Ferreira Naibert, Paulo; Caldeira, João Frois

Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação: uma avaliação empírica com dados da BM&FBovespa

Revista Brasileira de Finanças, vol. 13, núm. 3, julio, 2015, pp. 504-543
Sociedade Brasileira de Finanças
Rio de Janeiro, Brasil

Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação: uma avaliação empírica com dados da BM&FBovespa

(Selection of optimal portfolios under norm constraints in the allocation vectors: an empirical evaluation with data from BM&F Bovespa)

Paulo Ferreira Naibert*
João Frois Caldeira**

Resumo

Este trabalho estuda o problema de seleção de carteiras de variância mínima com base em uma recente metodologia para otimização de carteiras, com restrições nas normas dos vetores de alocação proposta por Fan *et al.* (2012). Para esse propósito, consideramos diferentes estimadores da matriz de covariâncias condicional e incondicional. A contribuição principal deste artigo é de natureza empírica para o mercado de ações brasileiro. Avaliam-se índices de desempenho fora da amostra das carteiras construídas para um conjunto de 61 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBovespa). Os resultados mostraram que as restrições nas normas dos vetores de alocação geram ganhos substanciais em relação à carteiras restritas para venda a descoberto, aumentando o retorno médio ajustado pelo risco (maior índice de Sharpe) e diminuindo o *turnover* dos portfólios.

Palavras-chave: restrição da norma do vetor de alocação, média-variância, otimização de carteiras, avaliação de desempenho.

Códigos JEL: G11, G17.

Submetido em 24 de junho de 2015. Reformulado em 13 de novembro de 2015. Aceito em 13 de novembro de 2015. Publicado on-line em 14 de Novembro de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Newton Carneiro Affonso da Costa Jr.

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: paulo.naibert@gmail.com
**Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: joao.caldeira@ufrgs.br

Abstract

In this paper we study the problem of minimum variance portfolio selection based on a recent methodology for portfolio optimization restricting the allocation vector proposed by Fan *et al.* (2012). To achieve this, we consider different conditional and unconditional covariance matrix estimators. The main contribuition of this paper is one of empirical nature for the brazilian stock market. We evaluate out of sample performance indexes of the portfolios constructed for a set of 61 different stocks traded in the São Paulo stock exchange (BM&FBovespa). The results show that the restrictions on the norms of the allocation vector generate substantial gains in relation to the no short-sale portfolio, increasing the average risk-adjusted return (larger Sharpe Ratio) and lowering the portfolio turnover

***Palavras-chave*:** norm constrained allocation vector, mean-variance, portfolio optimization, Performance Assessment.

1. Introdução

A questão fundamental do estudo de finanças é: "Como um investidor deve alocar seus fundos entre as possíveis escolhas de investimentos?". Para resolver essa questão Markowitz (1952) sugere que os investidores preferem elevar sua riqueza e minimizar os riscos associados a qualquer ganho potencial, ou seja, Markowitz (1952) aplica às finanças o conceito econômico do uso eficiente de recursos escassos. Para tanto, ele trata os retornos de um ativo como algo desejável e a volatilidade associada a esse retorno como algo indesejável, baseando a escolha do investidor no *trade-off* fundamental entre retorno esperado e risco.

Em seu trabalho, Markowitz (1952) expôs que a seleção de ativos é feita em dois passos. O primeiro começa com observação e experiência e resulta em uma opinião ou expectativa sobre os desempenhos futuros dos ativos. O segundo começa com as crenças relevantes sobre o desempenho futuro e termina com a escolha da carteira. O autor também ressalta que o seu trabalho está apenas interessado no segundo passo, deixando o primeiro passo para trabalhos futuros. Assim, usa-se estimadores amostrais para criar crenças sobre o futuro, no primeiro passo. Para a realização do segundo passo, Markowitz propôs para a seleção de portfólios uma receita normativa sobre como os investidores devem agir, dadas as suas expectativas sobre o futuro. A receita consiste em se formar uma carteira de investimentos diversificada de modo a maximizar o seu retorno esperado dado um nível de risco, ou minimizar o risco esperado da carteira dado um nível de retorno mínimo, sendo que o retorno da carteira é caracterizado pelo retorno esperado e o risco é estimado utilizando a variância. Markowitz (1952) chama essa receita de critério média-variância.

Desde os trabalhos seminais de Markowitz (1952) e Markowitz (1959), a otimização por média-variância se tornou a pedra fundamental para muitas áreas em finanças quantitativas, incluindo alocação de ativos, gestão de carteiras de ações e títulos de renda fixa. A abordagem define os pesos apropriados da carteira através da solução de um problema de otimização, o qual pode se apresentar em várias versões: uma busca maximizar o retorno esperado dado um nível de risco; outra visa minimizar a variância para um dado nível exigido de retorno; e ainda uma versão que maximiza uma função objetivo, isto é, o retorno esperado da carteira menos um múltiplo da variância da carteira (parâmetro de aversão ao risco).

O trabalho de Markowitz (1952) lançou o marco inicial da seleção de carteiras e fundou a Moderna Teoria do Portfólio (MPT na sigla em inglês). Aquele trabalho foi o ponto de referência para a modernização do estudo de finanças, que antes desse trabalho tratava a interação entre risco e retorno de uma maneira *ad hoc*, como ressaltam Kolm *et al.* (2014). Desde então, a seleção e otimização de carteiras é um problema fundamental em finanças, tanto do ponto de vista acadêmico quanto dos praticantes de mercado.

Entretanto, apesar de todo o sucesso alcançado pela abordagem proposta por Markowitz, a seleção de carteiras por média-variância apresenta vários pontos fracos (Kritzman, 2011). Uma das críticas mais recorrentes à abordagem de Markowitz para seleção de carteiras é que ela apresenta muita sensibilidade à incerteza nos vetores de entrada do problema. Por sensibilidade à incerteza, entende-se que pequenas mudanças na média ou variância dos retornos dos ativos estimados podem levar a mudanças drásticas carteira, seja na composição dos pesos, na média dos retornos ou no risco associado à carteira. Tanto Best & Grauer (1991a,b), quanto Chopra & Ziemba (1993) examinam o impacto relativo dos erros de estimação sobre as médias, variâncias e covariâncias. Garlappi *et al.* (2007) destacam que, com os estimadores amostrais, sem levar em conta os erros de estimação, o resultado da otimização por média-variância leva a posições extremas nos ativos, flutuação substancial ao longo do tempo e fraco desempenho fora da amostra. Esse problema de erros de estimação também foi documentado por uma extensa lista de trabalhos empíricos, como, por exemplo, Chopra & Ziemba (1993), Broadie (1993), Best & Grauer (1990), Best & Grauer (1991a), Best & Grauer (1991b), Klein & Bawa (1976), Klein & Bawa (1977), Merton (1980), Michaud (1989).

O problema da sensibilidade à incerteza nos vetores de entrada fica ainda pior quando também se considera o que é conhecido como "maldição da dimensionalidade", causada pelo grande números de ativos disponíveis para a seleção na carteira. Sobre isso, Kolm *et al.* (2014) ressaltam que, no arcabouço clássico de otimização por média-variância, é necessário que o investidor forneça estimativas de retornos e covariâncias de todos os ativos no universo de investimentos considerado, o que é uma tarefa formidável dado o número de ativos disponíveis hoje em dia. Os autores também chamam a atenção para o fato de que é pouco provável que gestores de carteiras tenham um conhecimento detalhado de todos os ativos, empresas, indústrias e setores que têm à disposição. A maioria dos gestores se especializam em uma área específica, na qual eles se focam para obter retornos superiores. É simplesmente irrealista esperar que gestores profissionais de carteiras produzam estimativas razoáveis das variáveis de interesse necessárias na Moderna Teoria do Portfólio, para todos os ativos disponíveis.

Para superar o problema da sensibilidade aos vetores de entrada, Fan *et al.* (2012) argumentam que existem duas abordagens alternativas para contornar o problema. A primeira consiste em alterar o estimador da matriz de covariância, em vez de usar a covariância amostral. A segunda abordagem propõe alterar o problema de seleção de carteira.

Na literatura sobre seleção de carteiras, é possível encontrar vários exemplos de trabalhos que mudaram os estimadores da matriz de covariância para obter carteiras com melhor desempenho fora da amostra. Essa literatura está mais interessada em resolver o primeiro passo do problema de seleção de carteiras, o qual Markowitz (1952) deixou em aberto. Ledoit & Wolf (2003), Ledoit & Wolf (2004a) e Ledoit & Wolf (2004b) propuseram diversas abordagens usando estimadores de encolhimento da matriz de covariância, considerando diversos alvos para esse encolhimento. Ledoit & Wolf (2003) usaram um modelo de fator único de Sharpe (1963) como alvo de encolhimento, Ledoit & Wolf (2004a) usaram uma matriz de identidade como alvo de encolhimento, e Ledoit & Wolf (2004b) usaram um modelo de correlação constante como alvo de encolhimento. A ideia básica por trás desses estimadores é o *trade-off* entre viés e variância, onde, por meio de um sacrifício do viés, pode-se obter um estimador mais eficiente que é menos sensível a mudança nos dados.

Relacionado aos estimadores de encolhimento, tem-se o modelo de Black & Litterman (1992), em que os autores combinaram visões dos gestores sobre os ativos com retornos esperados sob equilíbrio, usando o modelo

CAPM. Assim, a estimativa do retorno esperado é calculada como uma média ponderada do equilíbrio de mercado e as visões dos investidores. Isso vai ao encontro do que Markowitz (1952) sugeriu ao afirmar que o processo para achar médias e variâncias deveria combinar técnicas estatísticas com o julgamento de profissionais da indústria.

Outras abordagens para a estimação de matrizes de covariância são o uso de modelos GARCH e de modelos de fatores. Os modelos GARCH têm o objetivo de modelar a variância condicional das séries de interesse, neste caso, a variância condicional dos retornos dos ativos. Um exemplo de estudo que usa essa abordagem é Engle & Sheppard (2008). Os modelos de fatores têm a vantagem de exigirem menos estimações e permitirem a previsão dos retorno de cada ativo com apenas algumas variáveis. Exemplos dessa abordagem são os trabalhos de Fan *et al.* (2008) e Pesaran & Zaffaroni (2008).

A segunda alternativa usada para superar o problema da sensibilidade aos vetores de entrada consiste em alterar o procedimento de otimização, o que pode ser feito de várias maneiras. O método mais simples de fazer isso consiste em apenas ignorar a otimização e diversificar a carteira de modo ingênuo, atribuindo pesos iguais para todos os ativos selecionados. Esse método é usado para evitar os erros de estimação, visto que, como não há estimação, não há erros. O principal trabalho sobre esse tipo de diversificação é o de DeMiguel *et al.* (2009b), o qual compara as carteiras igualmente ponderadas com carteiras obtidas por otimização. Os autores chegam à conclusão que a estratégia de atribuir pesos iguais a $1/N$ para todos os ativos dificilmente é superada.

Outro tipo de mudança que pode ser implementada no problema de otimização de carteiras é abrir mão da otimização por média-variância e utilizar a otimização de mínima variância da carteira. Isso ocorre porque, de acordo com os resultados de Chopra & Ziemba (1993), os erros de estimação nas variâncias e covariâncias afetam menos o resultado da otimização que erros nas médias. Exemplos de trabalhos que usam mínima variância em vez de média-variância são Chan *et al.* (1999) DeMiguel *et al.* (2009a) e Caldeira *et al.* (2013).

A adição de restrições também se mostra uma alternativa viável para a alteração do problema de otimização original. Nessa abordagem são impostas restrições individuais ou conjuntas aos pesos dos ativos. A ideia básica desse método é impedir posições concentradas ou extremas na carteira escolhida, o que melhora o desempenho fora da amostra das carteiras.

Jagannathan & Ma (2003) impõem limites inferiores e superiores a posições individuais de ativos e argumentam que carteiras com tais limites inferiores e superiores apresentam melhor desempenho fora da amostra. Os autores também explicaram por que a inclusão daquela restrição ajuda a minimizar o risco em um portfólio ótimo de Markowitz, mesmo quando a restrição está errada (razão do título do seu trabalho). A ideia vem de Green & Hollifield (1992), que mostraram que a presença de um fator dominante pode resultar em pesos negativos extremos num arcabouço de uma carteira eficiente de média-variância, mesmo quando não há erros de estimação. Por causa disso, a restrição de posições negativas deveria piorar o portfólio; entretanto, a evidência empírica indica exatamente o contrário. Jagannathan & Ma (2003) mostraram que, quando é imposta a restrição sobre posições vendidas, assim como limites superiores aos ativos, a matriz de covariância tem um desempenho comparável às estimativas baseadas em modelos de fatores, estimadores de encolhimento e dados diários. Além disso, mostraram que construir uma carteira usando limites inferiores e superiores é equivalente a construí-la sem qualquer restrição, mas usando um estimador de matriz de covariância de encolhimento proposto por Ledoit & Wolf (2003) e Ledoit & Wolf (2004a). Ou seja, mostraram, inadvertidamente, que quando se considera a restrição sobre posições vendidas, altera-se a matriz de covariância amostral de forma a ficar parecida com uma matriz de covariância obtida com o estimador de encolhimento.

Outro tipo de restrição que pode ser utilizada para mudar o problema de otimização é a restrição sobre as posições vendidas totais. Essa restrição pode ser obtida ao se restringir a soma dos valores absolutos dos pesos da carteira (norma ℓ_1). Os trabalhos que propuseram esse tipo de restrição são Fan *et al.* (2012), DeMiguel *et al.* (2009a) e Brodie *et al.* (2009). Considerando as abordagens desses estudos, o principal objetivo do presente trabalho é a implementação empírica do problema de seleção de carteiras de variância mínima considerando as abordagens que impõem restrições na normas dos vetores de alocação.

Brodie *et al.* (2009) reformulam o problema de Markowitz como um problema de Mínimos Quadrados Restritos. Os autores adicionam uma função de penalidade proporcional à soma dos valores absolutos dos pesos do portfólio e dizem que essa penalidade regulariza o problema de otimização e ajuda a encontrar portfólios esparsos, que seriam portfólios com poucas posições ativas. Brodie *et al.* (2009) afirmam que, em sua abordagem, é possível obter a carteira sem posições vendidas como um caso especial. Em seu trabalho, foram construídos portfólios cujos desempenhos fora da amostra, em termos de retorno ajustado pelo risco (medidos pelo Índice de Sharpe), são consistentemente e significativamente melhores que a diversificação ingênua.

DeMiguel *et al.* (2009a) forneceram um arcabouço geral para a construção de carteiras ótimas que apresentam bom desempenho fora da amostra na presença de erros de estimação. Isso é feito com a otimização por média-variância tradicional de Markowitz, mas com a adição de uma restrição na norma do vetor de alocação de ativos, ou seja, a soma desses valores absolutos deve ser menor que um dado limiar. Os autores mostraram que o arcabouço estabelecido pode ser visto como um caso especial das abordagens de encolhimento da matriz de covariância proposta por Jagannathan & Ma (2003), Ledoit & Wolf (2003) e Ledoit & Wolf (2004a).

A solução proposta por Fan *et al.* (2012) consiste em modificar o problema de maximização de utilidade ao adicionar-se uma restrição da norma do vetor de alocação, a qual foi denominada como restrição sobre exposição bruta. A restrição proposta pelos autores não precisa, necessariamente, proibir as posições vendidas completamente. Com isso, é possível generalizar a restrição sobre as posições vendidas e achar um meio termo entre a restrição total sobre posições vendidas e a otimização irrestrita das carteiras. Quanto mais a restrição sobre a norma do vetor de alocação for relaxada, mais perto do caso sem restrição a otimização estará. A vantagem desta abordagem é que o investidor pode expressar uma visão negativa sobre um ativo sem ser limitado pela proibição de vendas a descoberto e sem a manifestação de posições extremas pela sensibilidade da otimização de carteiras (Jacobs & Levy, 2006). Fan *et al.* (2012) mostram que, com essa restrição, as carteiras selecionadas têm maior índice Sharpe, assim como menor *turnover* que as carteiras obtidas com a otimização tradicional sem essas restrições. Isso é demonstrado pelos autores ao criarem um arcabouço teórico que conecta o trabalho de Markowitz (1952) com o de Jagannathan & Ma (2003). A inovação do trabalho de Fan *et al.* (2012) é mostrar que as carteiras construídas utilizando a restrição sobre exposição bruta também podem ter uma interpretação de encolhimento da matriz de covariância no sentido de Ledoit & Wolf (2003, 2004a) e Ledoit & Wolf (2004b).

Alguns autores recomendam, porém, cautela no uso de restrições na abordagem de Markowitz para seleção de carteiras. Kolm *et al.* (2014) ressaltam que, quando as restrições são muito fortes, as alocações da carteira serão mais determinadas pelas restrições do que pelos retornos esperados e covariâncias estimadas. Outro tipo de mudança no problema de otimização pode ser a otimização robusta realizada por Goldfarb & Iyengar (2003), Ceria & Stubbs (2006) e DeMiguel & Nogales (2009).

O presente trabalho insere-se no contexto de análise dos ganhos, em termos de desempenho fora da amostra de portfólios ótimos de mínima variância (PMV), os quais têm sido utilizados amplamente na literatura (DeMiguel *et al.*, 2009a, Caldeira *et al.*, 2013, Chan *et al.*, 1999, Rubesam & Beltrame, 2013). Especificamente, este trabalho utiliza as modificações no problema de seleção de carteiras de média-variância de Markowitz (1952) propostas por Fan *et al.* (2012). Além disso, este trabalho está relacionado com Rubesam & Beltrame (2013), que investigam a obtenção de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro considerando diferentes modelos de estimação da matriz de covariâncias. Os autores analisam também o desempenho de carteiras de variância mínima com alavancagem do tipo 130/30. O trabalho também é relacionado com Santos & Tessari (2012), que avaliam o desempenho de diferentes estimadores para matrizes de covariância na construção de carteiras de mínima variância com ações de empresas negociadas na BM&FBovespa. No entanto, este trabalho difere dos anteriores por construir carteiras de mínima variância utilizando a abordagem proposta recentemente por Fan *et al.* (2012) que impõe uma restrição nas normas dos vetores de alocação (também chamada de restrição de exposição bruta da carteira). A estratégia é avaliada considerando diversos níveis de exposição bruta da carteira (diferentes valores da soma das posições vendidas, incluindo o caso específico de *no-short*). Ademais, é implementada uma avaliação econômica da estrutura considerada aqui, similar à realizada em Fleming *et al.* (2001), De Pooter *et al.* (2008), Thornton & Valente (2012), entre outros.

Além do arcabouço proposto por Fan *et al.* (2012), também são consideradas restrições individuais dos ativos. Como a estrutura de Markowitz usa as variâncias e covariâncias dos ativos como medida de risco, são utilizados diferentes estimadores da matriz de covariâncias, os quais abrangem a covariância amostral, o modelo *RiskMetrics*, o modelo *variance targeting scalar VECH (scalar vt-VECH)* e três estimadores de encolhimento propostos por Ledoit & Wolf (2004a), Ledoit & Wolf (2004b) e Ledoit & Wolf (2003). Esses estimadores são aplicados na previsão fora da amostra para as matrizes de covariância dos retornos de 61 ações negociadas no mercado financeiro brasileiro durante o período de 2000 a 2010. Aplica-se o modelo proposto por Fan *et al.* (2012), juntamente com as matrizes de covariâncias previstas, para estimar PMVs com diferentes níveis de restrição da norma do vetor de alocação (incluindo os casos especiais do portfólio irrestrito e da proibição das vendas a descoberto) e com restrição individual dos ativos.

As carteiras selecionadas por esses métodos são avaliadas através de indicadores de desempenho como retorno médio, variância, índice de Sharpe e *turnover* do portfólio. Além disso, é realizada uma avaliação econômica baseada em uma função de utilidade quadrática como no trabalho de Fleming *et al.* (2001). Os resultados são, ainda, comparados àqueles obtidos pelo *benchmark* (portfólio restrito para a venda a descoberto com covariância amostral). Em resumo, são avaliados diferentes estimadores, tanto com uma abordagem incondicional, quanto com uma condicional, na estimação das matrizes de covariância com foco na seleção de ativos com base na recente metodologia proposta por Fan *et al.* (2012). Neste sentido, ao realizar uma aplicação com motivação econômica definida, este trabalho faz uma contribuição aos estudos empíricos que analisam o problema de seleção de carteiras de investimento.

A principal conclusão é que, de uma forma geral, os resultados obtidos neste trabalho indicam ganhos na utilização da metodologia proposta por Fan *et al.* (2012). Esses resultados apontam no sentido de que as carteiras com restrições sobre as normas dos vetores de alocação com valores entre $c = 1.4$ e $c = 1.6$ exibem menor risco. Para as frequências de rebalanceamento diária e semanal, as carteiras com restrições de $c = 1.4$ e $c = 1.6$ sobre a exposição bruta apresentam índice de Sharpe maior e um menor *turnover*. Isso quer dizer que as carteiras otimizadas com restrições sobre as normas obtêm um melhor retorno médio para cada unidade de risco envolvida e apresentam menores custos de transação que as carteiras irrestritas, o que, no final, permite explorar os ganhos associados à carteira sem incorrer em custos maiores de rebalanceamento. Além disso, é importante enfatizar que as vantagens da restrição sobre exposição bruta apontadas acima são robustas ao estimador usado para obter a matriz de covariância. Ou seja, a simples adição da restrição nas normas melhora o desempenho da carteira, não importando qual estimador de matriz de covariância se está usando.

Este trabalho tem duas seções além desta introdução e de uma conclusão. Na seção 2, apresenta-se os diferentes estimadores de matriz de covariância que serão utilizados ao longo do trabalho, descreve-se o problema da seleção de carteira e discute-se como a restrição das normas pode ajudar nesse problema, além de ser apresentada a conexão entre esse novo método de estimação e o estimador por encolhimento (*shrinkage*). Na seção 3, é feito o estudo empírico e mostra-se os resultados. Finalmente, a seção 4 conclui o trabalho ao apresentar as considerações finais.

2. Metodologia

Considerando um universo de de investimentos com N ativos $S_1, S_2, \ldots, S_N$ com retornos futuros incertos $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Denota-se por $\mathbf{R}$ o vetor desses retornos, onde

$$\mathbf{R} = [R_1, R_2, \ldots, R_n]^{\mathsf{T}}. \tag{1}$$

O vetor de retornos esperados $\mu = E(\mathbf{R})$ tem como elementos $\mu_i = E(R_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e é denotado por:

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^{\mathsf{T}} \tag{2}$$

A matriz de covariância entre os retornos, $\Sigma = Var(\mathbf{R})$, tem como elementos $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ e $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ (para $i \neq j$), onde σ_i é o desvio padrão de R_i e ρ_{ij} o coeficiente de correlação entre os retornos dos ativos S_i e S_j (para $i \neq j$). A matriz de covariância Σ é simétrica e denotada por:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,N} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Todas as matrizes de covariância válidas são positivas semidefinidas, ou equivalentemente, todos os autovalores são não-negativos.

Uma carteira é representada pelo vetor N-dimensional $\mathbf{w}$, onde

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]^{\mathsf{T}} \tag{4}$$

e w_i é a parcela de recursos totais investidos no ativo i. O vetor $\mathbf{w}$ também pode ser chamado de vetor de alocação. O retorno (incerto) da carteira R_p depende linearmente dessas parcelas e é uma média ponderada dos retornos simples dos ativos envolvidos, onde o peso de cada ativo é a porcentagem do valor da carteira investido naquele ativo Tsay (2010).

$$R_p = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n = \sum_{i=1}^{N} w_1 R_1 = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} \tag{5}$$

Portanto, o retorno esperado da carteira μ_p é uma média ponderada dos retornos esperado individuais e a variância σ_p^2 da carteira é uma função quadrática do vetor de pesos. É possível representar essas variáveis da seguinte forma:

$$\mu_p = E(R_p) = E(\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{R}) = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mu \tag{6}$$

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = Var(\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{R}) = \mathbf{w}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{w} \tag{7}$$

2.1 Matrizes de Covariância

Como Fan *et al.* (2012) destacaram, uma das maneiras de se resolver o problema de sensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de entrada é usar um estimador diferente de matriz de covariância. Assim, aqui serão apresentados os diferentes estimadores de matriz de covariância que serão usados ao longo desse trabalho.

2.1.1 Matriz de Covariância Amostral

A matriz de covariância amostral, H_t^1, para a construção da previsão da covariância dos retornos é dada por:

$$H_t^1 = \frac{1}{\tau - 1}\sum_{k=1}^{\tau}\left(\mathbf{R}_{t-k} - \overline{\mathbf{R}}\right)'\left(\mathbf{R}_{t-k} - \overline{\mathbf{R}}\right), \tag{8}$$

onde R_{t-k} é o vetor $1 \times N$ de retornos no tempo $t-k$. $\overline{R}$ é o vetor da média dos retornos dentro da amostra e τ é o tamanho da janela de estimação.

2.1.2 Risk Metrics (Média Móvel Exponecialmente Ponderada)

O modelo Risk Metrics consiste em um modelo de média móvel ponderada exponencialmente para modelar as covariâncias. Neste modelo, a matriz de covariância é definida recursivamente como:

$$H_t^2 = (1 - \lambda)R_{t-1}R_{t-1}' + \lambda H_{t-1}^2, \tag{9}$$

com o valor recomendado para o parâmetro em estimações com dados diários sendo $\lambda = 0.94$.

2.1.3 Estimador *Variance targeting scalar* VECH

O objetivo dos modelos ARCH/GARCH é modelar a variância condicional das séries de interesse. Mas, se o interesse for num conjunto de séries de dados com várias variáveis, é possível estimar as volatilidades condicionais de cada variável simultaneamente. Modelos GARCH multivariados se aproveitam do fato de que choques contemporâneos às variáveis podem ser relacionados entre si. Além disso, essa classe de modelos permite transbordamento de volatilidade, de forma que choques de volatilidade para uma variável possam afetar a volatilidade de outras variáveis relacionadas.

O método de estimação usando *variance targeting* tem como objetivo contornar dificuldades encontradas na aplicação de quase-máxima verossimilhança (QML) aos modelos GARCH, utilizando, para isso, um procedimento em dois passos proposto por Francq *et al.* (2011). Em primeiro lugar, a equação de volatilidade é reparametrizada de forma que o intercepto é substituído pela variância não condicional dos retornos. A variância não condicional é estimada e, condicionalmente a essa medida, no segundo passo, os parâmetros remanescentes são estimados por QML. Nesse caso, as condições para que a matriz de covariâncias condicional seja positiva definida são simplificadas.

Seguindo Engle & Sheppard (2008), a especificação *Variance targeting Scalar VECH (scalar vt-VECH)* é definida por

$$H_t^3 = C + \alpha R_t R_t' + \beta H_{t-1}^3, \tag{10}$$

onde α e β são escalares. Sendo C positiva definida e α e β não negativos, a covariância condicional será positiva definida. Assumindo covariância estacionária com o objetivo de contornar o problema da maldição da dimensionalidade e sendo $\bar{H} = E\left[R_t R_t'\right]$ a covariância não condicional do retornos:

$$E\left[H_t^3\right] = C + \alpha \odot E\left[R_{t-1} R_{t-1}'\right] + \beta \odot E\left[H_{t-1}^3\right], \tag{11}$$

$$\bar{H} = CC + \alpha \odot \bar{H} + \beta \odot \bar{H}, \tag{12}$$

$$C = \left(\iota\iota' - \alpha - \beta\right) \odot \bar{H}, \tag{13}$$

onde ι é um vetor de uns $N \times 1$. Portanto, C não está ligado a H_t^3 e pode ser substituído pela estimativa em 13.

2.1.4 Estimador por Encolhimento

Em seu trabalho, Ledoit & Wolf (2003) expõem que um princípio básico da Teoria das Decisões Estatísticas é que existe um ótimo interior no *trade-off* entre viés e erro de estimação. Ledoit & Wolf (2003) relatam que, desde o trabalho seminal de Stein (1956), sabe-se que uma forma de obter um melhor estimador é simplesmente tomar uma média ponderada entre um estimador enviesado, mas com pouco erro de estimação, e um não-enviesado, mas com bastante erro de estimação. Esse processo é chamado de encolhimento do estimador não-enviesado em direção a um alvo fixo, representado pelo estimador enviesado. Assim, a ideia básica do método de encolhimento para matrizes de covariância é fazer uma média ponderada do tipo:

$$\delta F_t + (1 - \delta) S_t \tag{14}$$

onde S_t é o estimador sem estrutura alguma (normalmente representado por uma matriz de covariância amostral); F_t é o estimador com bastante estrutura, também chamado de alvo de encolhimento; e $\delta \in [1, 0]$ é a constante, ou intensidade, de encolhimento.

O estimador sem estrutura mais frequentemente usado é a matriz de covariância amostral (H_t^1), neste trabalho também se considera este estimador. Para escolher F_t, Ledoit & Wolf (2004b) afirmam que o alvo de encolhimento deve preencher duas exigências ao mesmo tempo: ele deve envolver apenas um pequeno número de parâmetro livres (ou seja, bastante estrutura) e deve refletir a características importantes da variável sendo estimada. Assim, Ledoit & Wolf (2003), Ledoit & Wolf (2004a) e Ledoit & Wolf (2004b) usam como alvo de encolhimento o modelo de mercado com fator único, uma matriz identidade e um modelo de correlação constante entre os ativos, respectivamente.

Ledoit & Wolf (2003) assumem um modelo de mercado com processo gerador do retorno j no tempo t :

$$r_{j,t} = \alpha_j + \beta_j r_{M,t} + \varepsilon_{j,t}, \tag{15}$$

onde $r_{M,t}$ é o retorno do índice de mercado no tempo t e $\varepsilon_{j,t}$ é o resíduo. Considerando $r_{M,t}$ e $\varepsilon_{j,t}$ não correlacionados e os termos residuais mutuamente não correlacionados, o estimador da matriz de covariâncias dos retornos em um conjunto de ações é dado por F_t^1:

$$F_t^1 = s_{m,t}^2 BB' + D_t, \tag{16}$$

onde B é o vetor de β's, $s^2_{m,t}$ é a variância amostral de $r_{M,t}$ e D_t é a matriz diagonal das variâncias dos resíduos amostrais. Dessa forma, obtém-se o estimador H_t^4:

$$H_t^4 = \delta F_t^1 + (1-\delta)H_t^1 \tag{17}$$

Ledoit & Wolf (2004a) usam como alvo de encolhimento a matriz de identidade. Assim, o estimador utilizados por Ledoit & Wolf (2004a) pode ser descrito pela seguinte equação:

$$H_t^5 = \delta F_t^2 + (1-\delta)H_t^1 \tag{18}$$

onde $F_t^2 = \mathbf{I}$.

Ledoit & Wolf (2004b) consideram um modelo de correlação constante entre os ativos para formar o alvo de encolhimento F_t^3. Este modelo seria inapropriado se os ativos fossem de *classes de ativos* diferentes como ações e títulos. Todavia, como neste trabalho só se usam ações, pode-se usar esse modelo sem maiores preocupações. Para formar a matriz de covariância com correlações constantes, F_t^3, primeiro se define H_t^1 como a covariância amostral. A matriz H_t^1 tem como elemento da linha i e coluna j a entrada h_{ij}. As correlações amostrais entre os retornos das ações i e j são dados por:

$$r_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sqrt{h_{ii}h_{jj}}} \tag{19}$$

cuja média é:

$$\bar{r} = \frac{2}{(N-1)N}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} r_{ij} \tag{20}$$

Dessa forma, a matriz de correlação constante F_t^3 pode ser definida por meio das variâncias amostrais e médias amostrais das correlações.

$$f_{ii} = h_{ii} \qquad \text{e} \qquad f_{ij} = \bar{r}\sqrt{h_{ii}h_{jj}} \tag{21}$$

e é possível definir o estimador H_t^6 como

$$H_t^6 = \delta F_t^3 + (1-\delta)H_t^1 \tag{22}$$

Para estimar cada matriz de covariância, e achar a constante de encolhimento, são utilizados os códigos que Ledoit e Wolf disponibilizam no site `http://www.ledoit.net/research.htm`. O leitor interessado em saber qual a lógica por trás dos código de Ledoit e Wolf para encontrar o valor de δ ótimo pode achar uma explicação mais detalhada em Ledoit & Wolf (2004b).

2.2 Seleção de Carteiras Através de Otimização por Média-Variância

O paradigma média-variância de Markowitz (1952) é a abordagem mais comum do problema de seleção de carteiras. Assumindo-se que existam N ativos de risco com vetor de retornos aleatórios r_t, define-se a média condicional e a matriz de covariância por μ_t e Σ_t, respectivamente. Assume-se aqui que o investidor só pode distribuir sua riqueza entre os N ativos de risco. Seja Ω, o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que denota o conjunto de carteiras permissíveis. Em particular $\mathbf{w} \in \Omega$ significa que os pesos do portfólio têm de satisfazer as restrições que são impostas na carteira.

Para resolver o problema de média-variância, o Investidor tenta otimizar a seguinte função no domínio restrito definido acima para achar o seu vetor de alocações ótimas $\mathbf{w}^*$. Formalmente, a carteira de média-variância pode ser obtida através da solução do problema de maximização da utilidade do investidor com base no *trade-off* entre risco e retorno esperado,

$$\underset{\mathbf{w}\in\Omega}{\text{Max}} \quad \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mu - \lambda.\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w}, \tag{23}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{-1}{\lambda}$ resulta em:

$$\underset{\mathbf{w}\in\Omega}{\text{Min}} \quad \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\hat{\Sigma}\mathbf{w} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mu, \tag{24}$$

onde $\mathbf{w}$ é o vetor de pesos ótimos, Σ_t é a matriz de covariâncias condicionais, μ_t é o vetor de médias condicionais e λ é o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Esse parâmetro determina o *trade-off* entre o retorno esperado e o risco do portfólio. Conforme Caldeira *et al.* (2013), a carteira de variância mínima corresponde à solução ótima para o problema de média-variância para o investidor com coeficiente de aversão ao risco tendendo ao infinito ($\lambda \to \infty$).

Neste caso, o problema pode ser representado como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\iota = 1 \end{aligned} \tag{25}$$

onde $\iota = (1, \ldots, 1)'$ denota um vetor de uns.

Nesse caso, o investidor importa-se apenas com a minimização do risco da carteira, sem levar em consideração seu retorno esperado. Sob esse aspecto, a obtenção da carteira de variância mínima também é um problema econômico relevante que trata da maximização de utilidade do investidor semelhante ao introduzido originalmente por Markowitz (1952). As carteiras de mínima variância possuem uma série de características que as tornam mais atrativas em relação às carteiras de média-variância. Em primeiro lugar, carteiras de média-variância apresentam um desempenho superior ao das carteiras de mínima variância somente quando a média condicional dos retornos puder ser prevista. Entretanto, a evidência empírica aponta que a dependência temporal da média condicional dos retornos, quando existe, tende a ser fraca. Em segundo lugar, a estimação de retornos esperados está sujeita a um maior erro de estimação em comparação à estimação de covariâncias Merton (1980), e o erro de estimação nos retornos esperados tem um impacto negativo maior nos pesos da carteira quando comparado ao impacto do erro de estimação nas covariâncias Michaud (1989), Best & Grauer (1991b), Mendes & Leal (2005), Ceria & Stubbs (2006). Chopra & Ziemba (1993), por exemplo, observam que os erros de estimação das covariâncias dos ativos afetam menos o resultado final da seleção de carteiras que os erros de estimação na média condicional dos retornos.

Portanto, a pesquisa acadêmica recente tem focado mais em carteiras de mínima variância, as quais dependem somente da estimação de covariâncias e estão sujeitas a uma quantidade menor de erro de estimação em comparação às carteiras de média-variância (DeMiguel *et al.*, 2009a). Vários trabalhos têm apontado que carteiras de mínima variância possuem um desempenho fora da amostra melhor que quaisquer carteiras de média-variância, mesmo quando o critério de desempenho considera tanto o retorno da carteira como também seu risco;[1] a esse respeito ver, por exemplo, Jagannathan & Ma (2003), Ledoit & Wolf (2003), Engle & Sheppard (2008), DeMiguel *et al.* (2009a), Caldeira *et al.* (2013), dentre outros.

[1] Apesar deste aspecto não ser central ao trabalho, isso pode ser explicado pelo efeito de volatilidade, que é a tendência de as ações de baixa volatilidade terem desempenho superior ao das ações de alta volatilidade. A esse respeito ver Ang *et al.* (2006), Blitz & van Vliet (2007), Baker *et al.* (2011), Blitz *et al.* (2014).

2.3 Seleção de Carteiras com Restrição da Norma do Vetor de Alocação

Para solucionar o problema de sensibilidade aos vetores de entrada, Fan *et al.* (2012) utilizam a minimização de variância com uma restrição da norma do vetor de alocação. Dessa forma, o problema de otimização de carteiras fica:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \iota = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \tag{26}$$

onde $\|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |w_i|$. Portanto $\|\mathbf{w}\|_1 \leq c$ fornece: $\sum_{i=1}^{N} |w_i| \leq c$.

A restrição sobre as normas impõe restrições nas posições vendidas e compradas da seguinte forma:

$$w^{+} = \frac{||\mathbf{w}||_1 + 1}{2}\ , \quad w^{-} = \frac{||\mathbf{w}||_1 - 1}{2}$$

$$w^{+} - w^{-} = 1\ , \quad w^{+} + w^{-} = ||\mathbf{w}||_1$$

onde w^{-} é a soma das posições vendidas e w^{+} é a soma das posições compradas. Portanto, com uma restrição de $c = 1.6$ tem-se uma posição vendida máxima de $w^{-} = 0.3$ e posição comprada máxima de $w^{+} = 1.3$. Uma carteira com esta restrição, de $c = 1.6$, é conhecida com uma carteira 130/30, a qual é amplamente utilizada por participantes do mercado com evidenciado em Lo & Patel (2008) e Gastineau (2008). Mas esse é apenas um exemplo, visto que o valor de c pode variar de acordo com a preferência do investidor. Se $c = 1$, quer dizer que posições vendidas não são permitidas, visto que $w^{-} = 0$; e se $c = \infty$, não há restrições sobre posições vendidas, ou seja a solução é a mesma que a da carteira irrestrita.

Assim, c pode variar no intervalo $[1, \infty)$, e a restrição não proíbe as posições vendidas completamente. Dessa forma, o investidor não está mais limitado a ficar entre a otimização com a proibição de vendas a descoberto e a otimização irrestrita, como ocorria antes da utilização dessa abordagem. Agora, é possível generalizar a restrição sobre as posições vendidas e achar um meio do caminho entre a proibição completa de posições vendidas ($c = 1$) e a otimização irrestrita das carteiras ($c = \infty$). Quanto maior for o valor de c, mais perto do caso sem restrição a otimização estará. A vantagem dessa abordagem é que o investidor pode expressar uma visão negativa sobre um ativo sem a manifestação de posições extremas pela sensibilidade da otimização de Markowitz (Jacobs & Levy, 2006).

2.4 Restrições

Adicionar restrições a um problema de otimização por média-variância não pode melhorar o resultado da otimização ex-ante. Isso ocorre porque essas restrições diminuem o conjunto em que é possível fazer a minimização da variância. Assim, as alocações encontradas por esse problema resultam, no máximo a carteira de mínima variância ($A \subseteq B \implies Sup(A) \leq Sup(B)$). Entretanto, na prática, a inclusão de restrições na otimização por média-variância pode levar a desempenho fora da amostra melhor. Gestores profissionais frequentemente usam restrições de vendas a descoberto ou limites superiores e inferiores para cada ativo com o intuito de evitar concentração excessiva em poucos ativos e tentar melhorar o desempenho fora da amostra de suas carteiras.

Um exemplo de limites superiores e inferiores para cada ativo para evitar concentração excessiva em poucos ativos, seria:

$$-0.15 \leq w_i \leq 0.15, \forall i, \tag{27}$$

onde se restringe cada ativo a tomar uma posição comprada ou vendida máxima de 15% do valor total da carteira. Como foi dito anteriormente, essa é uma restrição que impede o investidor de tomar posições muito concentradas e extremas na carteira. Exemplos de restrições desse tipo aparecem em Rubesam & Beltrame (2013) e Neto *et al.* (2011).

A restrição sobre exposição bruta, além de impedir que a carteira assuma posições muito extremas, ajuda a controlar o *turnover* da carteira (justamente porque toma posições menos extremas). Assim, a restrição tem um duplo papel, o de diminuir o risco associado à carteira e o de diminuir os custos de transação dela.

Uma ressalva a ser feita é que como Kolm *et al.* (2014) argumentam, usar restrições sem entender e quantificar o impacto das mesmas pode levar a carteiras com desempenhos ruins que não refletem as visões e a perícia do gestor. Além disso, se são utilizadas muitas restrições na otimização de carteira, o vetor de alocação resultante será mais influenciado pela restrições impostas do que pela otimização de carteiras em si. Outros exemplos de restrições podem ser encontrados em Kolm *et al.* (2014).

2.5 Estratégias para Construção de Carteiras Ótimas

A partir dos dados de preços diários são calculados os retornos dos ativos como a diferença dos logaritmos dos preços. Para a construção dos retornos das carteiras otimizadas, é seguido um processo parecido com o de (DeMiguel *et al.*, 2009a, p.806). Primeiro, escolhe-se uma janela pela qual se executará a estimação das matrizes de covariância a partir da séries de retornos e, em seguida, estimam-se as matrizes de covariância. Denota-se o tamanho da janela de estimação por $\tau < T$, onde T é o número total de retornos no conjunto de dados. Para este experimento, usa-se uma janela de estimação de $\tau = 252$ pontos de dados, o que para retornos diários correspondem a um ano. Segundo, usando os dados sobre as matrizes de covariância, calculam-se 15 carteiras ($\mathbf{w}_t$) para cada uma das seis matrizes de covariância, o que é feito usando o pacote de Grant & Boyd (2014) para o software MATLAB. As carteiras são as seguintes:

- Uma carteira irrestrita (GMV).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\iota = 1 \end{aligned} \tag{28}$$

- Sete carteiras sem restrição de posição para ativos individuais considerando os seguintes valores de c: $1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2$.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^{T}\iota = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \tag{29}$$

  Ressalta-se que o *benchmark* utilizado no estudo empírico é a carteira sem restrição de posição para ativos individuais com o valor de c igual a 1.0.

- Sete carteiras com restrição de posição para ativos individuais considerando os seguintes valores de c: $1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2$.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\Sigma\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\iota = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \\ & -0.15 \leq w_i \leq 0.15, \forall i, \end{aligned} \tag{30}$$

No final desse processo, são gerados $T - \tau$ vetores de pesos de carteira para cada uma das $15 \times 6 = 90$ estratégias. Ou seja, tem-se 90 matrizes $\mathbf{W}$ de tamanho $(T - \tau) \times N$ contendo $T - \tau$ $(t = \tau, \ldots, T - 1)$ vetores $\mathbf{w}_t$ de tamanho $1 \times N$. Mantendo a carteira $\mathbf{w}_t$ para cada período, obtém-se o retorno fora da amostra no tempo $t + 1 : \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$. O que será analisado é justamente essas séries temporais de $\mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$.

2.6 Metodologia para Avaliação de Desempenho

A avaliação de desempenho das carteiras otimizadas é semelhante à realizada em DeMiguel *et al.* (2009a). A análise leva em conta o retorno médio das carteiras, a variância, o Índice Sharpe fora da amostra das carteiras e o *turnover*. As fórmulas dessas medidas estão apresentadas abaixo:

$$\hat{\mu}_p = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-1} \mathbf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{t+1}$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{T - \tau - 1} \sum_{t=\tau}^{T-1} (\mathbf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{t+1} - \hat{\mu})^2$$

$$SR = \frac{\hat{\mu}_p}{\hat{\sigma}_p}, \tag{31}$$

$$\text{TO} = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-1} \sum_{i=1}^{N} \left| w_{i,t+1} - w_{i,t} \frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{t+1}} \right| \tag{32}$$

onde $\mathbf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{t+1}$ é o retorno fora da amostra da carteiras.

Nesse estudo, impostos e custos de transação foram ignorados. Entretanto, calcula-se o turnover das carteiras com a fórmula apresentada em 32. Essa medida, como destacado por DeMiguel *et al.* (2009b), pode ser interpretada como a fração média da riqueza transacionada em cada período.

Conforme Liu (2009), o *turnover* pode ser entendido da seguinte forma: no momento anterior ao rebalanceamento, cada real investido na carteira mudou o valor da ação i para $w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$ e o peso da ação i mudo de $w_{i,t}$ para $w_{i,t}\dfrac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}}$. onde $w_{i,t}$ é o i-ésimo elemento de $\mathbf{w}_t$ e o i-ésimo elemento de $\mathbf{R}_t$ é denotado como $R_{i,t}$. Portanto, a taxa de *turnover* no tempo t após rebalancear o portfólio pode ser definida como:

$$\mathrm{TO}_t = \sum_{i=1}^{N} \left| w_{i,t+1} - w_{i,t}\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}} \right|,$$

ao avaliar-se a média dessa medida ao longo do tempo, obtém-se a equação (32).

O resultado da equação (31), que é o Índice de Sharpe, indica o *trade-off* entre a média e a variância dos retornos. Ele exprime a quantidade de média que a série de retornos obtém para cada unidade de variância que ela sofre.

Para testar a significância estatística das diferenças entre as variâncias e índices de Sharpe dos retornos de duas carteiras competidoras, é empregado o procedimento de *bootstrap* introduzido por Ledoit & Wolf (2008). Este procedimento é robusto para retornos não-normais e serialmente correlacionados. Em particular, é utilizado o *bootstrap* estacionário de Politis & Romano (1994) com B=1.000 reamostragens e tamanho de bloco $b = 5$. Os p-valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida por (Ledoit & Wolf, 2008, Remark 3.2).

2.7 O valor econômico da otimização de carteiras

Além de avaliar os portfólios com as medidas usuais apresentadas acima, também é considerada a abordagem utilizada por Fleming *et al.* (2001) e Fleming *et al.* (2003), e é realizada uma avaliação econômica baseada numa utilidade quadrática para medir o valor dos ganhos de desempenho associados com a estratégia proposta por Fan *et al.* (2012).

Sejam R_{p1t} e R_{p2t} retornos sobre as carteiras obtidas usando duas estratégias diferentes. Conforme Fleming *et al.* (2001), para medir o valor econômico de usar a segunda estratégia em vez da primeira, calcula-se a constante Δ, que satisfaça:

$$\sum_{t=1}^{T} U(R_{p1t}) = \sum_{t=1}^{T} U(R_{p2t} - \Delta)$$

essa constante representa o retorno máximo que o investidor estaria disposto a sacrificar a cada período de tempo t para obter o ganho de desempenho associado com a troca para a segunda estratégia.

Em geral, é possível ver a utilidade quadrática como uma aproximação de segunda ordem para a utilidade verdadeira do investidor. Sob essa aproximação, a utilidade realizada do investidor no período $t+1$ pode ser escrita como:

$$U(W_{t+1}) = W_t R_{p,t+1} - \frac{aW_t^2}{2} R_{p,t+1}^2, \tag{33}$$

onde W_{t+1} é a riqueza do investido em $t+1$, a é a sua aversão absoluta ao risco e

$$R_{p,t} = 1 + \mathbf{w}_t^{\mathsf{T}} \mathbf{r}_{t+1},$$

é o retorno bruto da carteira selecionada em t no período $t+1$.

Para facilitar comparações entre carteiras, aW_t é mantido constante. Isso é equivalente a definir a aversão relativa ao risco do investidor, $\gamma_t = \dfrac{aW_t}{(1-aW_t)}$, igual a um valor fixo, γ. Com a aversão ao risco mantida constante, é possível usar a média da utilidade realizada, $\bar{U}(\cdot)$, para estimar consistentemente a utilidade realizada gerada por um dado nível de riqueza inicial. Em particular tem-se:

$$\bar{U}(\cdot) = W_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \left(R_{p,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{p,t+1}^2 \right) \right]$$

Assim, estima-se o valor econômico da troca de estratégias ao equacionarse a média das utilidade para duas carteiras alternativas. Uma vez que o investidor seria indiferente entre essas duas alternativas, Δ pode ser interpretado como a taxa de retorno máxima que o investidor estaria disposto a sacrificar em cada período para capturar o ganho de performance associado com a troca para a política de investimentos alternativa. Para estimar essa taxa, calcula-se o valor que satisfaz:

$$\sum_{t=1}^{T} \left[(R_{1,t+1}) - \frac{\gamma R_{1,t+1}^2}{2(1+\gamma)} \right] = \sum_{t=1}^{T} \left[(R_{2,t+1} - \Delta) - \frac{\gamma (R_{2,t+1} - \Delta)^2}{2(1+\gamma)} \right] \tag{34}$$

e relata-se Δ como uma taxa anualizada em pontos base usando os diferentes valores de $\gamma = 1$ e $\gamma = 10$, seguindo os valores escolhidos por Fleming *et al.* (2003).

3. Estudo Empírico

Esse é um estudo empírico sobre o desempenho da otimização de carteiras com restrição nas normas dos ativos. Assim, nesta seção é avaliado o desempenho fora da amostra das carteiras construídas a partir dos diferentes estimadores da matriz de covariâncias, baseadas em dados diários, considerando restrições individuais de ativos e diferentes níveis de restrição nas exposições brutas das carteiras. Os portfólios são rebalanceados em frequência diária, semanal e mensal e analisados de acordo com seu desempenho em termos de retorno médio, desvio padrão, índice de Sharpe, *turnover* e uma avaliação econômica baseada numa utilidade quadrática.

Os dados utilizados são preços de $N = 61$ ações que fizeram parte do Índice Bovespa de Janeiro de 1999 até Dezembro de 2010, o que resulta num total de $T + 1 = 2.970$ observações de preços diários para cada um dos 61 ativos. Os dados foram obtidos da Bloomberg e são ajustados para *split* e dividendos. Os retornos são calculados como a diferença dos logaritmos dos preços. Então, se antes havia 61 séries de preços com 2.970 observações de preços, agora há 61 séries com $T = 2.969$ observações de retornos diários. A partir dos retornos, constroem-se as carteiras conforme a apresentação da seção 2.5.

3.1 Medidas de Desempenho dos Portfólios

Neste exercício empírico são considerados os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). A avaliação fora da amostra é implementada recursivamente para evitar viés de antecipação. Especificamente, as previsões das matrizes de covariância são geradas usando parâmetros estimados com informações disponíveis apenas até o momento em que a previsão é realizada. Realizar as previsões dessa forma simula a situação de um investidor em tempo real. Em todas as tabelas, o modelo de *benchmark* é a carteira de variância mínima com restrição $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral.

As tabelas 1 a 3 apresentam os referidos indicadores de desempenho para as frequências de rebalanceamento diário, semanal e mensal, respectivamente. Os resultados da Tabela 1 indicam que, no caso em que o investidor realiza o ajuste diário da carteira, o estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2003) (LW3) gera portfólios com menor desvio padrão para o caso de portfólios sem restrição para ativos individuais mas considerando diferentes níveis de restrição sobre as exposições brutas. Em termos de retorno ajustado ao risco e retorno médio, o estimador de encolhimento LW3 também apresenta o desempenho mais satisfatório. Nota-se que, à medida que relaxa-se a restrição sobre da norma do vetor de alocação, o desempenho das carteiras melhora até determinado ponto, geralmente para níveis de restrição entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$. A partir desse ponto diminuir a restrição sobre as exposições brutas leva à deterioração do desempenho dos portfólios. Do ponto de vista da gestão de carteiras, esse resultado é bastante importante, já que indica que pode existir um nível ótimo de restrição sobre a norma dos vetores de alocação. Além disso, o melhor desempenho obtido com $c = 1.6$ corrobora o uso da estratégia 130/30, comum entre os participantes do mercado (Jacobs & Levy, 2006, Lo & Patel, 2008, Gastineau, 2008).

Estes resultados vão ao encontro com os de Fan *et al.* (2012), que sugere que algum nível de exposição à venda a descoberto é melhor do que a restrição total ou nenhuma restrição. As carteiras com pior desempenho em termos de risco são provenientes do modelo *RiskMetrics*, exibindo desempenho inferior aos demais estimadores para a matriz de covariância com todos os níveis de restrição.

A utilização de restrição nas exposições a ativos individuais, que buscam evitar exposição excessiva a ativos específicos, melhora o desempenho das carteiras em termos de desvio padrão. Conforme pode ser observado na Tabela 1, os portfólios otimizados com restrição nas exposições a ativos individuais apresentam menor risco, sendo as diferenças em relação ao *benchmark* estatisticamente significantes ao nível de 10%. Apenas o modelo *RiskMetrics* não apresenta desvio padrão estatisticamente significante menor que o modelo *benchmark*. Mais uma vez a modelagem através do encolhimento LW3 apresentou os melhores resultados, tanto em termos de risco quanto retorno médio e ajustado pelo risco.

Os resultados da Tabela 1 mostram que o modelo de *benchmark* (carteira de variância mínima com estimador amostral e restrição c = 1.0) apresentou desvio padrão anualizado igual a 14.99% e retorno ajustado ao risco, índice de Sharpe, igual a 1.54. Para cada estimador da matriz de covariância, são considerados portfólios com restrições do vetor de alocação de $c = \{1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2\}$, tanto para carteiras com restrições sobre exposições a ativos individuais quanto irrestritas. No caso dos portfólios irrestritos às exposições individuais, os menores níveis de risco são alcançados com restrição de exposição bruta de $c = 1.4$ e $c = 1.6$, sendo que, para todos os estimadores de encolhimento, as diferenças em relação ao *benchmark* são estatisticamente significantes ao nível de 10%. Mais especificamente, o melhor desempenho é obtido com o estimador de encolhimento LW3 e restrição de exposição bruta $c = 1.6$, que apresenta desvio padrão anualizado de 13.81%. Quando se considera o desempenho ajustado pelo risco, o melhor resultado também é obtido pelo estimador LW3 e $c = 1.6$, que obtém índice de Sharpe anualizado de 1.89. Nota-se que o pior desempenho, tanto em termos de desvio padrão quanto de retorno ajustado pelo risco, é do modelo *RiskMetrics*, o que está em linha com a literatura relacionada.

A importância econômica da imposição de restrições sobre as exposições a ativos individuais para redução do risco das carteiras de variância mínima é substancial: em média 0.40% ao ano abaixo do *benchmark*. Particularmente, a variância dos portfólios construídos com base no modelo de encolhimento LW3 é sistematicamente menor do que aqueles obtidos para os estimadores remanescentes, e isso vale também para os casos com ajuste semanal e mensal dos portfólios. Os resultados encontrados também evidenciam que, mesmo com o uso de restrições específicas, os melhores resultados são obtidos quando se considera $c = 1.4$ e $c = 1.6$. Especificamente, o melhor resultado é encontrado com o estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2003) (LW3) com $c = 1.6$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$). Pode-se observar nas tabelas 1, 2 e 3 que as carteiras ótimas obtidas com o uso do estimador LW3, sejam restritas ou irrestritas, além de exibirem menor risco, também são as que apresentam menor *portfolio turnover*. Esse resultado é extremamente relevante, na medida em que indica um menor custo de transação na utilização dessa estratégia.

Os resultados apresentados na Tabela 1 são baseados na suposição de que os investidores ajustam suas carteiras diariamente. Entretanto, isso dificilmente ocorre na prática, em decorrência dos altos custos de transação gerados por essa frequência de rebalanceamento. Para contornar esse problema, os investidores usam frequências menores para ajustarem os pesos de suas carteiras. O lado negativo do rebalanceamento menos frequente dos pesos das carteiras é que os pesos ficam livres para variar até o próximo rebalanceamento. Assim, se retornos extremos ocorrerem, o portfólio resultante dessa evolução dos pesos pode se distanciar significativamente do portfólio montado seguindo a otimização de carteiras. Dessa forma, a restrição de exposição bruta é desrespeitada, assim como as restrições de posições individuais. Isso permite que o portfólio tome posições mais extremas, o que compromete o desempenho da carteira. Apresentamos o desempenho de carteiras com rebalanceamento semanal e mensal nas tabelas 2 e 3, respectivamente.

A tabela 2 apresenta os indicadores de desempenho para a frequência de rebalanceamento semanal. Essa tabela exibe resultados semelhantes a da tabela 1 apresentada anteriormente. O estimador com menor volatilidade e melhor desempenho ajustado pelo risco continua sendo o estimador LW3. A restrição com menor desvio padrão, geralmente, é a mesma que apresenta o maior índice Sharpe, e os menores desvios-padrão são alcançados com restrições de exposição bruta entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$. Nesta tabela, o modelo *benchmark* com matriz de covariância amostral sem restrições individuas e exposição bruta de $c = 1.0$ apresentou índice de Sharpe igual a 1.53 e desvio padrão anualizado igual a 15.14. O maior índice de Sharpe (2.04) é obtido com o estimador de encolhimento LW3 com exposição bruta de $c = 1.6$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$).

Na tabela 3, apresenta-se os indicadores de desempenho para a frequência de rebalanceamento mensal. O modelo *benchmark* com matriz de covariância amostral sem restrições individuas e exposição bruta de $c = 1.0$ apresentou índice de Sharpe igual a 1.44 e desvio padrão anualizado igual a 15.61. O maior índice de Sharpe (1.93) é com o estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2003) (LW3) com $c = 1.8$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$). Nesta tabela, a restrição com menor desvio-padrão, geralmente, não é a mesma que apresenta o maior índice Sharpe. O menor desvio padrão está associado com um valor da restrição de exposição bruta igual entre $c = 1.4$ e 1.8. Entretanto, o índice Sharpe parece crescer junto com a restrição de exposição bruta. Outros padrões gerais que podemos observar nas tabelas 1, 2 e 3 é que o *turnover* cresce junto com o valor da restrição c, e ele também é maior quanto mais frequente o rebalanceamento da carteira.

3.2 Valor Econômico dos Portfólios

Tabela 1
Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento diário

A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). A carteira GMV é construída sem nenhuma restrição. O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos e com nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco $(*)$ representa a diferença estatisticamente significante entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média $(\%)$	SD (%)	Sharpe	*Turnover*	Média $(\%)$	SD (%)	Sharpe	*Turnover*
Painel A: Matriz de Covariância Amostral								
GMV	24.36	15.07	1.62	0.160				
$c = 1.0$	23.15	**14.99**	**1.54**	0.056	25.14	14.66	1.72	0.061
$c = 1.2$	24.50	14.46*	1.69*	0.058	26.61	14.01*	1.90*	0.055
$c = 1.4$	24.93	14.30*	1.74*	0.076	26.89	13.89*	1.94*	0.073
$c = 1.6$	24.68	14.37*	1.72	0.094	26.63	13.95*	1.91*	0.090
$c = 1.8$	24.52	14.53*	1.69	0.113	26.40	14.15*	1.87*	0.109
$c = 2.0$	24.63	14.72	1.67	0.130	26.35	14.38	1.83*	0.125
$c = 2.2$	24.60	14.88	1.65	0.143	26.27	14.56	1.80	0.139
Painel B: Estimador Risk Metrics								
GMV	24.43	22.29*	1.10	0.957				
$c = 1.0$	22.74	15.76	1.44	0.184	24.56	15.08	1.63	0.177
$c = 1.2$	22.66	16.76	1.35	0.230	25.27	14.89	1.70	0.225
$c = 1.4$	22.18	16.52	1.34	0.277	24.59	15.11	1.63	0.271
$c = 1.6$	22.20	16.35	1.36	0.321	24.78	15.39	1.61	0.315
$c = 1.8$	22.38	16.44	1.36	0.365	24.74	15.74	1.57	0.357
$c = 2.0$	22.09	16.70*	1.32	0.409	24.65	16.10*	1.53	0.399
$c = 2.2$	21.25	17.08*	1.24	0.454	24.73	16.52*	1.50	0.440
Painel C: Estimador GARCH Vech								
GMV	24.73	15.10	1.64	0.164				
$c = 1.0$	22.97	15.02	1.53	0.057	25.19	14.68	1.72	0.064
$c = 1.2$	24.51	14.47*	1.69*	0.060	26.56	14.03*	1.89*	0.057
$c = 1.4$	25.02	14.32*	1.75*	0.078	26.89	13.92*	1.93*	0.075
$c = 1.6$	24.77	14.38*	1.72	0.097	26.68	13.97*	1.91*	0.092
$c = 1.8$	24.65	14.54*	1.70	0.115	26.52	14.16*	1.87*	0.111
$c = 2.0$	24.77	14.73	1.68	0.132	26.50	14.39*	1.84*	0.127
$c = 2.2$	24.85	14.90	1.67	0.147	26.49	14.59	1.82	0.142
Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)								
GMV	25.37	14.16*	1.79*	0.100				
$c = 1.0$	23.83	14.72*	1.62*	0.049	25.57	14.66	1.74*	0.058
$c = 1.2$	25.21	14.12*	1.78*	0.053	26.64	13.97*	1.91*	0.051
$c = 1.4$	25.63	13.94*	1.84*	0.067	26.95	13.80*	1.95*	0.066
$c = 1.6$	25.60	13.96*	1.83*	0.081	26.84	13.83*	1.94*	0.080
$c = 1.8$	25.61	14.06*	1.82*	0.092	26.77	13.96*	1.92*	0.091
$c = 2.0$	25.55	14.12*	1.81*	0.097	26.65	14.04*	1.90*	0.096
$c = 2.2$	25.41	14.15*	1.80*	0.099	26.47	14.09*	1.88*	0.099
Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)								
GMV	24.38	14.60*	1.67	0.097				
$c = 1.0$	21.97	15.06	1.46*	0.054	24.67	14.63	1.69	0.059
$c = 1.2$	23.51	14.52*	1.62	0.052	26.26	13.99*	1.88*	0.050
$c = 1.4$	24.02	14.35*	1.67	0.065	26.43	13.84*	1.91*	0.062
$c = 1.6$	24.39	14.40*	1.69	0.079	26.79	13.89*	1.93*	0.075
$c = 1.8$	24.41	14.50*	1.68	0.090	26.90	14.04*	1.92*	0.087
$c = 2.0$	24.50	14.55*	1.68	0.094	26.83	14.13*	1.90*	0.092
$c = 2.2$	24.43	14.58*	1.68	0.096	26.68	14.19*	1.88*	0.094
Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)								
GMV	25.99	13.85*	1.88*	0.067				
$c = 1.0$	22.88	14.82*	1.54	0.049	25.00	14.52	1.72	0.052
$c = 1.2$	24.76	14.11*	1.75*	0.043	26.71	13.81*	1.93*	0.042
$c = 1.4$	25.63	13.84*	1.85*	0.053	27.34	13.56*	2.02*	0.052
$c = 1.6$	26.11	13.81*	1.89*	0.062	27.81	13.54*	2.05*	0.060
$c = 1.8$	26.11	13.83*	1.89*	0.065	27.80	13.59*	2.04*	0.065
$c = 2.0$	26.02	13.85*	1.88*	0.066	27.71	13.63*	2.03*	0.066
$c = 2.2$	25.99	13.85*	1.88*	0.067	27.68	13.63*	2.03*	0.067
		Estratégia Passiva						
$1/N$	25.78	23.90	1.08	0.018				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

Esta subseção apresenta os resultados da análise do valor econômico

Tabela 2
Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento semanal

A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). A carteira GMV é construída sem nenhuma restrição. O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos e com nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco $(*)$ representa a diferença estatisticamente significante entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média (%)	SD (%)	Sharpe	*Turnover*	Média (%)	SD (%)	Sharpe	*Turnover*
Painel A: Matriz de Covariância Amostral								
GMV	25.25	15.27	1.65	0.081				
$c = 1.0$	23.22	**15.14**	**1.53**	0.023	25.35	14.83	1.71	0.023
$c = 1.2$	24.66	14.62*	1.69*	0.031	26.89	14.16*	1.90*	0.029
$c = 1.4$	25.19	14.49*	1.74*	0.040	27.26	14.07*	1.94*	0.037
$c = 1.6$	25.10	14.56*	1.72*	0.048	27.00	14.14*	1.91*	0.045
$c = 1.8$	25.11	14.72*	1.71	0.057	27.04	14.35*	1.88*	0.055
$c = 2.0$	25.35	14.92	1.70	0.066	27.11	14.59	1.86*	0.063
$c = 2.2$	25.39	15.08	1.68	0.073	27.11	14.78	1.83*	0.070
Painel B: Estimador Risk Metrics								
GMV	24.75	22.35*	1.11	0.484				
$c = 1.0$	21.59	16.26	1.33	0.088	23.54	15.19	1.55	0.080
$c = 1.2$	22.20	16.75	1.33	0.118	25.36	15.06	1.68	0.113
$c = 1.4$	22.41	16.40	1.37	0.142	25.40	15.27	1.66	0.136
$c = 1.6$	22.72	16.35	1.39	0.163	25.74	15.54	1.66	0.157
$c = 1.8$	22.19	16.41	1.35	0.184	25.71	15.88	1.62	0.176
$c = 2.0$	21.97	16.64*	1.32	0.204	25.85	16.25*	1.59	0.195
$c = 2.2$	21.86	17.03*	1.28	0.225	25.96	16.67*	1.56	0.215
Painel C: Estimador GARCH Vech								
GMV	25.05	15.31	1.64	0.083				
$c = 1.0$	22.89	15.15	1.51*	0.024	25.30	14.82	1.71	0.023
$c = 1.2$	24.39	14.63*	1.67*	0.032	26.64	14.18*	1.88*	0.029
$c = 1.4$	24.98	14.50*	1.72*	0.041	27.07	14.09*	1.92*	0.038
$c = 1.6$	24.89	14.57*	1.71	0.049	26.82	14.15*	1.90*	0.046
$c = 1.8$	24.94	14.73*	1.69	0.059	26.84	14.36*	1.87*	0.055
$c = 2.0$	25.07	14.93	1.68	0.067	26.85	14.60	1.84*	0.064
$c = 2.2$	25.17	15.10	1.67	0.074	26.87	14.80	1.82	0.071
Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)								
GMV	25.96	14.37*	1.81*	0.050				
$c = 1.0$	23.68	14.86*	1.59	0.021	25.45	14.80	1.72*	0.021
$c = 1.2$	25.28	14.28*	1.77*	0.028	26.84	14.12*	1.90*	0.027
$c = 1.4$	25.79	14.12*	1.83*	0.035	27.11	13.97*	1.94*	0.034
$c = 1.6$	25.92	14.14*	1.83*	0.041	27.21	14.01*	1.94*	0.040
$c = 1.8$	26.07	14.26*	1.83*	0.047	27.26	14.16*	1.93*	0.046
$c = 2.0$	26.09	14.32*	1.82*	0.049	27.23	14.25*	1.91*	0.048
$c = 2.2$	25.99	14.35*	1.81*	0.050	27.08	14.29*	1.90*	0.049
Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)								
GMV	25.09	14.77*	1.70	0.050				
$c = 1.0$	22.09	15.20	1.45*	0.023	24.88	14.78	1.68	0.021
$c = 1.2$	23.81	14.67*	1.62	0.028	26.63	14.13*	1.88*	0.026
$c = 1.4$	24.36	14.51*	1.68	0.035	26.84	13.98*	1.92*	0.032
$c = 1.6$	24.82	14.56*	1.70	0.041	27.22	14.05*	1.94*	0.039
$c = 1.8$	25.03	14.67*	1.71	0.047	27.50	14.21*	1.94*	0.044
$c = 2.0$	25.15	14.72*	1.71	0.049	27.57	14.30*	1.93*	0.046
$c = 2.2$	25.11	14.75*	1.70	0.050	27.45	14.36*	1.91*	0.048
Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)								
GMV	26.29	14.04*	1.87*	0.035				
$c = 1.0$	22.89	14.98*	1.53	0.020	24.93	14.68	1.70	0.020
$c = 1.2$	24.90	14.27*	1.75*	0.023	26.95	13.97*	1.93*	0.022
$c = 1.4$	25.71	14.02*	1.83*	0.028	27.48	13.73*	2.00*	0.027
$c = 1.6$	26.28	13.99*	1.88*	0.032	28.02	13.73*	2.04*	0.031
$c = 1.8$	26.37	14.02*	1.88*	0.034	28.10	13.79*	2.04*	0.033
$c = 2.0$	26.31	14.04*	1.87*	0.034	28.02	13.82*	2.03*	0.034
$c = 2.2$	26.29	14.04*	1.87*	0.035	27.99	13.83*	2.02*	0.034
		Estratégia Passiva						
$1/N$	24.87	23.89	1.04	0.008				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

associado à utilização de uma determinada política de seleção de carteiras. Para comparar o desempenho de uma determinada política de portfólio com

Tabela 3

Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento mensal

A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). A carteira GMV é construída sem nenhuma restrição. O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos e com nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco $(*)$ representa a diferença estatisticamente significante entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média (%)	SD (%)	Sharpe	*Turnover*	Média (%)	SD (%)	Sharpe	*Turnover*
Painel A: Matriz de Covariância Amostral								
GMV	26.29	15.75*	1.67	0.042				
$c = 1.0$	22.42	**15.61**	**1.44**	0.012	24.55	15.38	1.60	0.011
$c = 1.2$	23.98	15.08*	1.59*	0.017	26.24	14.72*	1.78*	0.015
$c = 1.4$	24.60	14.94*	1.65*	0.021	26.66	14.60*	1.83*	0.019
$c = 1.6$	24.78	15.01*	1.65*	0.025	26.65	14.67*	1.82*	0.023
$c = 1.8$	25.17	15.18*	1.66	0.030	26.87	14.89*	1.81*	0.028
$c = 2.0$	25.77	15.37	1.68	0.034	27.29	15.13	1.80*	0.032
$c = 2.2$	26.12	15.54	1.68	0.037	27.63	15.31	1.80*	0.036
Painel B: Estimador Risk Metrics								
GMV	21.79	23.62*	0.92*	0.220				
$c = 1.0$	18.69	17.75	1.05	0.042	22.96	16.25	1.41	0.037
$c = 1.2$	18.66	18.71	1.00	0.056	25.45	16.15	1.58	0.051
$c = 1.4$	19.95	18.35	1.09	0.065	26.74	16.20	1.65	0.061
$c = 1.6$	20.68	18.16	1.14	0.075	27.54	16.39	1.68	0.070
$c = 1.8$	20.33	18.10	1.12	0.084	27.75	16.63	1.67	0.080
$c = 2.0$	19.91	18.28*	1.09	0.093	27.91	16.99*	1.64	0.089
$c = 2.2$	19.62	18.61*	1.05	0.103	28.27	17.41*	1.62	0.098
Painel C: Estimador GARCH Vech								
GMV	25.79	15.80*	1.63	0.042				
$c = 1.0$	22.04	15.61	1.41*	0.012	24.45	15.41	1.59	0.011
$c = 1.2$	23.55	15.10*	1.56*	0.017	25.78	14.75*	1.75*	0.016
$c = 1.4$	24.12	14.96*	1.61*	0.021	26.18	14.64*	1.79*	0.020
$c = 1.6$	24.26	15.03*	1.61	0.026	26.12	14.71*	1.78*	0.024
$c = 1.8$	24.66	15.20*	1.62	0.030	26.29	14.92*	1.76*	0.028
$c = 2.0$	25.20	15.40	1.64	0.034	26.69	15.15	1.76*	0.033
$c = 2.2$	25.57	15.58	1.64	0.038	27.02	15.35	1.76	0.036
Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)								
GMV	26.44	14.89	1.78	0.026				
$c = 1.0$	22.92	15.36*	1.49	0.011	24.69	15.33	1.61*	0.010
$c = 1.2$	24.63	14.79*	1.67*	0.015	26.20	14.68*	1.78*	0.014
$c = 1.4$	25.41	14.63*	1.74*	0.018	26.69	14.52*	1.84*	0.018
$c = 1.6$	25.85	14.66*	1.76*	0.022	26.97	14.56*	1.85*	0.021
$c = 1.8$	26.27	14.77*	1.78*	0.024	27.26	14.70*	1.85*	0.024
$c = 2.0$	26.45	14.84*	1.78*	0.026	27.40	14.79*	1.85*	0.025
$c = 2.2$	26.45	14.88*	1.78*	0.026	27.37	14.83*	1.85*	0.026
Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)								
GMV	25.16	15.19	1.66	0.026				
$c = 1.0$	21.27	15.58	1.36*	0.012	24.02	15.25	1.58	0.010
$c = 1.2$	23.15	15.07*	1.54	0.016	25.79	14.66*	1.76*	0.014
$c = 1.4$	24.01	14.93*	1.61	0.019	26.31	14.53*	1.81*	0.017
$c = 1.6$	24.54	14.98*	1.64	0.022	26.74	14.59*	1.83*	0.020
$c = 1.8$	24.90	15.08*	1.65	0.025	27.06	14.74*	1.84*	0.023
$c = 2.0$	25.07	15.15*	1.66	0.026	27.19	14.84*	1.83*	0.024
$c = 2.2$	25.15	15.18*	1.66	0.026	27.21	14.90*	1.83*	0.025
Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)								
GMV	26.18	14.45*	1.81*	0.019				
$c = 1.0$	22.08	15.43*	1.43	0.010	24.26	15.27	1.59	0.010
$c = 1.2$	24.16	14.73*	1.64*	0.013	26.15	14.55*	1.80*	0.012
$c = 1.4$	25.17	14.45*	1.74*	0.015	26.77	14.30*	1.87*	0.015
$c = 1.6$	25.99	14.41*	1.80*	0.017	27.44	14.28*	1.92*	0.017
$c = 1.8$	26.19	14.43*	1.82*	0.018	27.65	14.32*	1.93*	0.018
$c = 2.0$	26.19	14.44*	1.81*	0.019	27.62	14.34*	1.93*	0.018
$c = 2.2$	26.18	14.45*	1.81*	0.019	27.61	14.35*	1.92*	0.018
		Estratégia Passiva						
$1/N$	24.07	23.83	1.01	0.004				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

o modelo *benchmark*, é calculada a taxa de performance máxima, Δ_γ, que um investidor avesso ao risco estaria disposto a pagar para mudar do modelo *benchmark* para a outra estratégia de seleção de carteiras. A medida de performance, Δ_γ, é expressa em pontos base, anualizada, e é calculada para o período fora da amostra considerado.

As tabelas 4 e 5 apresentam a taxa máxima que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 1$ e $\gamma = 10$, respectivamente, estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark* para a política de investimento alternativa considerada. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. Nas linhas das tabelas 4 e 5, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores da matriz de covariâncias considerados mas mantendo fixo o nível de restrição sobre a norma do vetor de alocações. Já nas colunas, Δ_γ varia de acordo com o nível de restrição para um dado estimador da matriz de covariâncias.

O interessante das tabelas 4 e 5 é que elas apresentam uma medida de valor econômico baseado em utilidade, o que nos permite observar a substituição entre média e variância de retorno dos agentes analisados. A função de utilidade usada para a construção dos dados das tabelas 4 e 5 é a equação (33), que é uma otimização de média-variância. No entanto, quando a carteira de mínima variância é otimizada, ignora-se os retornos e apenas a variância interessa para esse processo. Dessa forma, o agente que analisamos nem sempre vai pagar uma taxa maior pela carteira com menor variância. Ele vai analisar o *trade-off* entre média e variância e, de acordo com o seu coeficiente de aversão ao risco, selecionar qual taxa ele está disposto a pagar para abandonar a carteira de *benchmark* e selecionar a carteira alternativa apresentada.

Os resultados apresentados nas tabelas 4 e 5 corroboram com os resultados das tabelas 1 a 3. Nota-se que quando se considera os estimadores GV, LW1, LW2 e LW3, em todos o investidor está disposto a pagar uma taxa para adotar a política de investimento alternativa (exceto quando $c = 1.0$ para esses estimadores) e que essa taxa de performance assume valor máximo para valores de $c = 1.4$ e $c = 1.6$, o que está de acordo com o que foi observado anteriormente. Esse resultado fica ainda mais evidente quando eleva-se o coeficiente de aversão ao risco γ. Por exemplo, um investidor com coeficiente de aversão ao risco $\gamma = 1$ está disposto a pagar uma taxa anualizada de 313 pontos base para mudar da estratégia *benchmark* para a carteira que utiliza $c = 1.6$, sem restrições aos ativos individuais e o estimador LW3. Se considerarmos o coeficiente de aversão ao risco $\gamma = 10$, o investidor estaria disposto a pagar uma taxa anualizada de 468 pontos base para realizar a mesma troca. Nota-se também que quando são consideradas as restrições sobre concentração excessiva a ativos individuais a taxa de performance que o investidor está disposto a pagar para trocar a estratégia *benchmark* pela alternativa é maior do que no caso de carteiras irrestritas, em média 150 pontos base.

De maneira geral, os resultados apresentados na Tabela 4, com $\gamma = 1$, indicam que em média o investidor está disposto a pagar uma taxa maior para adotar as carteiras ótimas obtidas com matriz de covariância de Ledoit & Wolf (2003) (LW3), principalmente nos casos com com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$ e restrições brutas de $c = 1.6$, $c = 1.8$ e $c = 2.2$, para as frequências de rebalanceamento diária, semanal e mensal, respectivamente. Nesta tabela, é possível observar que o valor da taxa paga pelo investidor para mudar de estratégia é mais alta quando são utilizadas as restrições individuais dos ativos. Também pode ser notado que o estimador de covariância de Ledoit & Wolf (2003), geralmente, recebe uma taxa maior para abandonar a estratégia de *benchmark* quando as frequências e os níveis de exposição bruta das carteiras são mantidos constantes. Outra característica da tabela 4 é que as maiores taxas pagas pela troca de estratégia são encontradas quando a restrição de exposição bruta tem o valor de $c = 1.4$ e $c = 1.6$ para frequência diária; $c = 1.8$ a $c = 2.2$ para frequência semanal; e $c = 2.0$ e $c = 2.2$ com frequência mensal.

Quando $\gamma = 10$, espera-se que o investidor pague mais pela segurança que quando $\gamma = 1$. Dessa forma, os portfólios menos arriscados terão um “preço” maior. Nesse caso, as maiores taxas de retorno que o investidor estaria disposto a pagar para trocar a estratégia benchmark seria para utilizar o estimador para a matriz de covariância de Ledoit & Wolf (2003), com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$ e restrição bruta de $c = 1.6$ nos casos de rebalanceamento diário e semanal, e $c = 1.8$, para o caso de rebalanceamento mensal. Nesta tabela, assim como na tabela 4, é possível observar que o valor da taxa paga pelo investidor para mudar de estratégia é mais alta quando são utilizadas as restrições individuais dos ativos. Além disso, o estimador de covariância de Ledoit & Wolf (2003), geralmente, recebe uma taxa maior para abandonar a estratégia de *benchmark* quando as frequências e os níveis de exposição bruta das carteiras são mantidos constantes. Também é possível notar que as maiores taxas pagas pela troca de estratégia são encontradas quando a restrição de exposição bruta tem o valor de $c = 1.4$ a $c = 1.8$ para todas as frequências.

Em resumo, quando o investidor é menos avesso ao risco ($\gamma = 1$) estará mais propenso a substituir retorno esperado por risco, o que explica os maiores valores da restrição de exposição bruta apresentados na tabela 4. Na media que são considerados níveis maiores de aversão ao risco ($\gamma = 10$), o investidor estará disposto a sacrificar mais retorno, paga taxas maiores, para utilizar políticas de investimento com menor risco envolvido. Em geral, pode-se observar nas Tabelas 1 a 3 que as políticas de investimento que alcançam menor risco são aquelas que consideram restrição de exposição bruta entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$. Consequentemente, o investidor com $\gamma = 10$ paga taxas mais elevadas para esses valores de exposição bruta das carteiras.

Cabe notar que cada frequência de rebalanceamento tem seu *benchmark* próprio. Assim, não é possível comparar as taxas a serem pagas para as diferentes frequências. De qualquer forma, é interessante observar que, quando a frequência de rebalanceamento diminui, os pesos evoluem mais livremente e não se consegue obter uma volatilidade menor da carteira, o que faz com que o investidor pague mais por portfólios com c maior.

4. Conclusão

Este trabalho avalia empiricamente para dados do mercado de ações do brasileiro a abordagem do problema de seleção de carteiras de mínima variância com restrições nas normas dos vetores de alocação proposta por Fan *et al.* (2012). Os resultados encontrados indicam que a abordagem proposta pode gerar ganhos para investidores que tenham condições de assumirem posições vendidas a descoberto e em carteiras alavancadas. Essas evidências são mostradas através de medidas tradicionalmente usadas na literatura para avaliação de desempenho de carteiras, bem como através da avaliação econômica proposta por Fleming *et al.* (2001), que é baseada numa função utilidade representando as preferências do investidor.

Sobre as restrições de ativos individuais, a conclusão deste trabalho foi que elas melhoraram o desempenho fora da amostra das carteiras analisadas. Essas restrições melhoram a carteira em todos os aspectos analisados nesse trabalho: elas diminuem o *turnover* da carteira, aumentam a média dos retornos, diminuem o risco associado e, assim, aumentam o índice de Sharpe das carteiras analisadas. Além disso, as restrições individuais aumentam o valor da taxa que um investidor está disposto a pagar pela mudança de estratégia na avaliação econômica baseada em utilidade quadrática de Fleming *et al.* (2001).

Tabela 4
Retorno pago pelo investidor para mudar de estratégia ($\gamma = 1$)

Esta tabela apresenta a taxa anualizada, Δ_γ, em pontos base, que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 1$ estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark*. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. A carteira GMV é construída sem nenhuma restrição. Nas linhas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores considerados, covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). Já nas colunas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com a exposição bruta da carteira, sem haver comparação entre as frequências de rebalanceamento.

	Carteiras Irrestritas						Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)					
	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3
Painel A: Rebalanceamento Diário												
GMV	120.36	-7.75	156.20	234.42	129.58	301.05						
$c = 1.0$	**0.00**	-52.64	-18.21	72.11	-118.51	-24.51	204.12	140.37	208.88	247.08	157.17	192.68
$c = 1.2$	142.80	-77.30	143.75	218.48	42.80	174.22	360.58	214.22	355.70	363.77	325.85	372.87
$c = 1.4$	188.44	-120.51	197.09	263.45	96.33	264.46	390.22	142.56	390.14	397.06	344.98	440.13
$c = 1.6$	162.78	-115.90	171.27	260.14	132.95	313.28	363.44	157.57	368.42	385.82	379.94	487.31
$c = 1.8$	143.95	-99.06	157.37	259.52	133.61	312.86	337.68	148.03	349.58	377.71	388.81	484.77
$c = 2.0$	152.60	-132.45	166.07	253.39	141.42	303.63	328.97	133.08	344.14	363.78	380.37	475.53
$c = 2.2$	146.65	-223.26	171.24	239.00	134.29	301.09	318.94	133.77	340.47	344.98	365.26	472.29
Painel B: Rebalanceamento Semanal												
GMV	201.76	18.32	180.62	285.79	192.81	323.37						
$c = 1.0$	**0.00**	-179.76	-32.99	50.23	-113.43	-30.44	218.04	31.82	213.37	229.04	171.86	178.02
$c = 1.2$	152.08	-126.72	124.78	219.58	66.95	181.59	382.20	215.45	356.67	377.87	356.25	390.56
$c = 1.4$	206.95	-100.38	186.08	272.45	124.16	266.23	420.39	216.44	400.79	406.06	378.89	446.61
$c = 1.6$	196.62	-68.15	176.02	284.99	169.40	322.73	393.22	246.67	375.12	415.42	416.69	501.09
$c = 1.8$	195.82	-122.76	178.63	298.18	188.39	332.15	394.28	238.10	374.07	419.06	442.61	507.59
$c = 2.0$	216.33	-148.61	189.07	299.64	199.96	325.59	397.95	245.74	371.36	414.20	447.93	499.19
$c = 2.2$	218.60	-165.59	195.90	288.97	194.95	323.39	394.87	250.51	370.43	399.40	434.93	496.83
Painel C: Rebalanceamento Mensal												
GMV	384.46	-220.31	333.82	412.56	280.01	393.44						
$c = 1.0$	**0.00**	-408.73	-38.26	54.03	-115.03	-31.65	216.45	44.06	205.64	231.04	165.85	188.85
$c = 1.2$	164.13	-429.19	120.62	233.19	81.21	187.17	395.21	293.93	349.19	391.55	351.70	388.81
$c = 1.4$	228.06	-294.17	179.87	313.28	169.73	292.16	438.96	421.99	390.18	443.45	405.18	454.85
$c = 1.6$	244.91	-217.36	193.11	357.08	221.11	374.55	437.30	499.09	383.66	470.66	447.30	521.79
$c = 1.8$	281.92	-251.27	229.69	397.43	255.48	394.90	455.85	516.57	397.45	497.66	477.42	542.11
$c = 2.0$	338.08	-296.49	281.01	414.19	272.26	394.04	494.61	526.27	433.70	509.83	488.10	539.18
$c = 2.2$	371.30	-331.88	315.48	414.03	279.12	393.46	525.51	554.70	464.14	506.24	489.20	537.61

As restrições da norma do vetor de alocação diminuíram o desvio padrão dos portfólios para todas as frequências de rebalanceamento e estimadores de matriz de covariância analisados, apresentando um ponto ótimo entre os valores $c = 1.4$ e $c = 1.8$. Dessa forma, esses são os melhores valores para se executar a minimização de variância. Esses níveis de restrição também apresentam *turnover* de carteira menor que as carteiras GMV para o mesmo estimador de matriz de covariância e mesma frequência de rebalanceamento. Isso permite que o investidor tenha um risco associado à carteira menor que os métodos tradicionais (carteiras GMV e *long-only*), ao mesmo tempo que o investidor incorra em menores custos de transação associados a sua carteira. Os valores entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$ para a restrição de exposição bruta das carteiras também chamam a atenção para a carteira

Tabela 5
Retorno pago pelo investidor para mudar de estratégia ($\gamma = 10$)

Esta tabela apresenta a taxa anualizada, Δ_γ, em pontos base, que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 10$ estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark*. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. A carteira GMV é construída sem nenhuma restrição. Nas linhas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores considerados, covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit & Wolf (2004a) (LW1), Ledoit & Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit & Wolf (2003) (LW3). Já nas colunas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com a exposição bruta da carteira, sem haver comparação entre as frequências de rebalanceamento.

	Carteiras Irrestritas						Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)					
	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3
Painel A: Rebalanceamento Diário												
GMV	110.02	-1247.90	141.73	344.34	182.99	450.65						
$c = 1.0$	**0.00**	-160.04	-21.48	109.50	-127.25	-1.57	249.47	128.56	251.91	292.54	206.14	256.21
$c = 1.2$	213.97	-332.46	213.76	334.00	106.06	291.06	490.24	228.50	483.12	498.82	457.67	528.44
$c = 1.4$	280.32	-338.77	286.84	401.67	181.94	415.88	534.89	126.41	531.63	552.80	496.79	626.63
$c = 1.6$	246.44	-309.08	253.22	396.72	212.75	468.69	500.12	102.73	502.97	538.23	525.21	675.52
$c = 1.8$	206.23	-305.88	218.55	383.40	199.83	465.41	449.38	43.53	460.22	514.24	514.31	666.58
$c = 2.0$	189.85	-378.97	201.73	369.10	200.64	453.95	411.52	-23.34	424.98	489.36	494.25	653.45
$c = 2.2$	162.57	-527.82	184.36	350.56	189.91	450.71	376.75	-85.25	395.27	464.98	472.39	649.33
Painel B: Rebalanceamento Semanal												
GMV	183.30	-1214.14	157.42	389.34	243.05	468.62						
$c = 1.0$	**0.00**	-340.32	-35.08	88.39	-121.55	-8.90	259.77	24.79	256.55	275.12	219.99	240.34
$c = 1.2$	222.16	-359.96	193.56	334.87	130.96	297.52	511.85	226.49	483.96	513.46	490.46	545.33
$c = 1.4$	294.34	-281.25	272.20	408.23	208.49	415.02	562.82	198.47	540.59	560.05	531.90	631.35
$c = 1.6$	274.56	-241.24	252.77	417.59	247.02	474.60	526.17	190.92	506.77	564.55	561.52	686.29
$c = 1.8$	252.13	-305.47	233.56	416.10	252.41	480.08	500.53	133.26	479.04	549.60	567.04	684.90
$c = 2.0$	245.68	-366.28	217.26	408.80	256.59	471.47	472.28	87.49	444.01	532.74	559.97	672.45
$c = 2.2$	226.05	-442.28	201.33	394.18	247.45	468.66	443.23	29.15	416.42	512.71	539.80	669.58
Painel C: Rebalanceamento Mensal												
GMV	364.57	-1652.98	306.25	512.09	337.76	551.91						
$c = 1.0$	**0.00**	-732.99	-38.75	88.57	-111.55	-6.74	248.43	-48.56	233.25	269.47	216.27	235.97
$c = 1.2$	237.55	-914.11	191.55	345.75	155.92	308.51	517.33	215.41	467.47	518.90	482.21	533.38
$c = 1.4$	320.44	-718.23	269.35	447.47	264.37	449.61	576.69	336.00	523.41	591.72	553.28	632.03
$c = 1.6$	328.33	-609.57	273.50	487.38	308.43	537.77	565.56	385.20	507.41	613.53	586.71	702.51
$c = 1.8$	342.36	-632.49	287.01	512.69	328.86	555.61	555.78	366.51	493.30	622.03	597.20	716.78
$c = 2.0$	371.12	-708.12	310.38	520.02	336.83	553.47	561.97	322.06	497.39	622.24	593.84	711.51
$c = 2.2$	381.09	-799.57	319.84	515.36	339.17	551.93	566.77	283.56	499.68	613.44	586.71	709.31

130/30, a qual é amplamente utilizada por participantes do mercado como evidenciado em Lo & Patel (2008) e Gastineau (2008).

Em relação ao índice de Sharpe, as restrições de exposição bruta funcionam melhor com as frequências de rebalanceamento diária e semanal. Isso ocorre porque, quando o rebalanceamento é menos frequente, a evolução dos pesos leva as carteiras selecionadas a desrespeitarem as restrições que foram impostas quando a carteira foi otimizada, e isso leva a um desempenho desfavorável. Dessa forma, uma regra de rebalanceamento como uma janela de controle, em vez de intervalos de tempo definidos, pode melhorar o desempenho das carteiras selecionadas.

Um aspecto positivo sobre as restrições de exposição bruta apresentadas nesse trabalho é que, além de elas aumentarem o índice de Sharpe, elas diminuem o *turnover* da carteira, o que, no final, permite que o investidor fique com os ganhos associados à carteira sem incorrer em custos maiores de rebalanceamento com ela. Além disso, dependendo do estimador de covariância, um valor de restrição de exposição bruta entre $c = 1.4$ e $c = 1.6$ com frequência semanal pode fornecer um *turnover* com valor menor ou igual ao portfólio GMV do estimador amostral com rebalanceamento mensal.

Finalizando, pelo que foi exposto acima, a otimização de carteiras com restrição das normas dos vetores de alocação é uma alternativa viável aos métodos tradicionais de otimização de carteira. Essa abordagem restringe a soma das posições vendidas da carteira e, junto com restrições individuais de ativos, ela evita que as carteiras tomem posições muito extremas, o que melhora o desempenho delas fora da amostra ao mesmo tempo que diminui os custos de transação da carteira. Portanto, a abordagem proposta por Fan *et al.* (2012) e implementada para dados do mercado de ações brasileiro neste trabalho se coloca como uma alternativa a ser considerada por gestores de fundos multimercados, gestores quantitativos e investidores institucionais que não tenham restrições quanto à venda a descoberto e que tenham a possibilidade de alavancar suas carteiras.

Referências

Ang, Andrew, Hodrick, Robert J., Xing, Yuhang, & Zhang, Xiaoyan. 2006. The Cross-Section of Volatility and Expected Returns. *The Journal of Finance*, **61**(1), 259–299.

Baker, Malcolm, Bradley, Brendan, & Wurgler, Jeffrey. 2011. Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low-Volatility Anomaly. *Financial Analysts Journal*, **67**(1), 40–54.

Best, Michael J., & Grauer, Robert R. 1990. The efficient set mathematics when mean-variance problems are subject to general linear constraints. *Journal of Economics and Business*, **42**(2), 105–120.

Best, Michael J, & Grauer, Robert R. 1991a. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *Review of Financial Studies*, **4**(2), 315–42.

Best, Michael J., & Grauer, Robert R. 1991b. Sensitivity Analysis for Mean-Variance Portfolio Problems. *Management Science*, **37**(8), 980–989.

Black, Fischer, & Litterman, Robert. 1992. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, **48**(5), 28–43.

Blitz, David, Falkenstein, Eric, & Vliet, Pim van. 2014. Explanations for the Volatility Effect: *An Overview Based on the CAPM Assumptions. The Journal of Portfolio Management*, **40**(3), 61–76.

Blitz, David C, & van Vliet, Pim. 2007. The Volatility Effect. *Journal of Portfolio Management*, **34**(1), 102–113.

Broadie, Mark. 1993. Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of Operations Research*, **45**(1), 21–58.

Brodie, Joshua, Daubechies, Ingrid, De Mol, Christine, Giannone, Domenico, & Loris, Ignace. 2009. Sparse and stable Markowitz portfolios. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **106**(30), 12267–12272.

Caldeira, João, Moura, Guilherme, & Santos, André. 2013. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*, **67**(1), 45–65.

Ceria, S., & Stubbs, R.A. 2006. Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction. *Journal of Asset Management*, **7**(2), 109–127.

Chan, L.K.C., Karceski, J., & Lakonishok, J. 1999. On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model. *Review of Financial Studies*, **12**(5), 937–974.

Chopra, Vijay K., & Ziemba, William T. 1993. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, **19**(2), 6–11.

De Pooter, Michiel, Martens, Martin, & van Dijk, Dick. 2008. Predicting the Daily Covariance Matrix for S&P 100 Stocks Using Intraday Data – But Which Frequency to Use? *Econometric Reviews*, **27**(1-3), 199–229.

DeMiguel, Victor, & Nogales, Francisco J. 2009. Portfolio Selection with Robust Estimation. *Operations Research*, **57**(3), 560–577.

DeMiguel, Victor, Garlappi, Lorenzo, Nogales, Francisco J., & Uppal, Raman. 2009a. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, **55**(5), 798–812.

DeMiguel, Victor, Garlappi, Lorenzo, & Uppal, Raman. 2009b. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1-N Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, **22**(5), 1915–1953.

Engle, Robert, & Sheppard, Kevin. 2008. *Evaluating the specification of covariance models for large portfolios*. Working Paper. New York University, working paper.

Fan, Jianqing, Fan, Yingying, & Lv, Jinchi. 2008. High dimensional covariance matrix estimation using a factor model. *Journal of Econometrics*, **147**(1), 186–197.

Fan, Jianqing, Zhang, Jingjin, & Yu, Ke. 2012. Vast Portfolio Selection With Gross-Exposure Constraints. *Journal of the American Statistical Association*, **107**(498), 592–606.

Fleming, Jeff, Kirby, Chris, & Ostdiek, Barbara. 2001. The Economic Value of Volatility Timing. *Journal of Finance*, **56**(1), 329–352.

Fleming, Jeff, Kirby, Chris, & Ostdiek, Barbara. 2003. The economic value of volatility timing using "realized" volatility. *Journal of Financial Economics*, **67**(3), 473–509.

Francq, Christian, Horvath, Lajos, & Zakoïan, Jean-Michel. 2011. Merits and drawbacks of variance targeting in GARCH models. *Journal of Financial Econometrics*, **9**(4), 619–656.

Garlappi, Lorenzo, Uppal, Raman, & Wang, Tan. 2007. Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-Prior Approach. *Review of Financial Studies*, **20**(1), 41–81.

Gastineau, Gary L. 2008. The Short Side of 130/30 Investing. *The Journal of Portfolio Management*, **34**(2), 39–52.

Goldfarb, D., & Iyengar, G. 2003. Robust portfolio selection problems. *Math. Oper. Res.*, **28**(1), 1–38.

Grant, Michael, & Boyd, Stephen. 2014 (Mar.). *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1*. `http://cvxr.com/cvx`.

Green, Richard C, & Hollifield, Burton. 1992. When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified? *Journal of Finance*, **47**(5), 1785–809.

Jacobs, Bruce I, & Levy, Kenneth N. 2006. Enhanced Active Equity Strategies. *The Journal of Portfolio Management*, **32**(3), 45–55.

Jagannathan, Ravi, & Ma, Tongshu. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *Journal of Finance*, **58**(4), 1651–1684.

Klein, Roger W., & Bawa, Vijay S. 1976. The effect of estimation risk on optimal portfolio choice. *Journal of Financial Economics*, **3**(3), 215–231.

Klein, Roger W., & Bawa, Vijay S. 1977. The effect of limited information and estimation risk on optimal portfolio diversification. *Journal of Financial Economics*, **5**(1), 89 – 111.

Kolm, Petter N., Tütüncü, Reha, & Fabozzi, Frank J. 2014. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, **234**(2), 356 – 371.

Kritzman, Mark. 2011. Invited Editorial Comment. *The Journal of Portfolio Management*, **37**(2), 3–5.

Ledoit, Oliver, & Wolf, Michael. 2008. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, **15**(5), 850–859.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2003. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, **10**(5), 603–621.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004a. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, **88**(2), 365–411.

Ledoit, Olivier, & Wolf, Michael. 2004b. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *The Journal of Portfolio Management*, **30**(4), 110–119.

Liu, Qianqiu. 2009. On portfolio optimization: How and when do we benefit from high-frequency data? *Journal of Applied Econometrics*, **24**(4), 560–582.

Lo, Andrew W, & Patel, Pankaj N. 2008. 130/30: The New Long-Only. *The Journal of Portfolio Management*, **34**(2), 12–38.

Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.

Markowitz, H.M. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Cowles Commission for Research in Economics: Monographs. Yale University Press.

Mendes, B.V., & Leal, R.P.C. 2005. Robust multivariate modeling in finance. *International Journal of Managerial Finance*, **1**(2), 95–106.

Merton, Robert C. 1980. On estimating the expected return on the market : An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, **8**(4), 323–361.

Michaud, Richard O. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, **45**(1), 31–42.

Neto, César Thomé, Leal, Ricardo Pereira Câmara, & Almeida, Vinício de Souza e. 2011. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. *Economia Aplicada*, **15**, 535 – 557.

Pesaran, M.H., & Zaffaroni, P. 2008 (Mar.). *Optimal Asset Allocation with Factor Models for Large Portfolios*. Cambridge Working Papers in Economics 0813. Faculty of Economics, University of Cambridge.

Politis, Dimitris N., & Romano, Joseph P. 1994. The Stationary Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, **89**(428), 1303–1313.

Rubesam, Alexandre, & Beltrame, André Lomonaco. 2013. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, **11**(1), 81–118.

Santos, André Alves Portela, & Tessari, Cristina. 2012. Técnicas Quantittativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, **10**(3), 369–394.

Sharpe, William F. 1963. A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, **9**(2), 277–293.

Stein, Charles. 1956. *Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution*. Tech. rept. Berkeley, Calif.

Thornton, Daniel L., & Valente, Giorgio. 2012. Out-of-Sample Predictions of Bond Excess Returns and Forward Rates: An Asset Allocation Perspective. *Review of Financial Studies*, **25**(10), 3141–3168.

Tsay, Ruey S. 2010. *Analysis of Financial Time Series*. 3 edn. Cambridge, Mass: Wiley.