



Revista Brasileira de Finanças

ISSN: 1679-0731

rbfin@fgv.br

Sociedade Brasileira de Finanças

Brasil

do Livramento Demos, Guilherme; Schreurs Pires, Thomas Henrique; Valle Moura,  
Guilherme

Rebalanceamento Endógeno para Portfólios de Variância Mínima

Revista Brasileira de Finanças, vol. 13, núm. 4, octubre, 2015, pp. 544-570

Sociedade Brasileira de Finanças

Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305843510001>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc



Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# **Rebalanceamento Endógeno para Portfólios de Variância Mínima**

**(Portfolio Optimisation and Endogenous Rebalancing Methods)**

**Guilherme do Livramento Demos\***

**Thomas Henrique Schreurs Pires\*\***

**Guilherme Valle Moura\*\*\***

## **Resumo**

Custos de transação implicam em um *trade-off* entre o benefício da atualização dos pesos ótimos e os custos de se alterar a composição da carteira. A maneira usual de se resolver este *trade-off* é atualizando a composição da carteira após um período de tempo determinado de forma exógena. Este artigo propõem uma estratégia de rebalanceamento de carteira endógena baseada em gráficos de controle para detecção do momento propício para o ajuste da composição da carteira. Os pesos ótimos do portfólio são monitorados diariamente e, caso alterações estatisticamente significativas sejam identificadas, a carteira é rebalanceada, caso contrário, os pesos são mantidos constantes, evitando custos de transação. O desempenho desta estratégia é comparado a rebalanceamentos periódicos através de medidas como *Turnover* e Índice de Sharpe. Conclui-se que estratégias baseadas em detecções sequenciais de quebras nos pesos ótimos superam as demais, proporcionando ganhos econômicos para o investidor.

**Palavras-chave:** Portfólio de Variância Mínima Global (PVMG); Controle Estatístico de Processos, Gráficos de controle.

**Códigos JEL:** C53; E43; G17.

---

Submetido em 2 de maio de 2015. Reformulado em 13 de novembro de 2015. Aceito em 17 de novembro de 2015. Publicado on-line em 20 de Janeiro de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

\*PPGE, UFSC & ETH Zürich E-mail: [gdemos@ethz.ch](mailto:gdemos@ethz.ch)

\*\*PPGE, UFSC. E-mail: [thsfc@gmail.com](mailto:thsfc@gmail.com)

\*\*\*PPGE, UFSC. Guilherme Moura agradece apoio financeiro do CNPq através dos processos 308346/2013-0 e 475230/2012-4. E-mail: [guilherme.moura@ufsc.br](mailto:guilherme.moura@ufsc.br)

## Abstract

Investment managers often rebalance portfolios using *ad-hoc* criteria due the trade-off between gains from updating optimal weight and costs incurred from changing the portfolio composition. A common solution for this stalemate is rebalancing the portfolio based on some exogenous criteria. By monitoring the optimal weights of the portfolio through control charts, the authors propose a portfolio rebalance strategy based solely on endogenous information. The optimal portfolio weights are thus monitored daily and if statistical significant changes are detected we either rebalance or not the portfolio thus avoiding transaction costs. The performance of the rebalancing strategy is then compared with different periodical strategies based on indicators such as Turnover and Sharpe-Ratio. Our results suggest that rebalancing strategies based on signals from control charts outperform those based solely on exogenous criteria, thus yielding economical gains to the investor.

**Keywords:** Global Minimum Variance Portfolio; Statistical Processes Control, Control Charts.

## 1. Introdução

A abordagem de portfólio iniciada por Markowitz (1952) é um dos marcos da moderna teoria de finanças, e mostra como um investidor interessado apenas na média e na variância de um portfólio estático deve compor sua carteira de ativos. Para implementar essa estratégia é necessário conhecer a média e matriz de covariância dos ativos, porém, estes momentos são desconhecidos e precisam ser estimados através do uso de séries de tempo. Entretanto, sabe-se pelo menos desde de Klein & Bawa (1976), Jobson & Korkie (1980) e Frost & Savarino (1986) que portfólios construídos com base em estimativas da média e da variância apresentam baixo desempenho devido a erros de estimação (ver também Michaud, 1989, Litterman & Scheinkman, 1991). Adicionalmente, Merton (1980) apresenta evidências de que a estimativas da média do retorno de ativos são mais imprecisas do que estimativas da covariância destes, enquanto Jorion (1985) mostra que erros na estimação da média têm maior impacto nos pesos da carteira do que erros na estimação da matriz de covariância. Por esses motivos, o presente estudo segue a literatura empírica<sup>1</sup> e se atém a portfólios de variância mínima.<sup>2</sup>

Mesmo se atendo somente à estimativa da matriz de covariância, er-

---

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, Chan *et al.* (1999), Jagannathan & Ma (2003), DeMiguel & Nogales (2009), Caldeira *et al.* (2013), entre outros.

<sup>2</sup>Note que os resultados em Okhrin & Schmid (2006) permitem uma análise similar para o caso de um investidor com utilidade esperada quadrática.



ros de estimação podem afetar o desempenho dos portfólios de variância mínima global (PVMG). Com o intuito de aprimorar o seu conhecimento a respeito da covariância entre os ativos, um investidor pode considerar aumentar o tamanho da amostra a medida que o tempo passa e mais informações a respeito dos retornos são obtidas. Entretanto, como mostram Lamoureux & Lastrapes (1990) e Stock & Watson (2004), matrizes de covariância de retornos de ativos financeiros sofrem frequentes quebras estruturais. A consideração de amostras maiores possibilita a redução do erro de estimação se as covariâncias se mantêm constantes, porém, aumentando-se a amostra, aumenta-se também a chance de ocorrência de alterações nos parâmetros. Obviamente, ao afetar a matriz de covariância, tais quebras tendem a modificar a proporção ótima de cada ativo no portfólio. Como a data de ocorrência destas quebras estruturais é desconhecida, uma forma de minimizar seu efeito sobre o portfólio é rebalanceá-lo diariamente com a chegada de novas informações. Entretanto, o rebalanceamento diário implica em custos de transação que acabam por inviabilizar a estratégia na prática. No intuito de explorar o *tradeoff* entre custos de transação e variação nos pesos do portfólio ótimo, utiliza-se normalmente o rebalanceamento da carteira após um período de tempo determinado exogenamente. Porém, é irrealista pensar que os pesos de carteiras reajustadas com menor frequência irão estar sempre próximo dos pesos do portfólio ótimo.

Portanto, como destacado por Foster & Nelson (1996), a rápida detecção de quebras estruturais pode auxiliar o investidor na escolha ótima entre viés e custos de transação, pois em momentos turbulentos pode ser necessário atualizar a posição da carteira com maior frequência do que em períodos de menor turbulência. E, mesmo dentro de momentos de maior turbulência, pode ser ótimo rebalancear o portfólio duas vezes em uma determinada semana, porém apenas uma vez em um outro mês turbulento. Com intuito de detectar os momentos nos quais os pesos da carteira atual se desviam dos pesos do PVMG, Golosnoy & Schmid (2007) desenvolveram ferramentas de monitoramento dos pesos ótimos para detectar a ocorrência de possíveis quebras estruturais na composição ótima do portfólio, indicando então o momento adequado para a atualização deste. Do ponto de vista estatístico, essa tarefa difere da detecção *ex-post* de quebras estruturais em séries de tempo como em Banerjee & Urga (2005), uma vez que a detecção no presente contexto precisa ser feita sequencialmente em tempo real. Detecções sequenciais de mudanças súbitas no processo de interesse é o principal interesse do chamado controle estatístico de processos (CEP) e suas principais

ferramentas são os gráficos de controle (de agora em diante denotados por GC).

Como o investidor toma sua decisão em termos de um vetor de pesos do portfólio, a natureza do monitoramento passa ser multivariada e Golosnoy & Schmid (2007) desenvolveram os gráficos de controle (GC) de média móvel exponencial (EWMA) para captar mudanças nos pesos do PVMG. O presente artigo, baseado na abordagem de Golosnoy & Schmid (2007), quantifica o efeito econômico da estratégia de investimento baseada no monitoramento sequencial da carteira utilizando dados do mercado de ações brasileiro e o compara com resultado de estratégias baseadas em critérios puramente exógenos de rebalanceamento.

No presente artigo busca-se explorar não só a aplicabilidade do procedimento de Golosnoy & Schmid (2007) para dados brasileiros, mas também utilizar os sinais emitidos pelos gráficos de controle visando um aprimoramento na estimação da matriz de covariância dos retornos, evitando quebras estruturais na amostra utilizada. A informação fornecida pelo GC, por sua vez, é utilizada para reduzir a variância fora da amostra do portfólio de variância mínima global. Introduz-se assim, a estratégia de portfólio com uma janela variante no tempo para a matriz de covariância, reduzindo o risco do uso de amostras contendo quebras estruturais que possivelmente levaram a estimativas enviesadas. Caso um sinal seja emitido pelo processo de controle, uma janela menor é escolhida. Caso contrário, expande-se o tamanho da janela de estimação. Tal abordagem visa encontrar o *trade-off* ótimo entre erro de estimação e viés devido às quebras estruturais.

Os resultados econômicos do processo de monitoramento dos pesos do PVMG são avaliados em um estudo empírico na seção 4. O portfólio de variância mínima global é construído usando o retorno diário dos 61 ativos com maior volume negociado no Índice Bovespa, de Janeiro 2000 a Fevereiro de 2015 e a abordagem sequencial é aplicada visando a detecção de mudanças nos pesos ótimos do PVMG. A estratégia de monitoramento endógena proposta é comparada com estratégias de investimentos baseadas em regras *ad-hoc* puramente temporais para rebalanceamento do PVMG, sendo estas diária, mensal, semestral e anual. Além disso, utiliza-se também pesos constantes onde os pesos ótimos são escolhidos no início do período e mantidos constantes ao longo das N observações fora da amostra. A variância fora da amostra do portfólio é usada como critério de performance, juntamente com retorno médio líquido de custos de transação, índice *Turnover* e de Sharpe. Conclui-se que a estratégia baseada no monito-



ramento sequencial dos pesos do PVMG superou as demais alternativas, reforçando a utilidade para o investidor do controle dos pesos ótimos. Assim, os GC propostos representam uma ferramenta útil para o monitoramento da volatilidade do portfólio aprimorando a estimativa da matriz de covariância dos retornos e gerando carteiras com melhores características em termos de diversos indicadores.

Para isso, estrutura-se o presente artigo da seguinte maneira. Além desta introdução, uma segunda seção é responsável por descrever o problema enfrentado pelo investidor ante a decisão de investir em um portfólio de variância mínima, e pela formulação dos gráficos de controle propostos por Golosnoy & Schmid (2007). A Seção 3 é responsável por explicar as diferentes estratégias de investimentos e seus critérios para a rebalanceamento do PVMG. A seção subsequente se preocupa em construir os parâmetros responsáveis pela avaliação da performance portfólio global de variância mínima. Após discutir os métodos e dados utilizados, a seção 4 apresenta os resultados obtidos para as diferentes estratégias e ambos gráficos de controle. O artigo se encerra com algumas conclusões e considerações finais.

## **2. Monitoramento sequencial do portfólio ótimo**

A hipótese de normalidade para a série diária de retornos de ativos financeiros é fortemente rejeitada. Sua distribuição apresenta caudas pesadas, assimetria e agrupamento de volatilidade. Estes fatos estilizados podem ser modelados por diferentes tipos de abordagens, como modelos de distribuição estáveis (Mittnik & Rachev, 2000), GARCH (Bollerslev, 1986) e modelos de volatilidade estocástica (Hsu *et al.*, 1974, Kim & Kon, 1999). Todas essas abordagens apresentam seus prós e contras. Distribuições estáveis geralmente não possuem segundo momento, sendo dificilmente aplicáveis à estratégias de minimização de volatilidade. O número desconhecido de estados complica a aplicação de modelos de mudança de regime nas finanças empíricas (Franses & van Dijk, 2000). O GARCH multivariado, por outro lado, frequentemente sofre da maldição da dimensionalidade (Bauwens & Laurent, 2005).

A abordagem de modelos localmente constantes de Hsu *et al.* (1974) assume que o retorno dos ativos são misturas Gaussianas com mudanças imprevisíveis nos parâmetros da distribuição. Baseado em tal hipótese, o investidor minimizador de volatilidade está diretamente interessado na detecção sequencial das alterações ocorridas na mistura Gaussiana que ca-

racteriza o retorno dos ativos, pois estas mudanças podem alterar significativamente a composição do portfólio ótimo. Portanto, ele deve checar ao início de cada período se houve ou não uma quebra estrutural responsável por afetar a matriz de covariância dos ativos e, consequentemente, os pesos ótimos do portfólio de variância mínima.

Controle estatístico de processos sugere o uso de gráficos de controle (GC) para o monitoramento de quebras estruturais em processo de interesse. Gráficos de controle são usados principalmente em engenharia (ver Montgomery, 2005), mas vem sendo aplicados ultimamente a processos econômicos. Golosnoy & Schmid (2007) propuseram GC para controle do peso ótimos de portfólios de variância mínima, derivaram alguns GC e investigaram a capacidades destes em detectar quebras estruturais em diversas situações simuladas e em uma aplicação empírica baseada em carteiras formadas por índices MSCI para o mercado de ações de países desenvolvidos. No presente artigo, pretende-se aplicar a abordagem de Golosnoy & Schmid (2007) a dados brasileiros e quantificar o ganho econômico do monitoramento sequencial dos pesos ótimos.

Com o propósito de modelar as quebras estruturais da matriz de covariância incondicional, assume-se que estas são eventos aleatórios imprevisíveis, ocorrendo em  $t = \tau$ , onde  $\tau$  é uma data desconhecida. Além disso, como em Hsu *et al.* (1974), supõe-se que, em um determinado período, a matriz de covariância sofre mudanças de nível ou se mantém constante. Tal abordagem permite a modelagem de todos fatos estilizados observados em séries de retornos diárias (Kim & Kon, 1999). Pode-se entender a abordagem como um modelo de mudança de regime com um número muito grande de regimes (Franses & van Dijk, 2000). As mudanças de nível nos elementos da matriz de covariância tendem a alterar os pesos do portfólios de variância mínima global e, com isso, sua detecção é de grande importância para o investidor. Ele necessita decidir a cada instante do tempo se ocorreu ou não uma quebra, de forma a atualizar ou não o seu portfólio.

## 2.1 O problema do investidor

O investidor considerado aqui está interessado em minimizar a variância fora da amostra dos retornos do portfólios de variância mínima global (PVMG), sujeito à restrição de que a soma dos pesos ótimos dos ativos da carteira seja igual a 1. Em outras palavras, o investidor preocupa-se puramente em minimizar a volatilidade de seu portfólio de ativos:

$$\min w_t' \Sigma_t w_t. \quad s.a. \quad w_t' \iota = 1, \quad (1)$$



onde  $w_t$  é um vetor coluna contendo os pesos dos portfólios,  $\iota$  é um vetor composto por números uns, enquanto  $\widehat{\Sigma}_t$  é a matriz de covariância estimada<sup>3</sup>. Os pesos  $\widehat{w}_t$  do PVMG que solucionam o problema de minimização em (1) são dados conforme:

$$\widehat{w}_t = \frac{\widehat{\Sigma}_t^{-1} \iota}{\iota' \widehat{\Sigma}_t^{-1} \iota}, \quad (2)$$

tal que a variância desse portfólio de mínima variância será:

$$V_{min} = \frac{1}{\iota' \widehat{\Sigma}_t^{-1} \iota}. \quad (3)$$

Como (2) depende somente da estimativa  $\widehat{\Sigma}$ , quando a matriz de covariância  $\Sigma$  sofrer mudanças, estas mudanças poderão levar a alterações significativas nos pesos ótimos do portfólio  $\widehat{w}_t$  e, com isso, o investidor deverá rebalancear seu portfólio. Sugere-se então que o investidor selecione não só o período de rebalanceamento do PVMG de acordo com o monitoramento sequencial de  $\widehat{w}_t$ , mas também a janela de dados usada para calcular  $\widehat{\Sigma}$ .

## 2.2 Gráficos de controle

Gráficos de controle podem ser usados para monitorar alterações nos pesos do PVMG e, consequentemente, na matriz de covariância dos retornos. Um gráfico de controle consiste em uma estatística de controle e uma região de aceitação. Caso a estatística de controle saia desta região de aceitação, o gráfico emite um sinal ou um alarme indicando que alguma mudança ocorreu no processo estatístico sob monitoramento. O gráfico é normalmente iniciado (ou reiniciado) sob a hipótese de que os momentos da estatística de controle são conhecidos e permanecerão constantes até o próximo sinal.

No presente caso, o vetor de pesos estimados  $\widehat{w}_t$  é o processo de interesse e o investidor monitora as alterações no vetor de pesos ótimos de forma sequencial. Isso significa que ele decide a cada período de tempo  $t$  se os pesos dos ativos em sua carteira ainda podem ser considerados ótimos, ou se é necessário efetuar rebalanceamento da carteira de acordo com os

---

<sup>3</sup>Detalhes dos estimadores da matriz de covariância dos retornos são apresentados na seção 2.4

novos pesos ótimos. As hipóteses neste caso são:

$$H_{0,t} : E(\hat{w}_{t,n}) = w. \quad (4)$$

$$H_{1,t} : E(\hat{w}_{t,n}) \neq w, \quad (5)$$

onde  $w$  denota os pesos ótimos “sob controle”, ou seja, os pesos ótimos antes do início do processo de monitoramento. Como os retornos vêm de uma mistura Gaussiana, o estado “sob controle” é caracterizado por uma distribuição Normal para os pesos ótimos. Dessa forma, como mostrando em Golosnoy & Schmid (2007),  $\hat{w}_{t,n}$  é um estimador não enviesado para o estado sob controle,  $w$ , ou seja  $E_0(\hat{w}_{t,n}) = w$ , onde  $w$  é o peso ótimo “sob controle” verdadeiro, calculado segundo (2) mas usando o verdadeiro valor de  $\Sigma$ .

A hipótese nula é rejeitada se a estatística de controle,  $Z_t$ , excede o valor crítico que caracteriza a área de aceitação e denotado por  $c$ . Na teoria de testes de hipóteses tradicional, a probabilidade de erro tipo I determina o valor de  $c$ . Entretanto, devido à natureza sequencial do controle estatístico de processos, não é possível determinar  $c$  da mesma maneira. O critério mais popular para a determinação de  $c$  é o comprimento médio das sequências, ou *average run length* (ARL), definido como o tempo médio para um determinado gráfico de controle dar o primeiro sinal. Logo, dizer que o comprimento de uma sequência é  $L$  significa dizer que, após  $L$  períodos, o gráfico emitiu seu primeiro sinal. Então, se  $L$  é o comprimento de uma sequência,  $E(L)$  é comprimento médio das sequências. Note que quando o processo estiver “sob controle”,  $E_0(L)$  deve ser grande, uma vez que o processo sob monitoramento não sofreu alterações e, com isso, o gráfico de controle não deve emitir muitos sinais. Por outro lado, se há uma quebra estrutural e os momentos do processo sob monitoramento se alteram, o gráfico de controle emitirá sinais com maior frequência e, portanto, o comprimento médio das sequências no estado “fora do controle” deve ser bem menor.

Quando a estatística de controle cai na área de rejeição pela primeira vez, um sinal é emitido indicando a rejeição da hipótese nula. O tempo até esta ocorrência (tamanho da sequência) é denotado por  $L \geq 0$ .  $L$  é uma variável aleatória definida para cada GC como:

$$L = \inf [t \in \mathbb{N} : Z_t > c], \quad (6)$$

o que deixa claro que  $L$  depende de  $c$ , isto é:  $L = L(c)$ . Um bom gráfico de controle não fornece sinal por longos períodos se nada efetivamente ocorrer, tal que o processo esteja sempre sob controle. Nesse caso o tempo até o



primeiro sinal deve ser grande. Alternativamente, um GC deve prover uma rápida sinalização após o ponto de ruptura  $t = \tau$ . Dessa forma, a distância entre a emissão do sinal e a ocorrência da quebra estrutural,  $(L - \tau) \geq 0$ , deve ser a menor possível.

O valor crítico  $c$  é obtido segundo a distribuição sob controle de  $L$  para cada gráfico de controle. Assim, cada GC é calibrado segundo sua distribuição sob controle (ou seja, sob a hipótese nula), tal que  $c$  é obtido implicitamente através de:

$$E(L(c)) = \xi. \quad (7)$$

O valor de  $\xi$  denota o número médio de períodos anteriores à ocorrência do primeiro alarme falso. Geralmente  $\xi = 500$  é utilizado para fins de engenharia (Montgomery, 2005) e Golosnoy & Schmid (2007) também seguem este critério em sua aplicação à otimização de carteiras de mínima variância. Uma dificuldade com (7) é o desconhecimento da distribuição de  $L$ , pois esta só pode ser encontrada analiticamente para alguns casos especiais. Golosnoy & Schmid (2007) utilizam então um exercício de simulação para aproximar a distribuição de  $L$  e esta estratégia também será utilizada aqui.

Golosnoy & Schmid (2007) introduzem dois gráficos de controles baseados em médias móveis exponenciais (EWMA): Mahal Mod e Mahal Dif. Ambos GC são construídos usando a distância de Mahalanobis entre o vetor de interesse e sua contrapartida no estado sob controle, e uma subsequente suavização via EWMA univariada com parâmetro  $\lambda \in [0,1]$ .

O primeiro GC a ser apresentado é o Mahal Mod, o qual é baseado em uma família de gráficos de controle desenvolvidos para lidar com processos autocorrelacionados. Ele usa diretamente o vetor de pesos estimados  $\hat{w}_{t,n}^*$ , onde \* indica que apenas os  $k - 1$  primeiros elementos do vetor precisam ser usados, uma vez que a restrição  $\hat{w}_{t,n}^t = 1$  torna o último elemento do vetor de pesos redundante. A distância de Mahalanobis  $T_{t,n}$  é uma medida da diferença normalizada que caracterizará o desvio do peso estimado no período atual ( $\hat{w}_{t,n}$ ) em relação ao seu valor inicial sob controle ( $w$ ). Sua representação é dada por:

$$T_{t,n}^m = (\hat{w}_{t,n}^* - w^*)' \mathcal{C}ov_0(\hat{w}_{t,n}^*)^{-1} (\hat{w}_{t,n}^* - w^*). \quad (8)$$

A matriz  $(K - 1) \times (K - 1)$  sob-controle, denotada por  $\mathcal{C}ov_0(\hat{w}_{t,n}^*)$ , é discutida em detalhes na seção 2.3.1. A estatística de controle,  $Z_{t,n}^m$ , do GC

é obtida através da suavização exponencial: de (8):

$$Z_{t,n}^m = \lambda T_{t,n}^m + (1 - \lambda) Z_{t-1,n}^m, \quad (9)$$

onde o valor inicial é dado por  $Z_{0,n}^m = E_0(T_{t,n}^m) = K - 1$ .

Em (9),  $\lambda$  é um parâmetro de memória responsável por determinar a importância da informação mais recente na estatística de controle. Valores pequenos de  $\lambda$  indicam pouca influência da nova observação recebida em  $t$ , o que pode tornar o gráfico de controle mais lento para a detecção de mudanças. Por outro lado,  $\lambda = 1$  dá muito peso à informação recebida em  $t$ , aumentando a chance do GC enviar um sinal errado devido a um *outlier* presente apenas em  $t$ .

$Z_{t,n}$  representa a estatística de controle observada em determinado período de tempo  $t$  e, caso  $Z_{t,n} > c$ , o estado caracteriza-se como fora de controle e um sinal é emitido. Caso contrário, o processo continua inalterado até que a estatística de controle supere o valor crítico (i.e.  $Z_{t,n} > c$ ). Sua principal vantagem consiste na detecção de pequenas mudanças nos pesos ótimos do portfólio. Porém, sua reação tende a ocorrer com um atraso significativo<sup>4</sup>.

O gráfico de controle Mahal Dif por sua vez, baseia-se na primeira diferença dos pesos ótimos estimados, eliminando a alta autocorrelação presente nos pesos ótimos do portfólio ( $\hat{w}_{t,n}$ ).

$$\Delta_{t,n}^* = \hat{w}_{t,n}^* - \hat{w}_{t-1,n}^*. \quad (10)$$

Para esta estatística de teste, Golosnoy & Schmid (2007) sugerem a distância

$$T_{t,n}^d = \Delta_{t,n}^{*,'} \mathcal{C}ov_0(\hat{\Delta}_{t,n}^*) \Delta_{t,n}^*, \quad (11)$$

onde  $\mathcal{C}ov_0(\hat{\Delta}_{t,n}^*)$  é uma matriz  $(K - 1) \times (K - 1)$  de controle dos pesos ótimos e sua obtenção é discutida na seção subsequente (2.3.1). Modificando (11) através de uma suavização exponencial, obtém-se:

$$Z_{t,n}^d = \lambda T_{t,n}^d + (1 - \lambda) Z_{t-1,n}^d, \quad (12)$$

com valor inicial dado por  $Z_{0,n}^d = \lim_{n \rightarrow \infty} E_0(T_{t,n}^d) = K - 1$ .

---

<sup>4</sup>Resultado obtido por Golosnoy & Schmid (2007) para dados advindos do índice alemão DAX



### 2.2.1 Matriz de covariância dos pesos de PVMG sob controle

Partindo de (12), a matriz de covariância dos retornos e os pesos do PVMG é dada por:

$$\widehat{\Sigma}_{t,n} = (n-1)^{-1} \sum_{j=t-n+1}^t (x_j - \bar{x}_{t,n})(x_j - \bar{x}'_{t,n}), \quad \widehat{w}_{t,n} = \frac{\widehat{\Sigma}_{t,n}^{-1} \iota}{\iota' \widehat{\Sigma}_{t,n}^{-1} \iota}, \quad (13)$$

com  $\bar{x}_{t,n} = n^{-1} \sum_{j=t-n+1}^t x_j$ . Okhrin e Schmid (2006) derivam a matriz de covariância dos pesos estimados  $\widehat{w}_{t,n}$  assumindo normalidade para os retornos dos ativos:

$$Cov_0(\widehat{w}_{t,n}) = \frac{1}{n-k-1} \left( \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \iota \iota' \Sigma^{-1}}{\iota' \Sigma^{-1} \iota} \right) / (\iota' \Sigma^{-1} \iota), \quad (14)$$

onde  $\Sigma$  é a verdadeira matriz de covariância dos retornos. Golosnoy & Schmid (2007) fornecem a matriz de covariância assintótica da primeira diferença  $\Delta_{t,n} = \widehat{w}_{t,n} - \widehat{w}_{t-1,n}$ , denotada por:

$$Cov_0(\Delta_{t,n}) = \frac{2}{(n-k-1)^2} \left( \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \iota \iota' \Sigma^{-1}}{\iota' \Sigma^{-1} \iota} \right) / (\iota' \Sigma^{-1} \iota). \quad (15)$$

### 3. Estratégias baseadas em monitoramento sequencial

As estatísticas  $Z_{t,n}^m$  e  $Z_{t,n}^d$  são calculadas com base em  $n$  observações passadas de retornos para cada GC, mas o controle estatístico de processos (CEP) requer o conhecimento dos valores sob controle  $E_0(\widehat{w})$  e  $Cov_0(\widehat{w})$ . Esta hipótese não é satisfeita, porém, é possível usar estimativas consistentes de  $E_0(\widehat{w})$  e  $Cov_0(\widehat{w})$ . Com isso, utiliza-se uma janela de tamanho variante,  $m_t \geq n$ , para estimar estes momentos.

Para selecionar o tamanho da amostra  $m_t$  usada para estimar  $E_0(\widehat{w})$  e  $Cov_0(\widehat{w})$  utiliza-se sinais do gráfico de controle. No período inicial de análise  $t=1$ , uma janela de estimação pequena  $m_1 = n$  é selecionada. Se no período  $t=1$  nenhum sinal for encontrado, então pode-se aumentar a amostra em mais uma observação pois não há evidência de mudanças nos momentos da distribuição dos retornos, logo  $m_2 = m_1 + 1 = n + 1$ . Portanto, se não há sinal do GC nos próximos  $l$  períodos, a janela de estimação será  $m_{l+1} = n + l$ , o que aumenta a precisão das estimativas de  $E_0(\widehat{w})$  e  $Cov_0(\widehat{w})$ . Se um sinal é emitido em  $t+\tau$ , é necessário reiniciar o gráfico de controle e definir  $m_{t+\tau} = n$ , pois agora há evidências significativas de uma mudança na distribuição dos retornos e, portanto, em  $E_0(\widehat{w})$  e  $Cov_0(\widehat{w})$ .

A mesma janela amostral variante é usada para calcular a matriz de covariância amostral dos retornos que será usada no cálculo dos pesos do PGMV, pois a estimação da matriz de covariância também gera um *trade-off* entre erro de estimativa e viés, uma vez que amostras maiores tendem a gerar estimativas mais precisas pelo argumento da consistência do estimador, mas aumentam a chance da ocorrência de quebras estruturais, o que enviesará as estimativas (Timmermann, 2000).

Dessa forma, a estratégia de otimização de portfólio pode ser resumida da seguinte maneira: no ponto inicial de avaliação do portfólio,  $t = 1$ , o investidor já possui uma amostra inicial,  $m_1 = n$ , a qual foi utilizada para estimar os pesos do PVMG e os momentos  $E_0(\hat{w})$  e  $Cov_0(\hat{w})$  que serão necessários para calcular as estatísticas  $Z_{t,n}$  e  $Z_{t,n}^d$ . A partir deste ponto, o tamanho da amostra  $m_t$  é aumentado recursivamente até o próximo sinal, quando  $m_t$  voltará a ser reduzida para  $m_t = n$ , minimizando o efeito de quebras estruturais nas estimativas de  $E_0(\hat{w})$  e  $Cov_0(\hat{w})$ . Para implementar essa abordagem, o investidor deve escolher o comprimento médio de uma sequência,  $ARL_0$ , o tamanho  $n$  da janela de estimativa das estatísticas de controle  $Z_{t,n}$  e  $Z_{t,n}^d$  e o parâmetro de memória  $\lambda$ .

#### 4. Critérios de avaliação da performance do portfólio

Uma vez que uma das vantagens da abordagem de GC para rebalanceamento de carteira é justamente melhorar o *trade-off* entre custo de transação e viés na estimativa dos pesos ótimos, é importante avaliar o desempenho das carteiras em termos de estatísticas calculadas com base no retorno líquido de custos de transação. Note que estatísticas baseadas no retorno bruto captam o valor econômico de se calcular pesos do PVMG baseado em uma estimativa mais precisa da matriz de covariância dos retornos. Os pesos podem gerar melhor resultado econômico porque a estimativa de  $\Sigma$  baseada em GC permite a utilização de uma janela de dados maior em determinado momento, ou porque o GC sugere o uso de uma janela de estimativa menor para minimizar o efeito de quebras estruturais em  $\hat{\Sigma}$  e, consequentemente, nos pesos calculados.

Entretanto, o retorno bruto de uma carteira não capta o ganho adicional trazido pela estratégia baseada em gráficos de controle no que se refere à minimização dos custos de transação. O fato do GC não emitir sinais por um longo período de tempo permite não só a utilização de uma amostra mais longa, melhorando a precisão de  $\hat{\Sigma}$ , mas permite também a minimização dos custos de transação. Por outro lado, diferentemente de



uma estratégia com rebalanceamentos infrequentes, a estratégia baseada em GC emite sinais quando for importante rebalancear o portfólio em períodos de tempo mais curtos, explorando então o *trade-off* entre custo de transação e viés na estimação.

Com o intuito de mensurar o impacto dos custos de transação na performance das diferentes estratégias de rebalanceamento, o retorno líquido de cada carteira foi calculado usando custos de comissões e corretagem conforme as normas da BM&F Bovespa.<sup>5</sup> Definindo o retorno bruto da carteira obtida usando a estratégia  $i$  como

$$R_t^i = \sum_{t=1}^{T-1} (w_t' R_t), \quad (16)$$

onde  $R_t$  é o vetor de retornos de todos os ativos da amostra. O retorno líquido da  $i$ -ésima estratégia é simplesmente a diferença entre seu retorno bruto e os custos de transação:

$$R_t^{L_i} = R_t^i - C_t^i, \quad (17)$$

onde  $C_t^i$  é dado por

$$C_t^i = \sum_{t=1}^{T-1} P_{j,t} |\Delta w_{j,t}^i| \alpha, \quad (18)$$

$P_j$  denota o preço do ativo  $j$  no período de tempo  $t$  e  $|\Delta w_{j,t}^i|$  fornece a mudança (absoluta) da proporção do  $j$ -ésimo ativo no portfolio da estratégia  $i$  para  $j \in [1, 2, \dots, 61]$ . O parâmetro de custos de transação,  $\alpha$ , incorpora a taxa de corretagem 0.05%, a taxa de emolumentos = 0.005% e taxa de liquidação = 0.020%, logo,  $\alpha = 0.075\%$ . Assim, o custo de transação em (18) penaliza o portfolio toda vez que mudanças ocorrerem no peso de algum ativo.

O desempenho das carteiras otimizadas será avaliado em termos da média ( $\hat{\mu}$ ) e variância ( $\hat{\sigma}^2$ ) dos retornos líquidos, bem como através dos

---

<sup>5</sup><http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/servicos/custos-e-tributos/custos-operacionais/acoes.aspx?idioma=pt-br>

índices de *Sharpe* e *Turnover*. Estas estatísticas são computadas conforme:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} R_t^{L_i}, \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (R_t^{L_i} - \hat{\mu})^2, \quad (20)$$

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E[R_a^{L_i}]}{\sqrt{var[R_a^{L_i}]}} , \quad (21)$$

$$Turnover = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1}^i - w_{j,t}^i|), \quad (22)$$

sendo que  $w_{j,t}^i$  e  $w_{j,t+1}^i$  em (22) representam o peso do ativo  $j$  escolhido em  $t-1$  sob a estratégia  $i$  e o peso ótimo do ativo escolhido em  $t+1$ , respectivamente. O índice *Turnover* em (22) indica a porcentagem de ajuste do portfólio, fornecendo uma medida da frequência na qual o investidor terá que incorrer em custos de transação (DeMiguel *et al.*, 2009).

A equação (21), conhecida como índice de Sharpe, fornece um indicativo da relação risco x retorno de um investimento. Mais especificamente, para um dado nível de volatilidade, quanto maior o retorno anual da carteira ( $R_a$ ), melhor a relação risco x retorno.

#### 4.1 Dados e Método

Os dados históricos utilizados no exercício empírico são de ações negociadas na BM&F Bovespa. A base de dados é composta por observações diárias dos preços de 61 ações que fizeram parte do índice Ibovespa de Janeiro de 2000 a Fevereiro de 2015, perfazendo um total de 3583 observações diárias. Os retornos são calculados como a diferença dos logaritmos dos preços. Os dados foram obtidos via Bloomberg.

As estratégias de investimento baseadas em gráficos de controle propostas são baseadas no monitoramento sequencial dos pesos ótimos do PVMG e serão comparada a estratégias de atualização dos pesos ótimos do PVMG



de forma periódica com as seguintes periodicidades: diária, mensal, trimestral, semestral e anual; bem como com a estratégia que mantém pesos constantes durante todo o período de avaliação. A estratégia com rebalanceamento diário reajusta os pesos ótimos do portfólio diariamente no intuito de se aproximar ao máximo do portfólio ótimo. Porém, é importante ressaltar que quebras estruturais irão afetar o cálculo de  $\hat{\Sigma}$  nessa abordagem, uma vez que toda a amostra pregressa é utilizada na estimativa da matriz de covariância. Adicionalmente, esta estratégia apresenta alto *turnover* e, consequentemente, altos custos de transação. Apesar disso, essa estratégia se apresenta como um *benchmark* a ser batido.

As estratégias propostas terão os pesos ótimos dos ativos atualizados de acordo com os sinais emitidos pelos dois tipos de gráficos de controle apresentados acima. Caso  $Z > c$ , um sinal é emitido e a matriz de covariância dos retornos é estimada novamente com uma amostra mais curta e os novos pesos ótimos dos ativos do PVMG são calculados com base nessa nova estimativa. Dado a diferença na construção dos gráficos de controle, também será analisado qual GC apresentou um melhor desempenho emitindo de forma mais precisa os sinais de quebras estruturais.

Inicialmente, é necessário a obtenção do valor crítico  $c$ . Para isso, é preciso especificar o comprimento médio de uma sequência, denotado por  $\xi$ . De acordo com literatura (ver, por exemplo, Frisén, 2003),  $\xi \in [100 : 500]$ . Tais valores de  $\xi$  denotam o primeiro sinal do gráfico de controle ocorrendo no intervalo  $t \in [100 : 500]$ , onde  $t$  é o período de tempo no qual o GC envia um sinal. O valor obtido para  $\xi$  tal que a ocorrência do erro tipo-I na emissão dos sinais por parte dos gráficos de controle seja minimizada é de  $\xi = 252$ . Esse valor foi obtido via simulações dentro da amostra inicial de 256 dias para diferentes valores de  $\xi \in [100 : 500]$ . Uma vez fixado  $\xi$ , o valor crítico  $c$  é encontrado através da solução de  $E(L(c)) = \xi$  via algoritmo de Newton.

Após a obtenção do valor crítico  $c$ , foi necessário a escolha do parâmetro de memória da média móvel exponencial,  $\lambda$ , bem como o tamanho  $n$  da janela de estimativa para o cálculo da estatística de controle  $Z$ . O impacto de diferentes valores de  $\lambda$  pode ser observado nas tabelas 2 e 3 do apêndice. Foram testados diferentes valores para  $\lambda \in (0:1)$  na estimativa do PVMG e sua escolha foi baseada no desempenho dentro da amostra inicial de 256 dias em relação aos critérios de performance mencionados acima. O resultado sugere uma memória relativamente longa, i.e. um valor de  $\lambda \in (0,0 - 0,30)$ .

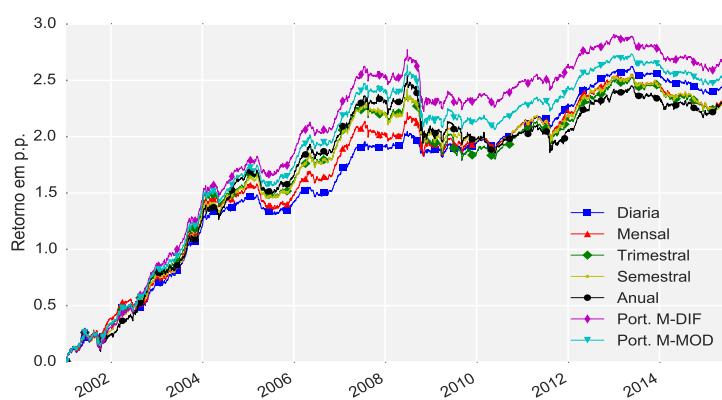
Além de  $\lambda$  é necessário a obtenção de  $n$ , definido como o tamanho da janela para cálculo de  $Z$  e usado também como o número de observações iniciais da janela em expansão  $m_t$ . Assim, a janela aumenta  $m_t = n + \alpha$ , onde  $\alpha$  representa o número de dias corridos após o rompimento do valor limite  $c$ , e continua até que uma nova violação ocorra. Assim, caso um sinal tenha sido emitido pelo GC em  $t = \tau$ , isto é,  $Z_\tau > c$ ,  $m_{\tau+1} = n$ . A escolha da janela de estimativa ótima se deu conforme a escolha de  $\lambda$ , i.e. segundo o desempenho do PVMG dentro da amostra inicial para os critérios de avaliação de performance ( $\mu$ ,  $\sigma^2$ , Turnover e Sharpe) sugeridos. Os melhores resultados foram obtidos para  $n = 252$ ,  $\lambda = 0,25$  e  $c = 140$  para ambos os gráficos de controle (vide apêndice).

## 5. Resultados

### 5.1 Avaliação da Performance do Portfólio

**Figura 1**

Retorno líquido acumulado do PVMG



Com a escolha do tamanho ótimo da janela em expansão e do parâmetro de memória  $\lambda$ , calculou-se o PVMG para as estratégias com e sem monitoramento sequencial. Os resultados para as diferentes estratégias são apresentados na Tabela 1e na Figura 1.

A Figura 1 evidencia a superioridade do PVMG baseados em gráficos de controle, onde os pesos dos portfólios e a amostra de estimativa de  $\hat{\Sigma}$  são monitorados sequencialmente via sinais emitidos pelos GC. Todas as demais estratégias têm retorno acumulado líquido inferior aos obtido por



ambas estratégias proposta. Os melhores resultados nesse critério foram obtidos pelo GC Mahal Dif seguido pelo GC Mahal Mod.

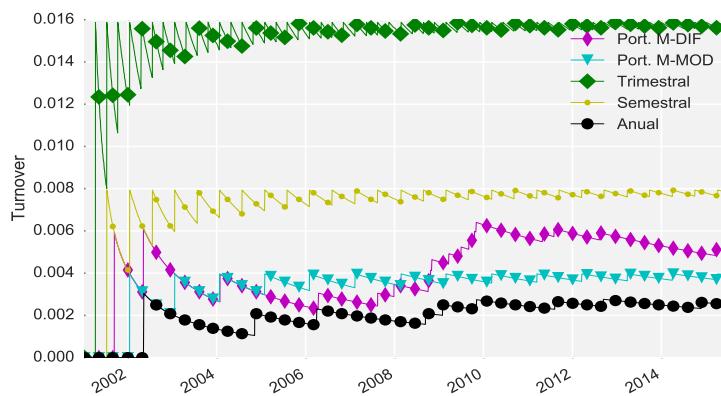
É interessante perceber que o portfólio obtido pelo GC Mahal Dif se destaca com o melhor retorno líquido acumulado desde o início da amostra e seu desempenho superior em relação às outras alternativas vai se acumulando gradualmente durante todo o período. Essa independência do desempenho relativo em relação a períodos de alta e baixa no mercado acionário brasileiro indica que a estratégia baseada no GC Mahal Dif é robusta a diferentes cenários. Seu desempenho final não é resultado de uma performance excepcional em apenas um período da amostra e um desempenho regular no restante do período, mas sim resultado de um desempenho consistente dentro de todo o período analisado. O desempenho do portfólio baseado no GC Mahal Mod também apresenta essa mesma robustez, apesar do seu desempenho ser levemente inferior ao obtido pelo GC Mahal Dif.

O retorno acumulado ao final da amostra de avaliação do portfólio com rebalanceamento diário é a melhor entre as estratégias de rebalanceamento periódico. Entretanto, até 2008, período de alta da Bovespa, o rebalanceamento diário se apresentava como a pior alternativa. Este resultado é relacionado aos altos custos de transação, mas provavelmente também é relacionado aos menores benefícios de uma carteira ótima em um momento onde a grande maioria dos ativos estão em alta. Neste período os pesos ótimos atualizados em alta frequência não compensaram os altos custos de transação de um rebalanceamento diário. Os ganhos do rebalanceamento diário começam a aparecer justamente nos momentos de pior desempenho do Ibovespa, período no qual a seleção de ativos se torna fundamental, uma vez que apenas um pequeno grupo de papéis seguem tendência de alta após meados de 2008. Neste período, manter os pesos ótimos atualizados mais do que compensou os custos de transação, fazendo com que a estratégia de rebalanceamento diário acumulasse retorno suficiente para superar todos os outros rebalanceamentos periódicos que estavam a sua frente até 2008.

A Figura 2 apresenta as frequências de reponderação do PVMG para as estratégias com e sem monitoramento sequencial para permitir uma análise mais detalhada da variação na frequência de ajuste dos portfólios baseados em gráficos de controle. Analisando a frequência de reponderação das estratégias GC, percebe-se que uma maior troca na proporção dos ativos retidos pelo investidor ocorreu justamente em momentos de maior volatilidade dos mercados. Esse padrão fica ainda mais claro para a estratégia GC

Mahal Dif.

**Figura 2**  
Frequência de reponderação (*Turnover*) do PVMG.



Nota: Reponderação diária possui um *Turnover* = 1. Eixo Y representa o *Turnover* em termos percentuais (p.p. %) ao longo de todo período. Exclui-se do gráfico a estratégia de re-ponderação diária (*Turnover* = 100%) para uma melhor visualização.

A Tabela 1 apresenta as performances das diferentes estratégias para a reponderação do PVMG utilizadas, incluindo a estratégia gráficos de controle proposta. Para permitir uma visualização do impacto dos custos de corretagem sobre o retorno médio de cada estratégia a tabela apresenta os valores médios do retorno bruto  $\hat{\mu}(R^i)$  e do retorno líquido  $\hat{\mu}(R^{L_i})$ . A superioridade das estratégias GC em relação às demais em termos líquidos, deve-se principalmente a dois fatores; o primeiro diz respeito a sua natureza endógena de reestruturação do PVMG frente a quebras estruturais, diminuindo o risco incorrido pelo investidor e aumentando relativamente seu retorno<sup>6</sup>. Já o segundo, deve-se ao seu baixo *turnover*. Ou seja, a reponderação dos pesos ótimos não é feita de maneira a se tornar economicamente inviável (1 dia), nem de maneira muito lenta (1 ano) tal que a composição ótima dos ativos se torne muito defasada.

As demais estratégias de reponderação, anual, semestral, trimestral, mensal, diária e pesos constantes apresentaram uma performance satisfatória, porém, inferior à obtida via estratégias baseadas nos sinais dos GC

<sup>6</sup>Vide índice de Sharpe

em critérios como os índices *turnover* e de Sharpe. O pior desempenho em termos de frequência de custo de transação foi observado para a estratégia diária (*Turnover* = 100%). Entretanto, essa estratégia apresenta a menor variância observada devido justamente a sua frequência de reponderação, o que garante uma proximidade grande entre os pesos da carteira e os pesos do PVMG. Entretanto, esta estratégia tem um custo de transação alto, evidenciado pelo alto *turnover* e pela diferença entre retorno líquido e retorno bruto da estratégia. Mesmo assim, a melhor relação risco x retorno (índice de Sharpe) para as estratégias de reponderação exógenas foi obtida pela estratégia diária, com um índice de *Sharpe* = 0.48, seguida pela mensal e trimestral. Porém, a estratégia Mahal Dif é a que apresenta a melhor relação risco x retorno, com um retorno líquido bem superior à estratégia diária ao custo de um incremento apenas marginal no risco da carteira.

**Tabela 1**

Desempenho do PVMG para as diferentes estratégias.

Estratégias	$\hat{\mu}(R^{L_i})$	$\hat{\mu}(R^i)$	$\hat{\sigma}^2$	<i>Turnover</i>	Sharpe
Estratégia gráficos de controle com Janela em Expansão e critérios ótimos					
Mahal MOD	1.886	1.899	0.457	<b>0.004</b>	0.412
Mahal DIF	<b>2.002</b>	<b>2.018</b>	0.430	0.005	<b>0.511</b>
Demais Estratégias sem monitoramento sequencial					
Constante	1.503	1.503	1.523	0.000	0.102
Diário	1.679	1.715	<b>0.370</b>	1	0.481
Mensal	1.702	1.721	0.383	0.046	0.443
Trimestral	1.730	1.747	0.412	0.015	0.422
Semestral	1.737	1.745	0.472	0.007	0.367
Anual	1.730	1.731	0.581	0.003	0.299

Notas: Critérios ótimos para janela em expansão: Dif com  $n = 252$ ,  $\lambda = 0,25$  e  $c = 140$ . Mod com  $n = 252$ ,  $\lambda = 0,25$  e  $c = 140$ . Os melhores resultados encontram-se destacados em negrito.

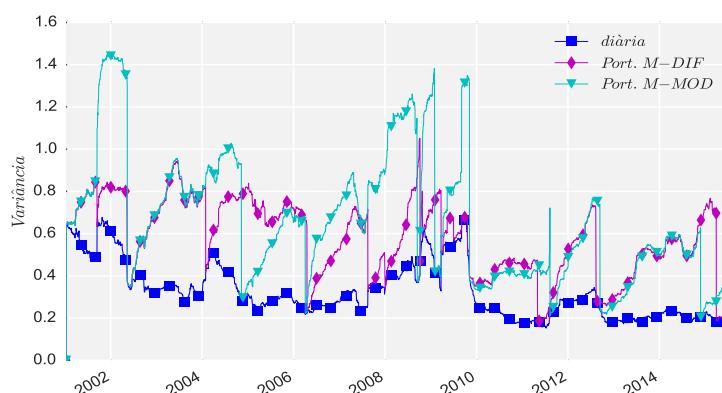
Apesar do desempenho similar entre as estratégias que utilizam GC, a

baseada no Mahal Dif se destaca como estratégia ótima de monitoramento dos pesos ótimos do PMVG. A escolha deve-se justamente à superioridade do GC em obter a melhor relação risco x retorno, um maior retorno líquido médio com um *Turnover* de apenas 5 % juntamente com uma variância de apenas 0.43 (bastante similar ao resultado obtido para a estratégia de reponderação Trimestral). O melhor *trade off* entre custo de transação e desempenho do portfólio Mahal Dif é evidenciado por seu baixo *Turnover* (menor do que o do rebalanceamento Semestral) e sua baixa volatilidade (próxima à do rebalanceamento Trimestral).

Assim, observa-se uma vantagem para o investidor em monitorar de forma sequencial seu portfólio. Não obstante, dada as características próprias da formulação de cada GC responsáveis por captar movimentos abruptos (Dif), ou mudanças na tendência de longo-prazo (Mod), deu-se continuidade à análise empírica e elaborou-se as figuras 3, 4, 5, e 6 visando reforçar a escolha ótima de monitoramento do PVMG baseada somente em um GC ou através da combinação de ambos, mensurando mais precisamente a vantagem incorrida em monitorar o PVMG.

## 5.2 Escolha da estratégia ótima de monitoramento sequencial

**Figura 3**  
Variância: portfolio com re-ponderação diária e PVMG segundo GC Dif e Mod.



Nota: Eixo Y capta a variância em termos % (p.p.).

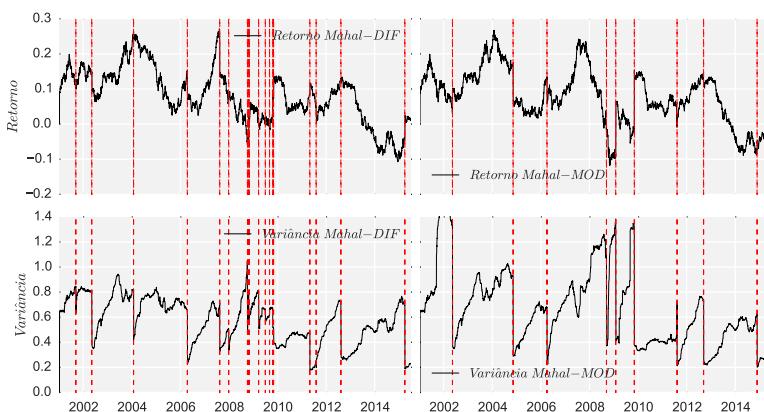
Conforme evidenciado na tabela 1, as estratégias baseadas nos sinais emitidos pelos GC apresentaram melhor desempenho frente às estratégias



desprovidas de monitoramento sequencial. Afim de reforçar a escolha da melhor estratégia de monitoramento, foi analisado globalmente a performance das distintas estratégias de reponderação (GC Dif e Mod) segundo os critérios de avaliação propostos.

**Figura 4**

Retorno (acima) e variância (abaixo) do PVMG segundo sinais emitidos pelo GC *Mahal Dif* (esquerda) e *Mahal Mod* (direita).



Nota: Eixos verticais destacados em vermelho significam a emissão de um sinal pelo GC sugerindo a reponderação do PVMG. Figura superior capta a evolução do retorno do PVMG com estratégia de monitoramento sequencial. Figura inferior representa a evolução da variância do portfólio. Eixo Y capta o valor em termos percentuais.

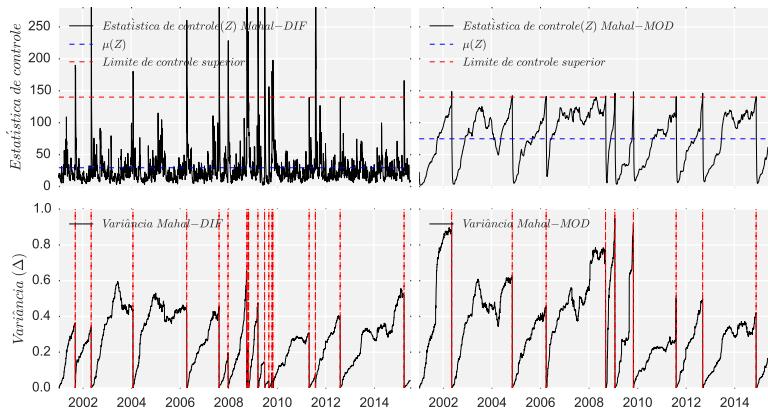
Com relação a variância do PVMG (Figura 3), a superioridade ficou com a estratégia de reponderação diária. Porém, como visto anteriormente, isso é explicado pelo fato deste ser o portfólio que mantém os pesos mais próximos dos pesos do portfólio de variância mínima. Porém, seu problema é devido a seu elevado *turnover*. Assim, a reponderação diária foi utilizada na figura 3 como *benchmark* para fins de comparação. A Figura 3 deixa claro que o GC *Dif* superou o *Mod* e se aproximou da variância do portfólio reponderado diariamente em alguns momentos.

Quanto ao *Turnover*, a estratégia segundo sinais emitidos pelo GC *Mahal Mod* superou em apenas (0,002%) a sua concorrente *Dif*. Desta forma, considerando o desempenho superior da última no critério risco x retorno, conclui-se que a melhor estratégia de monitoramento sequencial consiste efetivamente no GC *Dif*.

Assim, com o propósito de demonstrar a eficácia do monitoramento

**Figura 5**

Evolução da estatística Z-Dif (esquerda superior) e Z-Mod (direita superior) com seu limite crítico  $c$ . Spread entre variâncias do portfólio com controle e portfólio Ótimo (figura inferior).



Nota: Em vermelho, sinais advindos dos GC com janela em expansão. Momentos em que houve uma reponderação do PVMG ( $Z > c$ ) onde  $c = 140$  encontram-se destacados em pontos vermelhos para a figura superior e em eixos verticais vermelhos para o gráfico inferior.

sequencial e para observar sua dinâmica, foram elaboradas com base nas estratégias de monitoramento (Mahal Dif e Mod as figuras 4, 5 e 6. Ao analisar os gráficos que captam a evolução do retorno médio e variância de ambos gráficos de controle (figura 4), assim como aqueles que descrevem estatística de controle Z e o e spread de variâncias (Figura 5), fica latente o sincronismo entre os sinais emitidos pelo GC e grandes oscilações em determinados períodos como por exemplo, a crise dos *sub-primes* ocorrida final de 2008.

Este sincronismo reflete bem o mecanismo de funcionamento do ferramental de monitoramento sequencial dos GC. Ao passo que a distância Mahalanobis entre os portfólios ótimos aumenta, assim também o faz a estatística de controle Z e o spread de variâncias entre o portfólio com gráficos de controle e o portfólio ótimo<sup>7</sup>.

Apesar de grande similaridade entre os resultados obtidos pelos gráficos de controle, a Figura 5 é interessante pois explicita a performance dinâmica do PVMG segundo os sinais dos diferentes gráficos de controle. Assim é

<sup>7</sup>Elevações no spread de variâncias refletem em grande medida as ascensões da variância do PVMG. Porém, as mesmas podem advir de uma queda mais acentuada da variância ótima com relação à da carteira monitorada via gráficos de controle.

possível observar o menor *turnover* obtido pelo Mahal Mod (linhas vermelhas) frente ao Mahal Dif.

Outros pontos surgem ao se analisar a Figura 5. A estatística  $Z$ , por exemplo, é muito mais volátil e para o GC Mahal Dif é mais persistente para o Mahal Mod. Isso deve-se às características próprias da construção de cada GC.<sup>8</sup>

Dando continuidade a análise das Figura 5, a partir do momento em que ocorre um distanciamento entre os portfólios ótimos tal que a estatística  $Z$  supere a região crítica, um sinal é emitido pelo GC indicando uma quebra estrutural. O sinal indica que houve uma alteração significativa na combinação dos pesos ótimos do portfólio sendo os GC responsáveis por sugerir sua reponderação. Este rebalanceamento, na grande maioria dos casos, resulta numa queda da estatística  $Z$  e do *spread* de variância.

## 6. Conclusão

Estratégias responsáveis por reponderar os pesos ótimos do PVMG através do monitoramento sequencial superam a performance daquelas baseadas em critérios puramente periódicos de forma a aprimorar a estimação da matriz de covariância.

A estratégia de reponderação de carteira baseada em sinais emitidos pelo gráfico de controle Mahal Dif apresentou-se superior às demais em termos de índice de Sharpe, *Turnover* e retorno líquido médio. A estratégia de reponderação diária ainda apresentou a menor variância, mas seus custos de transação comprometeram fortemente o desempenho dessa carteira.

A estratégia GC Mahal Dif apresentou uma frequência de reponderação ao longo do período de apenas 0.05 %, uma variância = 0.43 (similar ao obtido para as estratégias reponderação Trimestral, mas com *Turnover* bem inferior) e retorno líquido médio de aproximadamente 2 %, superando todas as outras estratégias consideradas neste último quesito.

## Referências

- Banerjee, A., & Urga, G. 2005. Modeling structural breaks, long memory and stock market volatility: an overview. *Journal of Econometrics*, **129**, 45–67.
- Bauwens, Luc, & Laurent, Sébastien. 2005. A New Class of Multivariate Skew Densities, With Application to Generalized Autoregressive Con-

---

<sup>8</sup>Vide equações 9 e 12

- ditional Heteroscedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**(3), 346–354.
- Bollerslev, T. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**(3), 307–327.
- Caldeira, J., Moura, G., & Santos, A. 2013. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*, 45–65.
- Chan, L.K.C., Karceski, J., & Lakonishok, J. 1999. On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model. *Review of Financial Studies*, **12**(5), 937–74.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F.J., & Uppal, R. 2009. A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, **55**(5), 798–812.
- DeMiguel, Victor, & Nogales, Francisco J. 2009. Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*, **57**(3), 560–577.
- Foster, D. P., & Nelson, D. B. 1996. Continuous record asymptotics for rolling sample variance estimators. *Econometrica*, 95–113.
- Franses, P. H., & van Dijk. 2000. Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance. *University Press, Cambridge*.
- Frisén, Marianne. 2003. Statistical surveillance. Optimality and methods. *International Statistical Review*, **71**.2, 403–434.
- Frost, Peter A, & Savarino, James E. 1986. An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **21**(03), 293–305.
- Golosnoy, V., & Schmid, W. 2007. EWMA control charts for monitoring changes in the optimal portfolio weights. *Sequential Analysis*, **26**(2), 195–224.
- Hsu, D., Miller, R., & Wichern, D. 1974. On the stable Paretian behavior of stock market prices. *Journal of American Statistical Association*, **69**, 23–44.
- Jagannathan, Ravi, & Ma, Tongshu. 2003. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, **58**(4), 1651–1684.



- Jobson, J David, & Korkie, Bob. 1980. Estimation for Markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, **75**(371), 544–554.
- Jorion, Philippe. 1985. International portfolio diversification with estimation risk. *Journal of Business*, 259–278.
- Kim, D., & Kon, S. 1999. Structural change and time dependence in models of stock returns. *Journal of Empirical Finance*, **6**, 66–81.
- Klein, R., & Bawa, V. 1976. The effect of estimation risk on optimal portfolio choice. *Journal of Financial Economics*, **3**(215), 49–70.
- Lamoureux, Christopher G., & Lastrapes, William D. 1990. Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, **8**(2), 225–234.
- Litterman, Robert, & Scheinkman, José. 1991. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, **1**(1), 54–61.
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- Merton, R. C. 1980. On estimating the expected return on the market. *Journal of Financial Economics*, **8**, 77–90.
- Michaud, Richard O. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal. *Financial Analysts Journal*, **45**(1), 31–42.
- Mittnik, S., & Rachev, S. 2000. *Stable Paretian Models in Finance*. New York: Wiley.
- Montgomery, D. C. 2005. *Introduction to Statistical Quality Control 5th edition*. New York: Wiley.
- Okhrin, Yarema, & Schmid, Wolfgang. 2006. Distributional properties of portfolio weights. *Journal of Econometrics*, **134**(1), 235 – 256.
- Stock, James H, & Watson, Mark W. 2004. Combination forecasts of output growth in a seven-country data set. *Journal of Forecasting*, **23**(6), 405–430.
- Timmermann, A. 2000. Moments of Markov switching models. *Journal of Econometrics*, 103–119.

**Apêndice:****Escolha ótima da janela de estimação e parâmetro  $\lambda$  para o PVMG****Tabela 2**

Performance do PVMG via estratégia gráficos de controle com janela expansiva  $n = (63, 126 \text{ e } 252)$ ,  
 $\lambda \in (0,1)$  e GC Mahal Mod.

Gráfico de controle Mahal MOD

Tamanho Janela	$\lambda$	$\mu$	$\sigma^2$	Turnover	Sharpe
$n = 63$	$\lambda \in (0,00 - 0,30)$	0,133	0,083	0,174	0,241
	$\lambda \in (0,30 - 0,60)$	0,129	0,094	0,157	0,213
	$\lambda \in (0,60 - 0,90)$	0,120	0,098	0,142	0,181
	$\lambda \in (0,90 - 0,99)$	0,115	0,089	0,140	0,174
$n = 126$	$\lambda \in (0,00 - 0,30)$	0,084	0,010	0,015	0,236
	$\lambda \in (0,30 - 0,60)$	0,086	0,009	0,015	0,258
	$\lambda \in (0,60 - 0,90)$	0,084	0,010	0,016	0,241
	$\lambda \in (0,90 - 0,99)$	0,086	0,010	0,016	0,255
$n = 252$	$\lambda \in (0,00 - 0,30)$	0,0857	0,4508	0,0039	0,6535
	$\lambda \in (0,30 - 0,60)$	0,0781	0,4513	0,0034	0,6833
	$\lambda \in (0,60 - 0,90)$	0,0809	0,4588	0,0038	0,5952
	$\lambda \in (0,90 - 0,99)$	0,0847	0,4561	0,0043	0,6135

Notas: Os valores ótimos escolhidos encontram-se destacados em negrito. O valor crítico é  $c=140$ .



**Tabela 3**

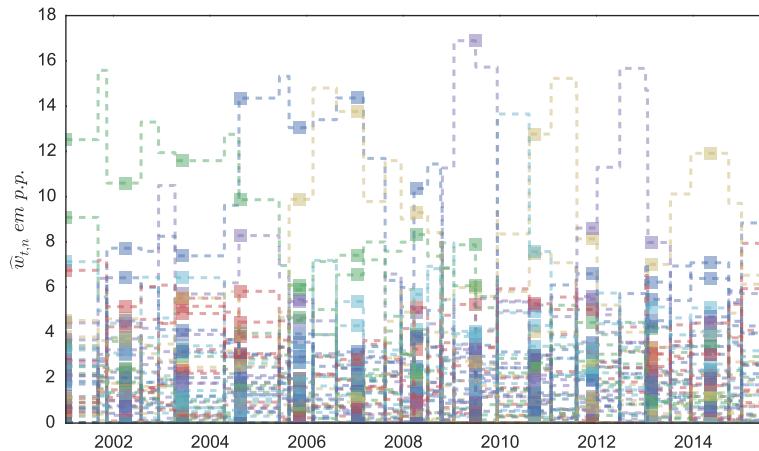
Performance do PVMG via estratégia gráficos de controle com janela expansiva  $n = (63, 126 \text{ e } 252)$ ,  
 $\lambda \in (0,1)$  e GC Mahal DIF.

Gráfico de controle Mahal DIF					
Tamanho Janela	$\lambda$	$\mu$	$\sigma^2$	Turnover	Sharpe
$n = 252$	$\lambda \in (0,00 - 0,30)$	0,0824	0,4581	0,0050	0,6699
	$\lambda \in (0,30 - 0,60)$	0,0795	0,4513	0,0045	0,7103
	$\lambda \in (0,60 - 0,90)$	0,0783	0,4588	0,0051	0,6101
	$\lambda \in (0,90 - 0,99)$	0,0786	0,4561	0,0055	0,6276

Notas: Os valores ótimos escolhidos encontram-se destacados em negrito. O valor crítico é  $c=140$ .

**Figura 6**

Pesos ótimos do PVMG em função do tempo usando estratégia de reponderação Mahal-DIF



Nota: Eixo y captura o peso em termos percentuais de cada um dos 61 ativos (linhas coloridas) que constituem o PVMG.