistência ($\phi_1 = 0,98$), no segundo o parâmetro que avalia a resposta aos choques ($\kappa_1 = 0,10$). Os valores dos demais parâmetros permaneceram os mesmos da Tabela 1. Um resultado interessante observado, foi a redução do viés do estimador dos graus de liberdade, principalmente para $n = 500$. No primeiro cenário avaliado a redução não foi tão expressiva, identificando-se um valor $\hat{\nu} = 44,255$ e $VR(\%) = 342,545$, para $\nu = 10$. No entanto, quando ocorreu aumento do parâmetro κ , a redução observada foi maior; $\hat{\nu} = 27,423$ e $VR(\%) = 174,229$. Esses resultados, possivelmente, indicam que processos com maior persistência a *clusters* e maior resposta a choques apresentam estatísticas mais comportadas para o parâmetro graus de liberdade do modelo em análise.

Dando seguimento, para gerar os retornos do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes de volatilidade foi utilizada a estrutura da Equação (4). Para esse cenário fixou-se os seguintes valores para os parâmetros: $\omega = 0,2$, $\phi_1 = 0,98$, $\phi_2 = 0,90$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa_2 = 0,02$, $\kappa^* = 0,04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0,95$. Os resultados referentes a essa avaliação são ilustrados na Tabela 4. Nota-se que a medida que o tamanho amostral aumenta a média dos estimadores $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\gamma}$ tornam-se mais próximos dos valores dos parâmetros. Em relação aos estimadores $\hat{\phi}_2$, $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ e $\hat{\nu}$ verifica-se que seus resultados diferem substancialmente dos valores do parâmetro, principalmente em $n = 500$, 1000 e 2000 . Diferentemente do estimador do parâmetro ARCH do modelo com um componente de volatilidade verifica-se que o viés relativo percentual dos estimadores $\hat{\kappa}_1$ e $\hat{\kappa}_2$ é alto, até mesmo para o tamanho amostral igual a 5000 . Para $n = 5000$ o VR % de $\hat{\kappa}_1$ foi igual a $51,130\%$ e para $\hat{\kappa}_2$ o VR = $-32,780\%$. O alto viés identificado para o estimador ARCH de curto e longo prazo pode comprometer as inferências realizadas com o modelo Beta-Skew-t-EGARCH de dois componentes. Como observado o viés do estimador do componente ARCH de curto prazo (κ_2) é negativo. Esse comportamento poderá resultar na subestimação dos efeitos transitórios da resposta a choques. Ao passo que o viés positivo do componente ARCH de longo prazo (κ_1) irá superestimar em média os efeitos mais lentos. No que diz respeito aos estimadores GARCH de curto e longo prazo, identificou-se que o viés relativo percentual é negativo, no entanto, é próximo a zero para tamanhos amostrais maiores que 1000 .

Ainda, referente ao modelo de dois componente, nota-se que a variância e o EQM dos estimadores diminuem quando o tamanho amostral aumenta.

Esse comportamento indica a consistência dos EMV, o que é esperado pelas propriedades assintóticas dos EMV. No entanto, sua análise serve para determinar a ordem de convergência das estimativas dos parâmetros. Verificou-se que para alguns estimadores a convergência é mais lenta, o que os torna ruins em amostras moderadas e pequenas. Para o tamanho amostral igual a 5000, percebe-se que o valor do EQM e da variância se assemelham, exceto para o estimador $\hat{\nu}$. Entretanto, diferentemente do modelo com um componente, $\hat{\nu}$ apresenta viés relativo menor e valor médio mais próximo ao do parâmetro. Ao investigar se as estimativas de ν permanecem comportadas ao elevar o valor do parâmetro de 5 para 10, observou-se que para maiores valores de ν , tanto as estimativas dos graus de liberdade, quanto as estimativas de κ , tornam-se mais viesadas percentualmente. Além disso, apresentam maior variância e maior valor de EQM. Esse resultado está de acordo com o resultado observado para os estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente.

Uma das explicações para o alto viés relativo identificado para $\hat{\kappa}_1$ e $\hat{\kappa}_2$ é que esses parâmetros usualmente assumem valores próximos a zero, o que pode contribuir para a grande dispersão dos resultados e para o alto VR percentual. Com o intuito de investigar se a persistência dos choques (dada pelo valor de κ) e se a persistência dos *clusters* (dada pelo valor de ϕ) pode estar associado ao alto VR (%) realizou-se três avaliações numéricas adicionais em relação ao cenário utilizado para avaliação numérica dos resultados apresentados na Tabela 4. Por questão de brevidade os resultados completos da simulação também serão omitidos. Na primeira foi elevado o valor dos parâmetros que capturam a resposta dos choques, $\kappa_1 = 0,06$ e $\kappa_2 = 0,12$. Na segunda avaliação, buscou-se verificar se a redução dos parâmetros que capturam a persistência dos *clusters* influencia no viés dos estimadores. Os valores considerados foram iguais a $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$. Na terceira avaliação considerou-se concomitantemente as duas alterações, em que os valores dos parâmetros foram fixados em $\phi_1 = 0,93$, $\phi_2 = 0,85$, $\kappa_1 = 0,06$ e $\kappa_2 = 0,12$. Os valores dos demais parâmetros foram iguais aos da Tabela 4. Por meio dessas simulações foram identificados interessantes resultados. Ao alterar somente os valores dos parâmetros de curto e longo prazo de κ notou-se expressiva redução do viés relativo. Para $n = 500$, o VR (%) de κ_1 foi igual a 224,652 % e para κ_2 foi igual a -119,488 %. Com relação aos demais parâmetros não foram observadas muitas diferenças. Outro ponto interessante observado nessa avaliação numérica é que o viés relativo dos estimadores do parâmetro κ é pequeno no

tamanho amostral 1000. Relativo a segunda avaliação realizada, percebe-se que ao diminuir os valores de ϕ é observado poucas alterações no valor do viés relativo percentual comparado aos resultados observados na Tabela 4. Ao alterar os parâmetros κ e ϕ de curto e longo prazo, identificou-se que embora seus estimadores apresentaram alto viés relativo, seus valores foram consideravelmente menores. A título de exemplo, nota-se que quando $n = 500$ obteve-se $VR=346,748\%$ e $VR=-179,177\%$ para κ_1 e κ_2 , respectivamente. No cenário da Tabela 4 obteve-se os seguintes valores de VR para κ_1 e κ_2 : $1197,432\%$ e $-661,161\%$. Esses resultados favorecem a ideia de que dados que apresentem comportamento de memória longa, com maior respostas a choques (maior valor do parâmetro ARCH), resultarão em estimativas menos viesadas percentualmente.

Desse modo, ao realizar a avaliação numérica dos estimadores pontuais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, demonstrou-se que a estimação apresenta dificuldades em amostras menores, principalmente para os valores de n menores ou iguais a 1000. Sugere-se que o tamanho amostral mínimo a ser considerado em análises práticas para ajustes do modelo com um componente de volatilidade seja 2000 observações. Nesse tamanho amostral o viés das estimativas de todos os parâmetros é próximo a zero. Esses resultados estendem as evidências de simulação identificadas por Bianchi *et al.* (2011), que no entanto, analisam o modelo Cópula GARCH para o caso em que os choques aleatórios seguem a distribuição *t*-Student. Além disso, percebeu-se que em dados com maior curtose excedente os estimadores apresentam melhores propriedades. Para o modelo com dois componentes é recomendado utilizar uma amostra de no mínimo 3000 observações, uma vez que as estimativas do parâmetro ARCH de curto e longo prazo apresentam alto viés relativo percentual para tamanhos amostrais menores.

3.2 Avaliação do teste de dois componentes

Nesta subseção será analisado o desempenho do teste da razão de verossimilhanças proposto para testar se a série deve ser modelada com um ou com dois componentes de volatilidade. São consideradas simulações de Monte Carlo para avaliação da taxa de rejeição nula do teste (tamanho), da taxa de rejeição não nula do teste (poder) e da qualidade da aproximação da distribuição da estatística de teste LR à sua distribuição nula limite qui-quadrado.

Na avaliação numérica da taxa de rejeição nula do teste simulou-se os dados por meio da estrutura dada em (1). Foram avaliados os níveis nominais iguais a 1%, 5% e 10%. Nessa avaliação, foram analisados diferentes

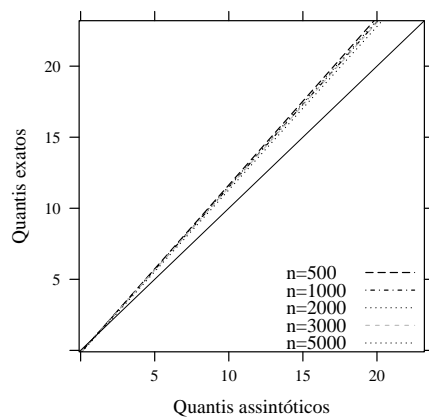
cenários sob hipótese nula. No primeiro cenário os valores dos parâmetros foram iguais aos considerados na Tabela 1. Esse cenário será nomeado de Cenário 1. Para avaliar a influência da maior persistência de *clusters* e da maior resposta a choques no desempenho do teste de dois componentes realizou-se duas simulações alterando os parâmetros de interesse ϕ_1 e κ_1 , respectivamente. No primeiro caso, o valor de ϕ_1 foi igual a 0,98 (Cenário 2 na Tabela 5) e no segundo caso o valor de κ_1 foi igual a 0,10 (Cenário 3 na Tabela 5). O valor dos demais parâmetros manteve-se igual ao do Cenário 1. Para um outro cenário avaliado, fixou-se os seguintes valores para os parâmetros do modelo: $\omega = 0,020$, $\phi_1 = 0,9673$, $\kappa_1 = 0,01$, $\kappa^* = 0,0356$, $\nu = 10,37$ e $\gamma = 0,905$. Esse cenário é intitulado de Cenário 4 (Tabela 5). Da mesma forma, que ao primeiro cenário, foram realizadas duas avaliações numéricas adicionais alterando os valores de ϕ_1 e de κ_1 . Para a primeira avaliação considerou-se $\phi_1 = 0,9873$ (Cenário 5) e para a segunda $\kappa_1 = 0,05$.

Ao analisar os resultados da Tabela 5 observa-se que a taxa de rejeição nula do teste apresenta pequenas distorções em relação ao valor nominal. As maiores taxas de rejeição são observadas para o nível nominal igual a 1%. Por exemplo, para o tamanho amostral 500, observa-se taxas de rejeição nula iguais a 1,930% para o Cenário 1 e 2,000% para o Cenário 4. Esse resultado é aproximadamente o dobro do valor nominal. Também é observado que a maior persistência a *clusters* e a maior resposta a choques acarreta maior distorção na taxa de rejeição nula do teste. A título de exemplo, para $n = 500$ e valor nominal 10%, nota-se que no Cenário 1 a taxa de rejeição nula é igual a 13,560%, no Cenário 2 (maior persistência a *clusters*) a taxa foi de 16,050% e no Cenário 3 (maior persistência a choques) a taxa de rejeição nula foi 15,050%. Outro detalhe observado, é que de maneira geral a medida que o tamanho amostral aumenta observa-se taxas de rejeição nula próximas aos valores nominais.

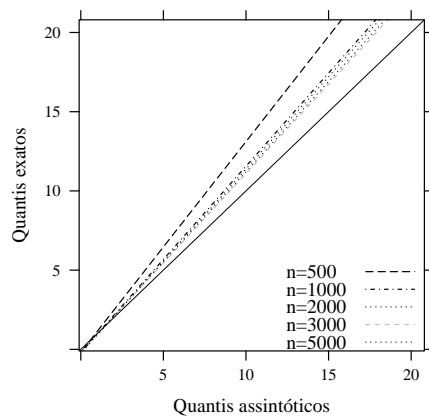
O desempenho identificado para o teste de dois componentes está de acordo com o desempenho dos estimadores pontuais. Conforme apresentado, os estimadores do modelo apresentam resultados médios distorcidos em tamanhos amostrais $n=500$ e $n=1000$, o que pode justificar as pequenas distorções de tamanho do teste proposto nesses tamanhos amostrais.

Para verificar a aproximação da distribuição da estatística LR pela distribuição qui-quadrado apresenta-se na Figura 1 o gráfico QQ-Plot (quantis empíricos exatos versus quantis assintóticos) para os Cenários 1 e 2 expostos na Tabela 5 para os diferentes tamanhos amostrais. Conforme observado, a

distribuição nula do teste de dois componentes está próxima da distribuição de referência (linha sólida). Esse resultado sugere que a tendência do teste é rejeitar a hipótese nula com frequência semelhante ao nível nominal.



(a) Cenário 1



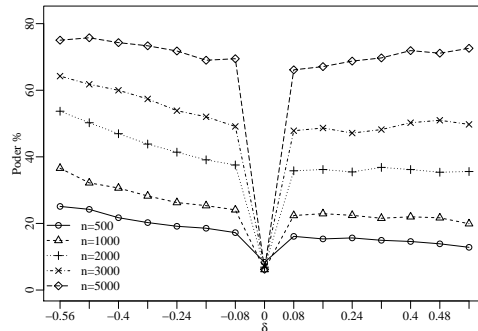
(b) Cenário 2

Figura 1

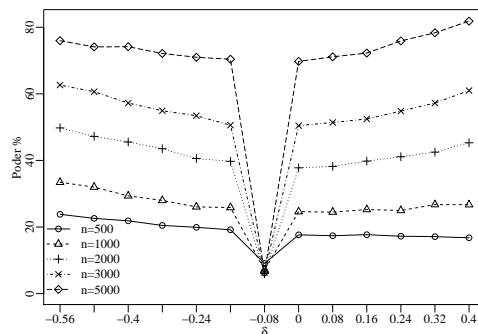
Gráfico quantil-quantil da distribuição da estatística de teste, para diferentes tamanhos amostrais

Após a análise das taxas de rejeição nula, investigou-se as taxas de

rejeição não nula (poder) do teste. Para essa avaliação os dados do modelo de dois componentes foram simulados por meio da Equação (4). Nessa análise foram utilizados os valores dos parâmetros do Cenário 1 e do Cenário 2 avaliados na Tabela 5 e ϕ_2 e κ_2 variaram para diferentes valores de δ e $\delta/30$, respectivamente. Os valores de δ utilizados foram -0,56, -0,48, -0,40, -0,32, -0,24, -0,16, -0,08, 0, 0,08, 0,16, 0,24, 0,32, 0,40, 0,48 e 0,56.



(a) Cenário 1



(b) Cenário 2

Figura 2

Gráfico das taxas de rejeição não nula (%) do teste de dois componentes, para os diferentes tamanhos amostrais e valores de δ avaliados

Na Figura 2 são observados os resultados da simulação de Monte Carlo realizada para a taxa de rejeição não nula do teste de dois componentes. Como observado, a medida que os valores de δ se distanciam de zero (eixo X) o teste torna-se mais poderoso. Esse resultado é mais acentuado principalmente para os tamanhos amostrais iguais a 3000 e 5000. Um detalhe

interessante observado para esses valores de n é o poder do teste para valores de δ iguais a $-0,08$ e $0,08$. Esse valor de δ corresponde a $\pm\phi_2 = 0,08$ e a $\pm\kappa_2 = 0,08/30$. Desse modo, conforme visualizado na Figura 2, nota-se que mesmo para pequenas alterações nos valores de ϕ_2 e κ_2 , e para n maior que 2000, o teste de dois componentes proposto consegue rejeitar a hipótese incorreta de que eles são iguais a zero. Esse resultado fortalece a utilização do teste de dois componentes para testar se a série de dados deve ser ajustada por meio de um modelo com um ou dois componentes de volatilidade.

De maneira geral, percebe-se que o teste de dois componentes é afetado pelos tamanhos amostrais de forma mais amena que os estimadores pontuais. Sugere-se a utilização do teste em amostras de tamanho iguais ou superiores a 1000 observações. Nesses cenários, conforme a análise realizada, percebeu-se que o teste consegue detectar pequenas alterações nos valores de ϕ_2 e κ_2 . Nos trabalhos de Bollerslev (1987), Alexander & Lazar (2006) e Chen & Shen (2004) são encontradas outras utilizações do teste da razão de verossimilhanças para testar um parâmetro de interesse em modelos GARCH.

4. Aplicação

Nesta seção será realizada uma aplicação a dados reais do modelo Beta-Skew-t-EGARCH e do teste de dois componentes proposto. Os dados utilizados são referentes ao índice de mercado da Alemanha, DAX 30. A série de dados foi coletada no site Yahoo Finanças. O período amostral analisado compreende 23 de novembro de 1995 a 20 de agosto de 2014, totalizando 4752 observações diárias.

Na base de dados inicial foram calculados os log-retornos da série, por meio da estrutura $y_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$, em que $t = 1, \dots, 4752$ e P_t é o preço da série no instante t . A série de retornos costuma apresentar propriedades atrativas, como estacionariedade e ausência de autocorrelação (Shimizu, 2010, Aiube, 2012). Para analisar se a série transformada é estacionária realizou-se o teste ADF (Said & Dickey, 1984) e o teste KPSS (Kwiatkowski *et al.*, 1992). Ambos os testes diferem em relação às suas hipóteses nulas. A hipótese nula do teste ADF indica presença de raiz unitária (não estacionariedade) da série e a hipótese nula do teste KPSS assinala estacionariedade da série. Conforme observado na Tabela 6, o teste ADF rejeita a hipótese nula de presença de raiz unitária e o teste KPSS não rejeita a hipótese nula de estacionariedade da série.

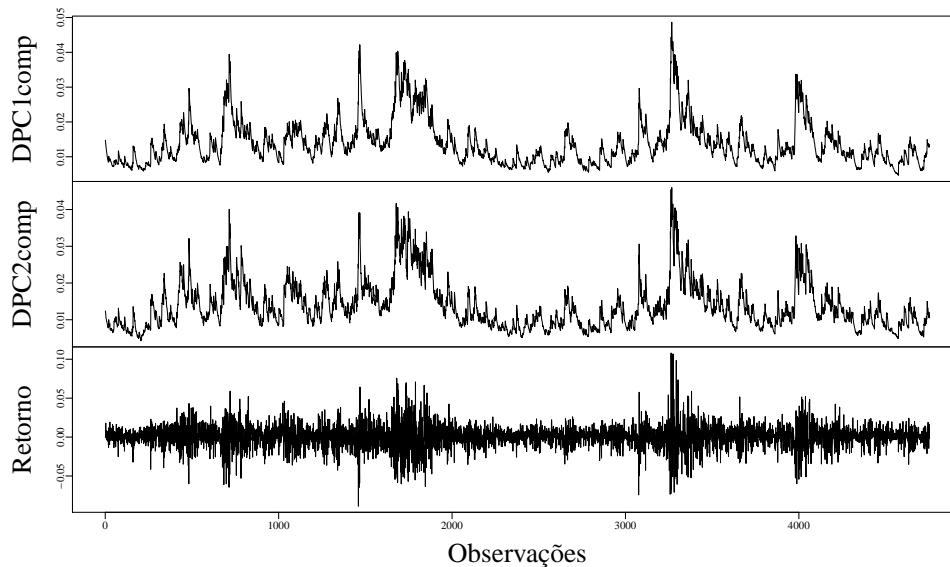
Na Tabela 6 ainda são identificadas as estatísticas descritivas dos log-retornos do índice DAX 30. De acordo com os resultados do teste Jarque-Bera (JB) (Jarque & Bera, 1987), dos valores da curtose e da assimetria negativa, percebe-se que os retornos do índice DAX apresentam fatos estilizados como distribuição não normal e caudas pesadas. A presença de leptocurtose na série de retornos sugere o uso de uma distribuição não gaussiana para modelar o comportamento das caudas. Por fim, o teste Multiplicador de Lagrange (LM) (Engle, 1982) revela a presença de heterocedasticidade condicional na série de retornos do índice DAX 30. Esses resultados favorecem o uso do modelo Beta-Skew-t-EGARCH, em que os choques aleatórios seguem distribuição t -Student assimétrica. Harvey & Sucarrat (2014) e Sucarrat (2013) sugerem que o modelo Beta-Skew-t-EGARCH acomoda a assimetria e as caudas pesadas usualmente presentes em séries financeiras.

Após análise das estatísticas descritivas procedeu-se o teste de dois componentes, com a finalidade de identificar se a série deve ser modelada por meio de um modelo com um ou com dois componentes de volatilidade. O teste de dois componentes proposto na Subseção 2.3 apresentou estatística 61,416 e p -valor menor que 0,001. Dessa forma, a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0)$ é rejeitada a níveis de significância usuais, sugerindo a utilização do modelo Beta-Skew-t-EGARCH de dois componentes para modelar a série de dados. O modelo de dois componentes de volatilidade acomoda a propriedade de longa memória presente na autocorrelação dos valores absolutos de algumas séries financeiras (Harvey & Sucarrat, 2014). O indício de memória longa sugere que o mercado não respondeu de imediato a informações que chegam ao sistema financeiro, mas reagiu a ele gradualmente ao longo do tempo (Bentes, 2014). Bentes (2014) ao aplicar o modelo FIGARCH aos dados do índice DAX, em outro período amostral, demonstra que o índice de mercado apresenta comportamento de memória longa. Uma explicação para presença da persistência de longo prazo na série de retornos do índice DAX, segundo Bentes (2014), é que mercados como o da Alemanha são mais propensos a sofrer oscilações correlacionadas, além de estarem mais predispostos a serem influenciados por investidores agressivos.

Na Tabela 7 são apresentados os modelos Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes ajustado. Com base nos resultados, verificou-se que o modelo de volatilidade com dois componentes de volatilidade apresenta maior log-verossimilhança, o que era esperado pelo resultado do teste

de dois componentes, além de menor valor para o critério BIC. Os resultados do modelo de dois componentes demonstram que os graus de liberdade são 10,447, o que indica presença de caudas pesadas na distribuição, enquanto a assimetria menor que 1 (0,879) sugere assimetria negativa na série de retornos. Desse modo, corroborando com as estatísticas descritivas, espera-se que retornos abaixo da média sejam mais prováveis que retornos acima da média. O valor positivo da estimativa do parâmetro de alavancagem $\hat{\kappa}^*$ indica que choques negativos tem um efeito maior sobre a volatilidade da série de retornos do índice DAX, comparado a choques positivos. Na Figura 3 são observados os desvios padrões (DP) condicionais estimados pelos modelos com um e com dois componentes e a série de log-retornos. A série de retornos exibe agrupamentos de volatilidade. Os períodos de maior variabilidade na série são observados nos anos de 1998, que coincidem com a crise asiática e em seguida com o período da crise Russa. Nos anos de 2008 a 2009 e 2011 a 2012, os períodos de maior instabilidade observados na série do índice DAX coincidem com os períodos da crise Subprime e com a crise da zona do euro, respectivamente. Modelos de volatilidade devem mensurar com acurácia o aumento da variabilidade observada nos ativos financeiros para fornecer informações precisas para a gestão do risco das carteiras (Mcneil *et al.*, 2005), estratégias de *hedging* e apreçamento de ativos. Além de serem capazes de prever a volatilidade futura dos ativos (Engle & Patton, 2001).

Ao analisar a série do desvio padrão condicional estimado pelo modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, para o índice de mercado DAX 30, observa-se que os picos de variabilidade observados na série de retornos foram capturados pelo modelo estimado. Para analisar a adequação do modelo realizou-se a análise da autocorrelação no quadrado dos resíduos padronizados ($\hat{\varepsilon}_t^2$), por meio do teste Ljung-Box. O teste (a 5% de significância) sinaliza que os resíduos com dois componentes são independentes, ou seja, não é identificada presença de autocorrelação significativa na série. Para a série $\hat{\varepsilon}_t^2$ do modelo com um componente é observado que o teste é significativo a 5%, sendo um indício de presença de correlação serial. Ao realizar o teste LM (a 5% de significância) nos resíduos padronizados percebe-se que para o modelo de volatilidade com dois componentes o teste indica que não há sinais de heterocedasticidade condicional. Diferentemente do que é observado para os resíduos do modelo com um componente de volatilidade. Desse modo, por meio da análise de diagnóstico realizada verifica-se que o modelo de dois componentes ajustado não pos-

**Figura 3**

Desvio padrão condicional estimado pelo modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes e série de retornos do índice de mercado DAX 30

sua informações na série de resíduos, demonstrando melhor qualidade de ajuste e corroborando com o resultado do teste de dois componentes.

No trabalho de Blazsek & Villatoro (2015) é apresentado um estudo comparativo entre o modelo Beta-t-EGARCH(1,1) e o modelo GARCH(1,1). Os autores concluem que o modelo Beta-t-EGARCH é um modelo adequado para modelar séries financeiras após períodos de alta volatilidade. Com base nos resultados encontrados nesse trabalho e no trabalho de Blazsek & Villatoro (2015), sugere-se para futuras aplicações a utilização do modelo proposto por Harvey & Sucarrat (2014), além do teste de dois componentes apresentado nesse trabalho. No link www.ufsm.br/bayer/dois-componentes.zip está disponível uma função em R para realização do teste proposto.

5. Considerações finais

O modelo de volatilidade Beta-Skew-t-EGARCH foi apresentado na literatura como alternativa para modelar séries temporais com assimetria, caudas pesadas e *outliers*. Além disso, o modelo permite decompor a volatilidade em um componente de longo prazo e outro de curto prazo. A estimação dos parâmetros do modelo é baseada no método de máxima verossimilhança. Como relatado ao longo do trabalho esses estimadores podem conduzir a resultados inferenciais distorcidos em pequenas amostras (Hwang & Pereira, 2006, Xie, 2009, Bianchi *et al.*, 2011). Nesse sentido, esse trabalho analisou por meio de simulações de Monte Carlo as propriedades dos estimadores do modelo Beta-Skew-t-EGARCH em amostras de tamanho finito. Também foi proposto um teste da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula de que os parâmetros ϕ_2 e κ_2 são nulos (modelo com um componente), contra a hipótese alternativa de que são diferentes de zero (modelo de dois componentes).

Os resultados da avaliação numérica evidenciaram que as estimativas do modelo de volatilidade com um componente são menos distorcidas em tamanhos amostrais maiores que 2000 e os estimadores do modelo com dois componentes demonstraram melhores propriedades em tamanhos amostrais superiores a 3000. O teste de dois componentes apresentou taxas de rejeição liberais em tamanhos amostrais menores que 1000. Para valores de n maiores ou iguais a 1000, o teste demonstrou ser bastante acurado para detectar pequenas alterações no valor dos parâmetros de interesse (ϕ_2 e κ_2).

Na aplicação a dados reais do índice de mercado DAX, em tamanhos amostrais ideais, o teste demonstrou ser adequado para selecionar o modelo ajustado aos dados. Conforme observado, verificou-se que o modelo selecionado demonstrou boa qualidade de ajuste e captou os períodos de maior e menor instabilidade presentes na série financeira. Corroborando com os resultados apresentados no trabalho Blazsek & Villatoro (2015), constata-se que o modelo Beta-Skew-t-EGARCH pode ser uma ferramenta promissora para modelar a volatilidade de séries financeiras.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil, pelo auxílio financeiro re-



cebido. Os autores também agradecem às valiosas sugestões dadas pelos revisores do artigo.

Referências

- Adrian, Tobias, & Rosenberg, Joshua. 2008. Stock returns and volatility: pricing the short-run and long-run components of market risk. *The Journal of Finance*, **63**(6), 2997–3030.
- Aiube, Fernando Antonio Lucena. 2012. *Modelos quantitativos em finanças: com enfoque em commodities*. Bookman Companhia Editora Ltda.
- Alexander, Carol, & Lazar, Emese. 2006. Normal mixture GARCH(1,1): applications to exchange rate modelling. *Journal of Applied Econometrics*, **21**(3), 307–336.
- Andersen, Torben G., Davis, Richard A., KreiB, Jens-Peter, & Mikosch, Thomas (eds). 2009. *Handbook of Financial Time Series*. Springer.
- Bentes, Sonia R. 2014. Measuring persistence in stock market volatility using the FIGARCH approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **408**, 190–197.
- Bianchi, Carluccio, Giuli, Maria Elena De, Fantazzini, Dean, & Maggi, Mario. 2011. Small sample properties of copula-GARCH modelling: a Monte Carlo study. *Applied Financial Economics*, **21**(21), 1587–1597.
- Blazsek, Szabolcs, & Villatoro, Marco. 2015. Is Beta-t-EGARCH(1,1) superior to GARCH(1,1)? *Applied Economics*, **47**(17), 1764–1774.
- Bollerslev, Tim. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, Tim. 1987. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, **69**, 542–547.
- Box, George E. P., & Pierce, David A. 1970. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, **65**(332), 1509–1526.

- Busch, Thomas. 2005. A robust LR test for the GARCH model. *Economics Letters*, **88**(3), 358 – 364.
- Casella, George, & Berger, Roher L. 2002. *Statistical inference*. 2 edn. Duxbury.
- Chan, Felix, & McAleer, Michael. 2002. Maximum likelihood estimation of STAR and STAR-GARCH models: theory and Monte Carlo evidence. *Journal of Applied Econometrics*, **17**(5), 509–534.
- Chen, Shyh-Wei, & Shen, Chung-Hua. 2004. GARCH, jumps and permanent and transitory components of volatility: the case of the Taiwan exchange rate. *Mathematics and Computers in Simulation*, **67**(3), 201–216.
- Cho, Jang Hyung, & Elshahat, A. F. 2011. Predicting time-varying long-run variance - modified component GARCH model approach. *Journal of Financial and Economic Practice*, **11**(1), 52–68.
- Christoffersen, Peter, Jacobs, Kris, Ornathanalai, Chayawat, & Wang, Yintian. 2008. Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, **90**(3), 272–297.
- Cordeiro, Gauss M., & Cribari-Neto, Francisco. 2014. *An introduction to Bartlett correction and bias reduction*. Springer Briefs in Statistics.
- Creal, Drew, Koopman, Siem Jan, & Lucas, Andre. 2011. A dynamic multivariate heavy-tailed model for time-varying volatilities and correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, **29**(4), 552–563.
- Creal, Drew, Koopman, Siem Jan, & Lucas, Andr013. Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, **28**(5), 777–795.
- Daniélsson, Jón. 2011. *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*. A John Wiley & Sons.
- Douc, Randal, Moulines, Éric, & Rydén, Tobias. 2004. Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with Markov regime. *The Annals of Statistics*, **32**(5), 2254–2304.

- Engle, Robert F. 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, **50**(4), 987–1007.
- Engle, Robert F., & Lee, Gary G.J. 1999. *Cointegration, causality, and forecasting: a Festschrift in Honour of Clive W.J. Granger*. Oxford: Oxford University Press. Chap. A long-run and a short-run component model of stock return volatility.
- Engle, Robert F., & Patton, Andrew J. 2001. What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, **1**(2), 237–245.
- Engle, Robert F., Hendry, David F., & Trumble, David. 1985. Small-sample properties of ARCH estimators and tests. *The Canadian Journal of Economics*, **18**(1), 66–93.
- Fantazzini, Dean. 2009. The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: a Monte Carlo study. *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**(6), 2168–2188.
- Fernández, Carmen, & Steel, Mark F. J. 1998. On bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 359–371.
- Ferrari, Silvia L. P., Silva, Michel Ferreira Da, & Cribari-Neto, Francisco. 2005. Adjusted profile likelihood for two-parameter exponential family models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **34**(2), 257–276.
- Fonseca, Thaís C. O., Ferreira, Marco A. R., & Migon, Helio S. 2008. Objective bayesian analysis for the student-t regression model. *Biometrika*, **95**(2), 325–333.
- Francq, Christian, & Zakoian, Jean Michel. 2010. *GARCH models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. A John Wiley and Sons.
- Guo, Hui, & Neely, Christopher J. 2008. Investigating the intertemporal risk return relation in international stock markets with the component GARCH model. *Economics Letters*, **99**(2), 371–374.

- Harvey, Andrew, & Chakravarty, Tirthankar. 2008. Beta-t-EGARCH. *Working Paper*.
- Harvey, Andrew, & Sucarrat, Genaro. 2014. EGARCH models with fat tails, skewness and leverage. *Computational Statistics & Data Analysis*, **76**, 320–338.
- Harvey, Andrew C. 2013. *Dynamic models for volatility and heavy tails*. New York: Cambridge University Press.
- Hippel, Paul T. von. 2013. The bias and efficiency of incomplete-data estimators in small univariate normal samples. *Sociological Methods & Research*, **42**(4), 531–558.
- Hwang, Soosung, & Pereira, Pedro L. Valls. 2006. Small sample properties of GARCH estimates and persistence. *The European Journal of Finance*, **12**(6-7), 473–494.
- Iglesias, Emma M., & Phillips, Garry D. A. 2012. Estimation, testing, and finite sample properties of quasi-maximum likelihood estimators in GARCH-M models. *Econometric Reviews*, **31**(5), 532–557.
- Jacquier, Eric, Polson, Nicholas G., & Rossi, Peter E. 2004. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, **122**(1), 185 – 212.
- Jarque, Carlos M., & Bera, Anil K. 1987. A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, **55**(2), 163–172.
- Jorion, Philippe. 2007. *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*. 3 edn. Hardcover.
- Kebłowski, Piotr. 2005. Small sample power of Bartlett corrected likelihood ratio test of cointegration rank. *Working Paper*.
- Kenward, Michael G., & Roger, James H. 1997. Small sample inference for fixed effects from restricted maximum likelihood. *Biometrics*, **53**(3), 983–997.
- Kwiatkowski, Denis, Phillips, Peter C. B., Schmidt, Peter, & Shin, Yongcheol. 1992. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, **54**(1-3), 159–178.

- Lehmann, Erich Leo. 1983. *Theory of point estimation*. New York: Wiley.
- Lindsey, James K. 1996. *Parametric statistical inference*. Oxford Science Publications.
- Liu, Ming. 2000. Modeling long memory in stock market volatility. *Journal of Econometrics*, **99**(1), 139–171.
- Ljung, Greta M., & Box, George E. P. 1978. On a measure of a lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65**(2), 297–303.
- Luger, Richard. 2012. Finite-sample bootstrap inference in GARCH models with heavy-tailed innovations. *Computational Statistics & Data Analysis*, **56**(11), 3198 – 3211.
- Lumsdaine, Robin L. 1995. Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business & Economic Statistics*, **13**(1).
- Mandelbrot, Benoit. 1963. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, **36**(4), 394–419.
- Mcneil, Alexander J., Rü, diger Frey, & Embrechts, Paul. 2005. *Quantitative risk management*. Princeton University Press.
- Mendes, Beatriz Vaz De. Melo. 2000. Assessing the bias of maximum likelihood estimates of contaminated GARCH models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **67**(4), 359–376.
- Noh, Jaesun. 1997. Small sample properties of GARCH(1,1) estimator under non-normality. *Economics Letters*, **55**(2), 161–164.
- Pawitan, Yudi. 2001. *In all Likelihood: statistical modelling and inference using likelihood*. Oxford Science Publications.
- R Core Team. 2014. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Said, Said E., & Dickey, David A. 1984. Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, **71**(3), 599–607.

- Shimizu, Kenichi. 2010. *Bootstrapping stationary ARMA-GARCH models*. Springer.
- Stein, Markus Chagas, da Silva, Michel Ferreira, & Duczmal, Luiz Henrique. 2014. Alternatives to the usual likelihood ratio test in mixed linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, **69**, 184–197.
- Sucarrat, Genaro. 2013. Betategarch: Simulation, Estimation and Forecasting of Beta-Skew-t-EGARCH Models. *The R Journal*, **5**(2), 137–147.
- Tsay, Ruey S. 2010. *Analysis of financial time series*. 3 edn. A John Wiley & Sons.
- Wang, Fangfang, & Ghysels, Eric. 2015. Econometric analysis for volatility component models. *Econometric Theory*, **31**(02), 362–393.
- Xie, Yingfu. 2009. Consistency of maximum likelihood estimators for the regime-switching GARCH model. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **43**(2), 153–165.

Tabela 1

Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e forte assimetria a esquerda, utilizando o seguinte cenário $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\kappa^* = 0, 02$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

$n = 500$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,926	0,048	0,022	59,267	0,797
Viés	0,001	-0,024	-0,002	0,002	49,267	-0,003
VR (%)	1,108	-2,503	-4,496	9,230	492,675	-0,377
Var	0,010	0,005	0,000	0,000	$174,163 \times 10^5$	0,003
EQM	0,010	0,006	0,000	0,000	$174,187 \times 10^5$	0,003
$n = 1000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,941	0,048	0,021	12,405	0,798
Viés	0,001	-0,009	-0,002	0,001	2,405	-0,002
VR (%)	0,993	-0,936	-3,124	3,287	24,049	-0,249
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	447,159	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	452,943	0,001
$n = 2000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,946	0,049	0,020	10,717	0,799
Viés	0,000	-0,004	-0,001	0,000	0,717	-0,001
VR (%)	0,270	-0,424	-1,463	1,859	7,167	-0,068
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	6,477	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	6,991	0,001
$n = 3000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,049	0,020	10,464	0,799
Viés	0,000	-0,003	-0,001	0,000	0,464	-0,001
VR (%)	0,375	-0,273	-1,021	1,221	4,638	-0,104
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	3,357	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	3,572	0,000
$n = 5000$						
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	0,020	10,242	0,800
Viés	0,000	-0,002	0,000	0,000	0,242	0,000
VR (%)	-0,011	-0,167	-0,388	0,937	2,418	-0,043
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	1,774	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	1,832	0,000

Tabela 2

Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente, com moderada alavancagem e sem assimetria, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\kappa^* = 0, 02$ e $\nu = 10$

$n = 500$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,104	0,926	0,047	0,022	26,167
Viés	0,004	-0,024	-0,003	0,002	16,167
VR (%)	4,254	-2,534	-5,425	9,305	161,665
Var	0,011	0,005	0,000	0,000	$698,457 \times 10^3$
EQM	0,011	0,006	0,000	0,000	$698,718 \times 10^3$
$n = 1000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,103	0,941	0,049	0,021	11,959
Viés	0,003	-0,009	-0,001	0,001	1,959
VR (%)	2,939	-0,969	-2,824	4,544	19,590
Var	0,005	0,001	0,000	0,000	68,053
EQM	0,005	0,001	0,000	0,000	71,891
$n = 2000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,102	0,946	0,049	0,020	10,735
Viés	0,002	-0,004	-0,001	0,000	0,735
VR (%)	2,052	-0,446	-1,704	2,013	7,355
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	8,962
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	9,503
$n = 3000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,101	0,947	0,050	0,020	10,467
Viés	0,001	-0,003	0,000	0,000	0,467
VR (%)	1,443	-0,277	-0,948	1,689	4,669
Var	0,002	0,000	0,000	0,000	3,444
EQM	0,002	0,000	0,000	0,000	3,662
$n = 5000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$
Média	0,101	0,949	0,050	0,020	10,295
Viés	0,001	-0,001	0,000	0,000	0,295
VR (%)	0,855	-0,149	-0,638	0,635	2,949
Var	0,001	0,000	0,000	0,000	1,798
EQM	0,001	0,000	0,000	0,000	1,885

Tabela 3

Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um componente de volatilidade, sem o parâmetro de alavancagem, utilizando como parâmetros $\omega = 0, 1$, $\phi_1 = 0, 95$, $\kappa_1 = 0, 05$, $\nu = 10$ e $\gamma = 0, 8$

$n = 500$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,098	0,920	0,050	18,063	0,798
Viés	-0,002	-0,030	0,000	8,063	-0,002
VR (%)	-2,181	-3,130	-0,306	80,629	-0,229
Var	0,011	0,008	0,000	$417,796 \times 10^1$	0,003
EQM	0,011	0,009	0,000	$424,296 \times 10^1$	0,003
$n = 1000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,101	0,939	0,050	12,329	0,799
Viés	0,001	-0,011	0,000	2,329	-0,001
VR (%)	0,820	-1,192	-0,895	23,288	-0,170
Var	0,005	0,001	0,000	578,133	0,001
EQM	0,005	0,001	0,000	583,556	0,001
$n = 2000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,945	0,050	10,731	0,799
Viés	0,000	-0,005	0,000	0,731	-0,001
VR (%)	0,361	-0,513	-0,538	7,308	-0,079
Var	0,002	0,000	0,000	7,078	0,001
EQM	0,002	0,000	0,000	7,612	0,001
$n = 3000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,947	0,050	10,397	0,800
Viés	0,000	-0,003	0,000	0,397	0,000
VR (%)	-0,386	-0,346	-0,118	3,967	-0,048
Var	0,002	0,000	0,000	3,369	0,000
EQM	0,002	0,000	0,000	3,527	0,000
$n = 5000$					
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,100	0,948	0,050	10,252	0,800
Viés	0,000	-0,002	0,000	0,252	0,000
VR (%)	0,424	-0,192	-0,377	2,521	-0,004
Var	0,001	0,000	0,000	1,808	0,000
EQM	0,001	0,000	0,000	1,872	0,000

Tabela 4

Resultados da simulação de Monte Carlo considerando o modelo Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes, utilizando os seguintes parâmetros $\omega = 0, 2$, $\phi_1 = 0, 98$, $\phi_2 = 0, 90$, $\kappa_1 = 0, 01$, $\kappa_2 = 0, 02$, $\kappa^* = 0, 04$, $\nu = 5$ e $\gamma = 0, 95$

$n = 500$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,197	0,922	0,814	0,130	-0,112	0,048	5,958	0,948
Viés	-0,003	-0,058	-0,086	0,120	-0,132	0,008	0,958	-0,002
VR (%)	-1,402	-5,893	-9,549	1197,432	-661,161	20,575	19,161	-0,238
Var	0,011	0,027	0,039	5,832	5,837	0,000	18,063	0,003
EQM	0,011	0,031	0,047	5,847	5,854	0,000	18,981	0,003
$n = 1000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,195	0,957	0,864	0,068	-0,045	0,044	5,321	0,950
Viés	-0,005	-0,023	-0,036	0,058	-0,065	0,004	0,321	0,000
VR (%)	-2,533	-2,316	-3,963	584,235	-326,408	10,406	6,422	-0,018
Var	0,005	0,009	0,009	0,946	0,947	0,000	0,972	0,002
EQM	0,005	0,009	0,011	0,949	0,951	0,000	1,075	0,002
$n = 2000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,974	0,886	0,034	-0,008	0,042	5,147	0,950
Viés	-0,001	-0,006	-0,014	0,024	-0,028	0,002	0,147	0,000
VR (%)	-0,729	-0,642	-1,559	242,735	-140,166	5,027	2,945	0,028
Var	0,002	0,002	0,002	0,243	0,243	0,000	0,370	0,001
EQM	0,002	0,002	0,002	0,243	0,244	0,000	0,391	0,001
$n = 3000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,199	0,979	0,891	0,020	0,007	0,041	5,086	0,950
Viés	-0,001	-0,001	-0,009	0,010	-0,013	0,001	0,086	0,000
VR (%)	-0,606	-0,151	-0,995	103,771	-64,393	3,489	1,713	-0,015
Var	0,001	0,001	0,001	0,010	0,010	0,000	0,214	0,000
EQM	0,001	0,001	0,001	0,010	0,011	0,000	0,222	0,000
$n = 5000$								
Estimador	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Média	0,200	0,980	0,895	0,015	0,013	0,041	5,046	0,950
Viés	0,000	0,000	-0,005	0,005	-0,007	0,001	0,046	0,000
VR (%)	-0,160	0,017	-0,517	51,130	-32,780	1,787	0,925	-0,011
Var	0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,125	0,000
EQM	0,001	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,127	0,000

Tabela 5Taxas de rejeição nula (%) em percentual do teste $\mathcal{H} : (\phi_2, \kappa_2) = (0, 0)$

n	Cenário 1			Cenário 2		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	1,930	7,680	13,560	2,540	8,950	16,050
1000	1,510	6,920	12,600	1,670	6,910	12,970
2000	1,550	6,970	12,730	1,310	6,120	11,640
3000	1,680	7,420	12,640	1,220	6,460	12,350
5000	1,440	6,410	12,100	1,270	6,400	12,300
n	Cenário 3			Cenário 4		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	1,930	8,400	15,050	2,000	6,660	11,390
1000	1,860	7,600	13,840	1,420	6,120	11,040
2000	1,560	6,860	12,740	1,530	6,010	10,980
3000	1,590	7,550	13,990	1,410	5,740	10,570
5000	1,510	6,780	12,590	1,090	5,030	9,200
n	Cenário 5			Cenário 6		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%
500	2,260	7,480	12,710	2,130	7,570	13,230
1000	1,920	6,880	12,100	1,490	5,900	11,020
2000	1,510	5,950	10,740	1,250	6,120	11,760
3000	1,590	5,950	10,560	1,740	6,610	12,180
5000	1,530	5,710	10,320	1,240	5,660	10,220

Tabela 6

Análise descritivas dos log-retornos do índice de mercado DAX 30, para o período compreendido entre 23 de novembro de 1995 a 20 de agosto de 2014

Média	DP	CA	K	LM ₁₀	JB	ADF	KPSS
				p -valor	p -valor	p -valor	p -valor
30×10^{-5}	0,015	-0,093	4,118	851,971	3369,575	-16,227	0,127
				< 0,001	< 0,001	< 0,010	> 0,100

Nota: DP se refere ao desvio padrão, CA ao coeficiente de assimetria, K ao coeficiente de curtose, LM ao teste Multiplicador de Lagrange e JB ao teste Jarque-Bera

Tabela 7

Modelo Beta-Skew-t-EGARCH com um e com dois componentes de volatilidade ajustado aos log-retornos do índice DAX, para o período de 23 de novembro de 1995 a 20 de agosto de 2014

Beta-Skew-t-EGARCH com um componente								
	$\hat{\omega}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}^*$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$
Estimador	-4,339	0,983		0,044		0,033	10,354	0,874
Erro Padrão	0,059	0,003		0,004		0,003	1,344	0,017
Medidas de diagnóstico								
$\ell(\hat{\theta})$							14078,620	
BIC							-5,914	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t^2$							21,907	
LM ₁₀ resíduos							22,179	
Beta-Skew-t-EGARCH com dois componentes								
Estimador	-4,510	0,990	0,917	0,043	-0,008	0,052	10,447	0,879
Erro padrão	0,092	0,004	0,014	0,008	0,010	0,004	1,370	0,017
Medidas de diagnóstico								
$\ell(\hat{\theta})$							14109,329	
BIC							-5,924	
Ljung-Box ₁₀ $\hat{\varepsilon}_t^2$							16,068	
LM ₁₀ resíduos							16,529	