



El Trimestre Económico

ISSN: 0041-3011

trimestre@fondodeculturaeconomica.com

Fondo de Cultura Económica

México

Venegas Martínez, Francisco; Fundia Aizenstat, Andrés  
Opciones reales, valuación financiera de proyectos y estrategias de negocios.  
Aplicaciones al caso mexicano  
El Trimestre Económico, vol. LXXIII (2), núm. 290, abril-junio, 2006, pp. 363-405  
Fondo de Cultura Económica  
Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31340946001>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# OPCIONES REALES, VALUACIÓN FINANCIERA DE PROYECTOS Y ESTRATEGIAS DE NEGOCIOS

## Aplicaciones al caso mexicano\*

*Francisco Venegas Martínez  
y Andrés Fundia Aizenstat\*\**

### RESUMEN

En este trabajo la metodología de opciones reales se presenta como un instrumento indispensable para que los consejos de administración de las empresas tomen decisiones respecto a proyectos de inversión o estrategias de negocios cuando existe la flexibilidad (opcionalidad) de tomar en el futuro nuevas decisiones relacionadas con extender, contraer, posponer, enmendar o abandonar un proyecto o estrategia. Al respecto, el presente trabajo realiza una revisión de las diferentes fórmulas analíticas que aparecen en la bibliografía para valuar la opcionalidad de estrategias en el supuesto de que el valor presente de los flujos de efectivo esperados sigue una distribución log normal o bien mediante el uso de métodos de árboles binomiales. En particular, se trata el caso de la toma de decisiones de venta o cierre de una empresa cuando el valor de mercado de sus títulos (de capital y deuda) excede el valor presente de los flujos de efectivo esperados o el valor presente de estos flujos es menor que cierto valor de recuperación. En este contexto se analiza el caso de una empresa mexicana de servicios satelitales de comunicación. Asimismo, se aplica la metodología de opciones reales a proyectos carreteros de inversión; específicamente se examina el caso del proyecto de construcción del primer tramo de la autopista Toluca-Atlacomulco según los supuestos de volatilidad constante y estocástica. Es también importante destacar que esta investigación se centra en: *i*) la valuación de opciones reales americanas de abandono; *ii*) valuación de opciones reales compuestas; *iii*) valuación de opciones reales con volatilidad extendiendo el modelo de Hull y White (1987).

\* *Palabras clave:* valuación financiera de proyectos de inversión, estrategias de negocios, opciones reales. *Clasificación JEL:* G0, G33. Artículo recibido el 7 de diciembre de 2004 y aceptado el 12 de agosto de 2005.

\*\* Departamento de Finanzas, Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México (correo electrónico: [fvenegas@itesm.mx](mailto:fvenegas@itesm.mx)). Los autores desean agradecer los comentarios y sugerencias de un dictaminador anónimo de EL TRIMESTRE ECONÓMICO.

## ABSTRACT

In this paper the methodology of real options is presented as an imperative tool for the board of directors of a firm for the decision making process on the financial assessment of projects or business strategies when there is flexibility (optionality) of making, in the future, new decisions such as: expanding, contracting, deferring, correcting or abandoning a project or strategy. In this regard, this research carries out a literature review of closed-form formulas to value the optionality of several strategies are obtained under the assumption that the present value of the expected cash flow follows a log-normal distribution or by using binomial methods. In particular, this paper deals with the case of the decision making of selling or shutting down a firm when the market value of its securities (titles of capital and debt) exceeds the present value of the expected cash flows, or the present value of such expected cash flows is less than certain salvage value. In this context, a Mexican firm that provides satellite communications services is analyzed. Moreover, the methodology of real options is applied to highway construction projects, in particular, the case of the Toluca-Atlacomulco highway project is examined under the assumptions of constant and stochastic volatility. It is also important to emphasize that this paper focuses on: *i*) the valuation of American abandonment real options; *ii*) valuation of composed real options; *iii*) valuation of real options with stochastic volatility extending Hull and White's (1987) model.

## INTRODUCCIÓN

La metodología de opciones reales, en términos generales, es la aplicación de las técnicas de valuación de opciones financieras a la valuación de proyectos de inversión y estrategias de negocios cuando existe la flexibilidad de tomar, en el futuro, nuevas decisiones relacionadas con dichos proyectos y estrategias. Así pues, la metodología de opciones reales valúa la flexibilidad, u opciónalidad, de extender, posponer, enmendar e incluso abandonar un proyecto de inversión o estrategia de negocios, nuevo o existente, en una fecha futura.

La aplicación de la metodología de opciones reales en diversas disciplinas ha sido explosiva en los años recientes; véase por ejemplo: Shackleton *et al* (2004), Botteron *et al* (2003), Henderson y Hobson (2002), Insley (2002), Courchane *et al* (2002), Bernardo y Chowdhry (2002), Bengtsson (2001) y Slade (2001). El presente trabajo de investigación efectúa una revisión de la bibliografía del tema, que no pretende ser completa, sobre fórmulas analíticas para valuar la op-

cionalidad de diversas estrategias de negocios, ya sea mediante el uso de métodos de árboles binomiales o en el supuesto de que el valor presente de los flujos de efectivo esperados sigue una distribución log normal. La bibliografía básica de fórmulas analíticas de opciones reales comprende, fundamentalmente, Amram y Kulatilaka (1999), Cuthbertson y Nitzsche (2001), Mun (2002) y Trigeorgis (1998).<sup>1</sup> Es también importante destacar que el presente trabajo se centra en: *i*) la valuación de opciones reales americanas de abandono; *ii*) valuación de opciones reales compuestas; *iii*) valuación de opciones reales con volatilidad estocástica extendiendo el modelo de Hull y White (1987).

## I. VALOR PRESENTE NETO Y SUS LIMITACIONES

Con el criterio del valor presente neto (VPN), un nuevo proyecto o estrategia se acepta o se rechaza hoy si  $VPN > 0$  o  $VPN < 0$ , respectivamente, y no existe otra posibilidad. Una vez que un proyecto es aceptado con este criterio, rígido y pasivo, los planes de inversión no se modifican, es decir, la inversión es irreversible. Por otra parte, con el criterio del VPN no se puede valuar, hoy, la posibilidad de que un proyecto o estrategia se expanda si el entorno de negocios y el ambiente económico son favorables dentro de cinco años. Sencillamente, porque hoy no se sabe si en el futuro se tendrán o no condiciones favorables para tomar esta nueva decisión. Sin embargo, se puede plantear una “opción” de expansión del proyecto o estrategia, la cual se ejercerá sólo si se presentan dichas condiciones favorables. Esta opción, o flexibilidad, hoy tiene un valor que debería integrarse al valor estático que proporciona el VPN tradicional a fin de valuar, de manera adecuada, un proyecto o estrategia que considere la flexibilidad de tomar nuevas decisiones en el futuro.

Por lo anterior, en la metodología de opciones reales un proyecto o estrategia con  $VPN = 0$  podría incluso ser aceptado si existe la flexibilidad de extenderlo, posponerlo, enmendarlo, etc. En tal caso, dicha flexibilidad, u opcionalidad, de tomar en el futuro una nueva decisión tiene un valor en el presente, *c*. Aunque  $VPN = 0$ , si  $VPN + c > 0$ , entonces es viable extender o posponer el proyecto o la estrategia. De

<sup>1</sup> La bibliografía básica de opciones reales comprende Dixit y Pindyck (1994) y Schwartz y Trigeorgis (2001).

esta manera la metodología de opciones reales permite tomar decisiones intermedias entre aceptar o rechazar un proyecto de inversión o estrategia de negocios, como puede ser la decisión de posponer, sobre todo cuando existe incertidumbre en los resultados esperados. Diversos ejemplos de opciones reales, que surgen en la práctica, se enumera a continuación:

- i) ¿Si se invierte en publicidad o no?
- ii) ¿Si se invierte en investigación y/o desarrollo?
- iii) ¿Si se expande o no la producción actual?
- iv) ¿Si se pospone un proyecto de inversión?
- v) ¿Si se abandona un proyecto de inversión existente?

Vale la pena hacer la aclaración ingenua de que no existen mercados de opciones reales. El valor presente de los flujos esperados de un proyecto de inversión no es un activo que se compre o se venda en el mercado. Sencillamente, la metodología de opciones reales es útil para valuar la flexibilidad de extender, contraer, posponer, enmendar o abandonar un proyecto subyacente de inversión.

### *Modificación del valor presente por una opción real*

En esta sección se ilustra el concepto de opción real y se analiza cómo la flexibilidad en las decisiones de inversión modifica el criterio tradicional de VPN. Asimismo, se introduce el VPN modificado asociado a una opción real. De ahora en adelante, por simplificación, se hará referencia de manera indistinta a proyectos y estrategias.

Antes de entrar de lleno en el análisis de la teoría de opciones reales, el planteamiento de algunas ideas intuitivas puede ayudar a entender mejor el concepto central de opción real. Un ejemplo sencillo es siempre un buen comienzo. Supóngase que la empresa P-MECS planea invertir en el desarrollo de un nuevo campo petrolero en el mar a baja profundidad, con múltiples pozos, llamado “Campo Chico” (cc). Si se utiliza el criterio tradicional del VPN para evaluar la factibilidad financiera del proyecto, la empresa tiene que estimar los precios futuros del hidrocarburo. Posteriormente, con una tasa de descuento adecuada, ajustada por riesgo, la empresa debe calcular el valor presente de los flujos de efectivo esperados, ventas menos

costos de producción, que se generen durante la vida del proyecto, por ejemplo,  $N$  años. Suponga que  $\text{VPN} = M$  (M millones de dólares). Desde el punto de vista rígido del criterio del VPN, el proyecto tiene que desecharse. Algunas preguntas, sin embargo, surgen al respecto: ¿no se omitieron algunos aspectos relevantes acerca de la posible expansión del proyecto en el futuro? Por ejemplo, que tal si estudios exploratorios recientes muestran que a mayor profundidad de CC se pueden establecer otros campos petroleros. No obstante, el desarrollo de otros campos de mayor profundidad sólo puede realizarse si la infraestructura pero sobre todo el *know how* de CC ya existen, para lo cual se requieren por lo menos  $N/2$  años, entonces el proyecto de CC tiene una opción asociada: la posible expansión a otros campos dentro de  $N/2$  años. Esta situación proporciona un valioso elemento de opcionalidad futura.

Esta opción de expansión o, mejor dicho, esta flexibilidad que considera la posible expansión tiene un valor hoy,  $c$ , que debe ser integrado al VPN del proyecto de CC, para obtener un valor presente neto modificado,  $\overline{\text{VPN}}$ , dado por

$$\overline{\text{VPN}} = \text{VPN} - c \quad (1)$$

Por supuesto, no se puede saber hoy, en  $t = 0$ , si esta opción de expansión va a suceder o no. Todo dependerá del precio futuro del petróleo y, por tanto, del valor presente de los flujos de efectivo esperados. Si el valor de la opción de expansión en el presente,  $c$ , es mayor de  $M$ , entonces se debe aceptar el proyecto subyacente CC, aunque  $\text{VPN} < 0$ . Evidentemente, hay un factor de incertidumbre asociado a la volatilidad de los precios del mercado del crudo. De esta manera, la opción de expansión se considera como una opción europea de compra, con volatilidad constante o estocástica.

## II. SIMILITUD ENTRE OPCIONES FINANCIERAS Y REALES

Al igual que en las opciones financieras, el valor de una opción real aumenta con el tiempo de maduración y con la volatilidad del subyacente. Esto implica que la flexibilidad de tomar nuevas decisiones, en el futuro, tiene un valor mayor cuando el horizonte de planeación aumenta y/o cuando hay “mayor” incertidumbre en los resultados

esperados. En los cuadros 1 y 2 se establece la correspondencia entre los parámetros de una opción financiera y los de una real. De esta manera una empresa que, a partir de  $t$ , tiene la oportunidad de invertir en un proyecto subyacente hasta el momento  $T$ , posee una opción europea de compra para adquirir el valor presente de los flujos de efectivo esperados,  $S_t$ , a cambio  $T$  del costo de inversión,  $K$ . En la fecha de vencimiento,  $S_T$  tiene asociado un factor de incertidumbre: la volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto. Por supuesto, la opción sólo será escogida cuando  $S_T > K$ , en cuyo caso el inversionista permanece en el proyecto subyacente; en caso contrario sería conveniente abandonarlo.

**CUADRO 1. Parámetros de las opciones financieras**

Parámetro	Opción financiera
$S_t$	Precio del activo subyacente en $t$
$K$	Precio de ejercicio de la opción
$R$	Tasa de interés libre de riesgo
	Volatilidad de los rendimientos del activo subyacente
$T - t$	Vida del contrato de opción

**CUADRO 2. Similitud entre las opciones financieras y reales**

Parámetro	Opción real
$S_t$	Valor presente de los flujos de efectivo esperados en $t$
$K$	Costo de inversión en $T$
$R$	Tasa de interés libre de riesgo
	Volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto
$T - t$	Tiempo en que la oportunidad de invertir desaparece

Con las ideas hasta ahora expuestas y con cierto abuso del lenguaje, se podría decir que mientras las opciones financieras tratan con activos financieros, las opciones reales lo hacen con activos reales (unidades de negocio, obras de infraestructura, etc.) generados por medio de proyectos de inversión.

### III. OPCIÓN REAL PARA POSPONER UN PROYECTO

Supóngase que una empresa tiene que decidir entre invertir una cantidad  $I_0 = M$  en un proyecto hoy,  $t = 0$ , o posponerlo hasta el próximo año,  $t = 1$ . Supóngase también que una vez hecha la decisión de inversión, ésta es irreversible, lo que significa que su valor de re-

cuperación es cero. Supóngase que el proyecto de que se trate tiene como objetivo producir un bien. El costo de producción del bien es  $N/N - 1$ . Supóngase ahora que el precio del bien en el mercado puede tomar, en cualquier tiempo  $t = 0, 1, 2, \dots$ , los valores  $N - 1$  y  $N - 1$  con probabilidades  $q$  y  $1 - q$ , respectivamente. Por tanto, el precio esperado está dado por:

$$f = q(N - 1) + (1 - q)(N - 1) = 2q - N + 1 \quad (2)$$

Supóngase ahora que la primera unidad del producto es vendida en  $t = 0$  y que el costo del capital (WACC) es  $\gamma$ . Como primer paso se calcula el VPN del proyecto, para ello, por simplicidad, los flujos de efectivo esperados  $f$ , se descuentan con el costo del capital y se resta la inversión inicial,  $I_0 - M$ , esto es,

$$\begin{aligned} \text{VPN} &= I_0 - \frac{2q - N + 1}{(1 - \gamma)^t} \\ &= M - (2q - N + 1) \frac{1}{(1 - \gamma)^t} \\ &= M - (2q - N + 1) \frac{1}{(1 - \gamma)^t} \end{aligned} \quad (3)$$

Considérese ahora la opción de posponer la inversión hasta  $t = 1$ . En este caso el valor presente neto de esta opción es

$$\begin{aligned} \overline{\text{VPN}} &= q \max \left( \frac{M}{1 - \gamma} - \frac{N - 1}{(1 - \gamma)^1}, 0 \right) + (1 - q) \max \left( \frac{M}{1 - \gamma} - \frac{N - 1}{(1 - \gamma)^1}, 0 \right) \\ &\quad + q \max \left( \frac{M - (N - 1)}{1 - \gamma}, 0 \right) \\ &\quad + (1 - q) \max \left( \frac{M - (N - 1)}{1 - \gamma}, 0 \right) \\ &= q \max \left( \frac{M}{1 - \gamma} - \frac{N - 1}{(1 - \gamma)^1}, 0 \right) + (1 - q) \max \left( \frac{M}{1 - \gamma} - \frac{N - 1}{(1 - \gamma)^1}, 0 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Obsérvese que las sumatorias en  $\overline{\text{VPN}}$  comienzan en  $t = 1$ , ya que la inversión se pospone hasta esa fecha. Si se supone que

$$N - 1 \quad M \quad \frac{---}{1} \quad N - 1 \quad (5)$$

se infiere que

$$\overline{\text{VPN}} = q \frac{N - 1}{1} - \frac{M}{1}$$

Si, en  $t = 1$ , el precio aumenta a  $N - 1$ , el valor presente de los flujos de efectivo es  $(N - 1)(-1)/q$ , lo cual supera la inversión inicial  $M$ , mientras que el valor presente de los flujos de efectivo cuando el precio disminuye a  $N - 1$  es  $(N - 1)(-1)/q$ , esta cantidad es menor que la inversión. Si se escribe

$$M \frac{---}{1} \quad N$$

lo cual es congruente con (5), ya que  $N - 1 > N - N - 1$  siempre es cierta, se tiene que

$$\overline{\text{VPN}} = q \frac{N - 1}{1} - \frac{M}{1} - \frac{q}{1}$$

Por otro lado, de (3), se obtiene

$$\text{VPN} = (2q - 1) \frac{1}{1}$$

Cuando  $0 < q < 1/2$ , se tiene que

$$\overline{\text{VPN}} = \frac{q}{1} < 0$$

y

$$\text{VPN} < 0$$

Según el criterio tradicional del VPN, el proyecto tiene que ser rechazado. Sin embargo, la opción de posponer la inversión hasta  $t = 1$  tiene un valor positivo. Obsérvese también que cuando  $q = 1/2$ , se tiene que  $\text{VPN} = 0$  y

$$\overline{\text{VPN}} \quad \text{VPN} \quad c$$

en el que  $c - 1/2$  es el valor actual, de la opción real de posponer la inversión hasta  $t = 1$  lo cual está de acuerdo con (1).

#### IV. DIFERENTES TIPOS DE OPCIONES REALES

Considérese un movimiento browniano  $(W_t)_{t \in [0,T]}$  definido en un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada  $(\mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \in [0,T]}, P)$ . Se supone que el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $t, S_t$ , es conducido por

$$dS_t = (S_t, t)dt + (S_t, t)dW_t \quad (6)$$

en el que  $(S_t, t)$  y  $(S_t, t) = 0$  son funciones conocidas que posteriormente se especificarán.

##### 1. Opción real de expansión

Una empresa podría expandir el valor presente de los flujos de efectivo esperados de un proyecto en una proporción  $\alpha$ . Por ejemplo, mediante el incremento en las de ventas futuras, precios, capacidad de la producción o base de clientes, para lo cual requiere invertir la cantidad  $K$  en el momento  $T$ . Esta posibilidad estratégica tiene una opción asociada con el proyecto subyacente existente. Si  $(1 + \alpha)S_T - K$  es el valor presente neto aumentado en la proporción  $\alpha$  menos el costo de la inversión adicional  $K$  al momento  $T$ , el valor intrínseco de esta opción está dado por

$$\begin{aligned} c(S_T, T; \alpha, K) &= \max((1 + \alpha)S_T - K, 0) \\ &= S_T \max(-S_T + K, 0) \\ &= S_T \max(S_T - K, 0) \\ &= S_T - c(S_T, T; \alpha, K) \end{aligned} \quad (7)$$

en la que  $K = K / \alpha$  y  $c(S_T, T; K)$  es el valor intrínseco de una opción europea de compra. En particular, si el valor presente de los flujos de efectivo esperados es conducido por un movimiento geométrico browniano “neutral al riesgo”,

$$dS_t = rS_t dt + S_t dW_t \quad (8)$$

en el que  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y  $\sigma$  es la volatilidad instantánea, se tiene que el valor de la opción real de expansión, en  $t$ , está dado por

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T - \max(S_T - K, 0) | F_t] \\ &= e^{-r(T-t)} (S_T - \max(S_T - K, 0)) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T | S_t] - e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= S_t - c_{BS}(S_t, t) \end{aligned} \quad (9)$$

en que

$$f_{S_T|S_t}(s | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\ln \frac{s}{S_t} - r - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{(T-t)}\right)^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c_{BS}(S_t, t) &= S_t - (d_1) - Ke^{-r(T-t)}(d_2) \\ (d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - r - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sqrt{T-t}} \quad (12)$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{T-t} \quad (13)$$

Es decir,  $c_{BS}(S_t, t)$  es la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción europea de compra.

Es importante destacar que los flujos de efectivo esperados no son un activo que se compre o venda en el mercado, lo que genera una situación de mercados incompletos. Por tanto, los resultados que arroja la fórmula de Black-Scholes hay que tomarlos con cierta cautela.

## 2. Opción real de contracción

Cuando una empresa introduce al mercado un nuevo producto (bien o servicio), usualmente, tiene un plan de inversión en dos etapas. En la primera la empresa invierte una cantidad inicial, por lo común pequeña, para conducir estudios de mercado. La inversión subsecuente depende de los resultados de dichos estudios. Si, en la segunda etapa, el producto no presenta la aceptación esperada la empresa puede ejercer la opción real de contraer la producción con el recorte de inversiones futuras.

Sea  $M$  el costo de la inversión inicial en  $t$ . Si el producto no tiene la aceptación esperada, la empresa puede invertir en la segunda etapa una cantidad más pequeña  $N$ ,  $N < M$ , lo que traerá como consecuencia una contracción, en una proporción  $\alpha$ , del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente. El valor intrínseco de esta opción de contracción satisface

$$\begin{aligned} c_c(S_T, T; \alpha, K, N) &= \max((1 - \alpha)S_T - N, S_T - K) \\ &= S_T - \max(-(S_T - N), -K) \\ &= S_T - \min(-S_T + N, K) \end{aligned} \quad (14)$$

en el que  $K = e^{r(T-t)}M$ . Es decir, se invierte  $K$  o se invierte  $N$ ; esto último trae como consecuencia una contracción de los flujos esperados.

## 3. Opción real de cierre temporal

Supóngase que el mercado para cierto producto depende del clima, por ejemplo, un ventilador o una chamarra. El costo variable anual,  $X_T$ , de la empresa puede ser pensado como el precio de ejercicio de una opción real de cierre temporal en  $T$ . Se supone que el costo de “cierre” es  $C$ , el cual es una proporción fija,  $\beta$ , del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente,  $S_T$ , es decir  $C = S_T\beta$ . Asimismo, supóngase que esta opción expira en  $T$ . Si los flujos de efectivo previstos son menores que los costos variables, entonces, las operaciones se suspenden, lo cual genera un ahorro en los costos variables. En este caso el valor intrínseco de la opción es

$$\begin{aligned}
 c_x(S_T, T; X, K) &= \max(S_T - X - a, S_T - C - a) \\
 &= \max(S_T - X - a, (1 - r)S_T - a) \\
 S_T &= \max(X, S_T - a) \\
 S_T &= \min(X, S_T)
 \end{aligned} \tag{15}$$

en el que  $a$  representa los costos fijos.

#### 4. Opción real de permanencia

En proyectos de inversión de etapas múltiples se pasa de una etapa a la siguiente si el beneficio esperado es positivo. En caso contrario no se invierte en la siguiente etapa y, posiblemente, tampoco en todas las demás. De esta manera, en cada etapa en que se invierte también se adquiere una opción para permanecer en el proyecto en la próxima etapa. Esta es una opción europea (de compra) para permanecer en el proyecto si el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente,  $S_T$ , es mayor que el costo de inversión,  $K$ . El valor intrínseco es

$$c_p(S_T, T; K) = \max(S_T - K, 0) \tag{16}$$

Si la dinámica del valor presente de los flujos de efectivo esperados es conducida por la ecuación diferencial estocástica (8), se tiene que  $c_p(S_t, t) = c_{BS}(S_t, t)$ .

#### 5. Opción real de abandono

El valor de mercado de los títulos (de capital y deuda),  $V_T$ , de una empresa, en algunos casos, excede el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $T$ ,  $S_T$ . En este caso, surge la opción de vender la empresa ya que su valor de mercado excede el valor presente de los flujos de efectivo esperados. Como segundo ejemplo supóngase que una empresa se encuentra operando con pérdidas en un ambiente de recesión económica profunda y que podría tomar la decisión de cierre total, en  $T$ , si el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $S_T$  es menor que cierto valor de recuperación  $V_T$ . En consecuencia, el valor intrínseco de esta opción real es

$$c_a(S_T, T) = \max(S_T, V_T) \quad (17)$$

Si  $V_T > S_T$  la opción se ejerce. Si  $V_T$  es constante, por ejemplo,  $V_T = K$ , y la opción sólo puede ser ejercida en  $T$ , entonces

$$c_a(S_T, T) = \max(S_T, K) = \max(S_T - K, 0) = K \quad (18)$$

En este caso,

$$c_a(S_T, T) = \max_0 [\max(s - K, 0) - K] f_{S_T|S_t}(s|S_t) c_{BS}(S_T, T) - K \quad (19)$$

en que  $c_{BS}(S_T, T)$  es la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción europea de compra, dada en (11). El caso realmente interesante es cuando la opción real de abandono es del tipo americano. Sin embargo, esta situación será analizada en detalle en la sección VII.

## 6. Opción real de cambio

Las opciones de cambio surgen cuando una empresa puede producir un mismo bien o servicio con diferentes conjuntos de insumos. Se supone que el tiempo y costo de cambiar de un conjunto de insumos a otro no representan un obstáculo para la empresa. Por ejemplo, si una empresa produce electricidad puede cambiar del uso de carbón a combustóleo. Es importante destacar que estas opciones de cambio son reversibles, es decir, se puede regresar del combustóleo a la electricidad. El valor intrínseco de esta opción real de cambio es

$$c_s(S_T, T) = \max(S_{2T} - S_{1T} - K, 0) \quad (20)$$

en el que  $S_{1T}$  es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $T$  en el modo de producir actual,  $S_{2T}$  es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $T$  en el otro modo de producir, y  $K$  es el costo del cambio. Si  $S_{2T} - S_{1T} < K$ , se ejerce la opción de cambio.

## 7. Opciones reales compuestas (opciones reales sobre opciones reales)

Una opción compuesta se refiere a una opción cuyo subyacente es otra opción. La composición de opciones reales puede hacerse en un mismo proyecto o en otros proyectos relacionados. En el primer caso, supóngase, por ejemplo, que se realiza una inversión inicial para un

proyecto de investigación y desarrollo (ID). Esta inversión permite comenzar el proceso de investigación. Si el proyecto tiene éxito en el futuro, entonces se extiende la inversión en investigación con la compra de equipo adicional, la contratación de más investigadores, la adquisición de más y mejores bases electrónicas de datos, etc. Esta es una opción compuesta en la que la decisión para extender la investigación en el futuro depende de los resultados de la investigación inicial. Por otra parte, respecto al caso de opciones reales de otros proyectos relacionados, considere, por ejemplo, un proyecto en el que se hace una inversión inicial en ID de fármacos; si el proyecto tiene éxito se toma entonces la decisión para iniciar un proyecto de publicidad a fin de introducir el producto en el mercado. Esta es una opción compuesta en la que la decisión futura de iniciar un proyecto publicitario para introducir un fármaco en el mercado depende de los resultados de la investigación inicial.

Como se dijo líneas arriba, una opción compuesta es sencillamente una opción sobre una opción. El pago por ejercer una opción compuesta implica el valor de otra opción. Una opción compuesta tiene, en consecuencia, dos fechas de vencimiento y dos precios de ejercicio. Considérese, por ejemplo, el caso de una opción europea de compra sobre una opción europea de compra. En la primera fecha de vencimiento,  $T_1$ , el tenedor de la opción tiene el derecho de comprar una nueva opción de compra a un precio de ejercicio  $K_1$ . Asimismo, supóngase que esta nueva opción de compra tiene fecha de vencimiento  $T_2$  y precio de ejercicio  $K_2$ . Sea  $c(S, \cdot; K_2)$  el valor de una opción de compra con tiempo para el vencimiento  $T_2$  y precio de ejercicio  $K_2$  y  $S$  el valor presente de los flujos de efectivo esperados. Denótese mediante  $c_{call}(S_0)$  el valor de la opción compuesta en el momento actual,  $t = 0$ . En la primera fecha de vencimiento,  $T_1$ , el valor intrínseco de la opción real compuesta está dado por:

$$c_{call}(S_{T_1}) = \max(K_1, c(S_{T_1}, T_2 - T_1; K_2))$$

Sea  $S^*$  el precio crítico del activo tal que  $c_{call}(S^*, T_2; K_2) = K_1$ . Es decir,  $S^*$  es tal que

$$K_1 - S^* = ( ) - K_2 = (\sqrt{T_2})$$

en el que

$$\frac{\log \frac{S^*}{K_2} + r - \frac{1}{2} \sigma^2 T_2}{\sqrt{T_2}}$$

De esta manera, cuando  $S = S^*$ , se tiene que  $c(S, T_2; K_2) = K_1$  y, consecuentemente, el tenedor ejercerá la opción de compra en  $T_1$ . El valor de la opción compuesta en el momento actual depende de la probabilidad conjunta de que el precio del activo sea mayor que  $S^*$  en  $T_1$  y mayor que  $K_2$  en  $T_2$ . En el supuesto de que el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente es log normal, la fórmula de valuación para esta opción real compuesta satisface

$$c_{call}(S_0) = S_0 \Phi_2(d, b; \rho) - K_2 e^{-rT_2} \Phi_2(d - \sqrt{T_1}, b - \sqrt{T_2}; \rho) \\ K_1 e^{-rT_1} \Phi_2(d - \sqrt{T_1})$$

en la que

$$d = \frac{\log \frac{S_t}{S^*} + r - \frac{1}{2} \sigma^2 T_1}{\sqrt{T_1}}$$

$$b = \frac{\log \frac{S_t}{K_2} + r - \frac{1}{2} \sigma^2 T_2}{\sqrt{T_2}}$$

y

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

En las fórmulas anteriores,  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo,  $\sigma$  es la volatilidad instantánea,  $\Phi_2(x, y; \rho)$  es la función de distribución acumulada normal estándar univariada y  $\Phi_2(x, y; \rho)$  es la función de distribución acumulada normal tradicional bivariada con coeficiente de correlación  $\rho$ . El primer término de la fórmula de valuación del  $c_{call}$  proporciona el valor, neutral al riesgo, del activo subyacente condicionado a que  $S = S^*$  en  $T_1$  y  $S = K_2$  en  $T_2$ , el segundo término, de  $c_{call}$ , proporciona el pago esperado de elegir la opción en  $T_2$  y el último término es el pago esperado de elegirla en  $T_1$ . En el apéndice I se

presentan fórmulas aproximadas para calcular la distribución normal estándar y la distribución acumulada normal bivariada estándar para valuar opciones reales compuestas.

## V. VALUACIÓN DE OPCIONES REALES CON EL ENFOQUE DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Sea  $(W_t)_{t \in [0,T]}$  un movimiento browniano definido en un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada  $(\mathcal{F}, F, (F_t)_{t \in [0,T]}, P)$ . Sea  $c = c(S_t; t)$  el valor de opción real. Si el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $t$ ,  $S_t$ , es conducido por el proceso

$$dS_t = (S_t, t)dt + (S_t, t)dW_t \quad (21)$$

en el que  $(S_t, t)$  y  $(S_t, t) = 0$  son funciones conocidas entonces, en condiciones de equilibrio (es decir, no existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo),  $c$  satisface la siguiente ecuación diferencial parcial determinista de segundo orden:

$$\frac{c}{t} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}}{(S_t, t)^2} - \frac{c}{S_t} S_t r - rc = 0 \quad (22)$$

sujeta a

$$c(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad c(S_t, T) = h(S_t)$$

en el que  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y  $h(S_t)$  es el valor intrínseco de la opción real, el cual puede ser cualquiera de los casos examinados en la sección IV. Es importante destacar que (20) sólo cuenta con soluciones analíticas para ciertas funciones  $h(S_t)$ ,  $(S_t, t)$  y  $(S_t, t)$ . En general, se requiere métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de la ecuación diferencial parcial (20).

## VI. VALUACIÓN DE OPCIONES REALES CON EL MODELO BINOMIAL

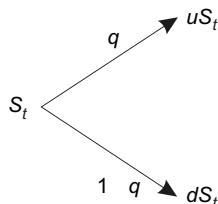
Los árboles binomiales son muy útiles en la valuación de opciones reales. La mayoría de las opciones reales son de tipo americano, siendo la opción de árboles binomiales muy conveniente para su valuación. El método binomial es muy popular porque en cada periodo tanto el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente, como los correspondientes valores de la opción real pueden

calcularse, lo que permite tener alguna idea de las decisiones que se deben tomar en el futuro. Asimismo, los árboles binomiales permiten la inclusión de costos de transacción (impuestos y comisiones) de manera más sencilla que con el supuesto de log normalidad del subyacente. En el modelo binomial los posibles valores del valor presente de los flujos de efectivo esperados son calculados de modo recursivo “hacia delante” comenzando con el valor presente de los flujos de efectivo esperados de la primera etapa. Los posibles valores de la opción real son calculados de modo recursivo “hacia atrás” comenzando con los posibles valores de la opción en la última etapa.

### *1. El modelo binomial de un periodo y valuación de opciones reales*

Sea  $S_t$  el valor presente de los flujos de efectivo esperados en  $t$ . Supóngase que  $S_t$  puede tomar dos posibles valores  $uS_t$  y  $dS_t$  ( $0 < d < 1$ ) ( $u$ ) con probabilidades, neutrales al riesgo,  $q$  y  $(1 - q)$ , respectivamente. Se supone que las cantidades  $u$  y  $d$  no se modifican al transcurrir el tiempo. Con base en los parámetros anteriores la figura 1 muestra la posible dinámica de  $S_t$ .

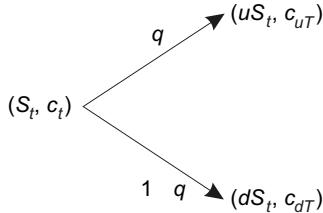
FIGURA 1. *Expansión del árbol binomial de una etapa para  $S_t$*



Las cantidades  $u$  y  $d$  se pueden relacionar con un parámetro de volatilidad  $\sigma$  y la longitud del periodo de que se trata,  $T - t$ , de la siguiente forma

$$u = e^{\sqrt{T-t}\sigma} \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{u}$$

Asimismo, si  $c_t$  es el valor de la opción real en  $t$ , y los valores que ésta puede tomar en  $T$  cuando  $S_t$  aumenta o disminuye son  $c_{uT}$  y  $c_{dT}$ , respectivamente, la posible dinámica del par  $(S_t, c_t)$  se ilustra en la figura 2.

FIGURA 2. *Expansión del árbol binomial de una etapa para  $(S_t; c_t)$* 

En un mundo neutral al riesgo, se tiene que

$$c_t = e^{-r(T-t)}(-uS_t + c_{uT}) \quad (23)$$

y

$$c_t = e^{-r(T-t)}(-dS_t + c_{dT}) \quad (24)$$

entonces al igualar (23) con (24), se cumple que:

$$uS_t - c_{uT} = dS_t - c_{dT}$$

lo cual implica

$$\frac{c_{uT} - c_{dT}}{S_t(u - d)} \quad (25)$$

Si se sustituye (25) en (23), se infiere que

$$c_t = c_{uT} + \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} - c_{dT} - \frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} - e^{-r(T-t)} \quad (26)$$

Si ahora se denota

$$q = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \quad (27)$$

se obtiene que

$$1 - q = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} \quad (28)$$

En este caso, la ecuación (26) se transforma en

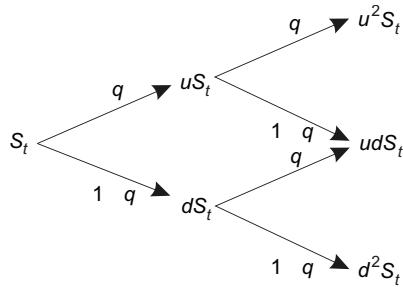
$$c_t = (qc_{uT} - (1 - q)c_{dT})e^{-r(T-t)} \quad (29)$$

Claramente,  $q \neq 0$ . Sin embargo, puede darse el caso de que  $q = 1$ , dependiendo de los valores de  $u, d, r$  y  $T - t$ , en cuyo caso  $1 - q = 0$ . Las cantidades  $q$  y  $1 - q$  reciben el nombre de probabilidades neutrales al riesgo y en ocasiones son conocidas como precios de estado.

## 2. El modelo binomial de dos períodos y valuación de opciones reales

El modelo binomial se puede extender a dos períodos, cada uno de longitud  $(T - t)/2$ . Se supone que se desea encontrar el valor de la opción real en  $t$ . En este caso las posibles trayectorias de  $S_t$  se ilustran en la figura 3.

FIGURA 3. Expansión del árbol binomial de dos períodos para  $S_t$



Después de repetir el procedimiento hecho en la anterior subsección para cada una de las ramas del segundo periodo, se obtienen dos ecuaciones similares a (29) dadas por

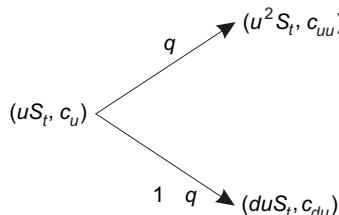
$$c_u = (qc_{uu} + (1 - q)c_{du})e^{-r(T-t)/2} \quad (30)$$

y

$$c_d = (qc_{du} + (1 - q)c_{dd})e^{-r(T-t)/2} \quad (31)$$

En la figura 4 se ilustra una de las ramas del segundo árbol. Esta rama es una copia de la primera, excepto que aparece una  $u$  de más en todos los nodos, ya sea como subíndice o como variable. En tal caso se aplica completamente la misma metodología que al primer árbol, justo como se hizo en las ecuaciones (30) y (31).

FIGURA 4. Rama superior del segundo periodo del árbol binomial



Al sustituir las ecuaciones (30) y (31) en el valor de la opción real en  $t$ , dado en (27), se obtiene la siguiente expresión

$$c_t = (q^2 c_{uu} - 2q(1-q)c_{du} + (1-q)^2 c_{dd})e^{-r(T-t)/2} \quad (32)$$

Por último, obsérvese que el modelo se puede extender a  $n$  períodos de manera que

$$c_t = e^{-r(T-t)/n} \sum_{k=1}^n q^k (1-q)^{n-k} c_{u^k d^{n-k}}$$

## VII. APLICACIÓN DEL MODELO BINOMIAL EN LA VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN REAL AMERICANA DE ABANDONO: EL CASO DE UNA EMPRESA MEXICANA QUE OFRECE SERVICIOS SATELITALES

Una empresa mexicana que ofrece servicios satelitales, en la actualidad, se encuentra operando con pérdidas y podría tomar la decisión de cierre parcial o total si el ambiente de negocios continúa deteriorándose. Dado que el objetivo es ilustrar una aplicación de opciones reales, sólo se presenta la información financiera necesaria. Considérese la opción de cerrar la empresa en cualquier momento durante los próximos  $T = 3$  años a cambio de un valor de recuperación fijo,  $V$ . En este caso, la opción de abandono será elegida si  $S_t < V$ . La inversión total, en  $t = 0$ , es  $I_0 = M$  (millones de dólares) y el valor de recuperación es

$$V = \frac{2}{3}M$$

Si  $S_0 = 90$  (millones de dólares),

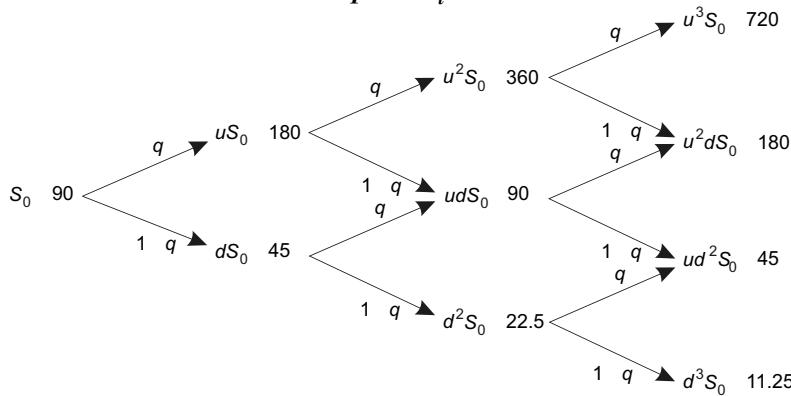
$$u = 2, d = u^{-1} = \frac{1}{2}, r = \ln \frac{2}{3} = 0.17$$

y  $T = 3$  años, entonces

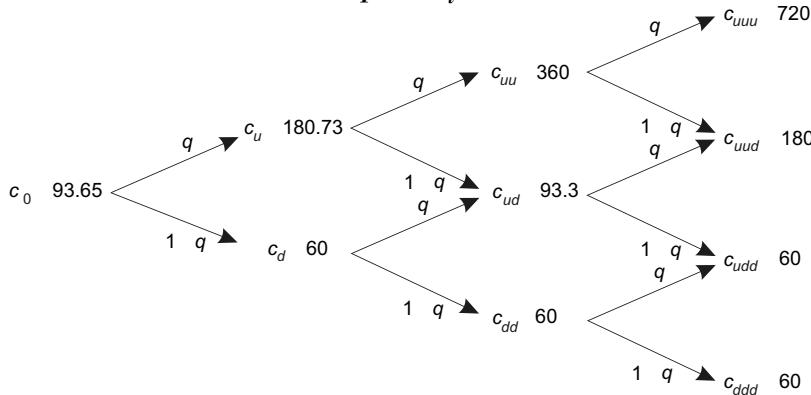
$$q = \frac{e^{rT/3} - d}{u - d} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 1 - q = \frac{1}{3}$$

Los posibles valores que  $S_t$  puede tomar en el futuro se muestran en la figura 5. Para calcular los posibles valores de la opción en el

**FIGURA 5. Expansión del árbol binomial de tres períodos para  $S_t$**



**FIGURA 6. Expansión del árbol binomial de tres períodos para  $S_t$**



futuro se toma como dato  $M = 90$  (millones de dólares), entonces  $V = 60$  y en la última etapa se tiene que

$$c_{u^k d^{3-k}} = \max(u^k d^{3-k} S_0, \frac{2}{3} M), \quad k = 1, 2, 3$$

Así,

$$\begin{aligned} c_{uuu} &= \max(720, 60) = 720 & c_{uud} &= \max(180, 60) = 180 \\ c_{udd} &= \max(45, 60) = 60 & c_{ddd} &= \max(11.5, 60) = 60 \end{aligned}$$

Para la segunda etapa se tiene que

$$c_{uu} = \max(e^{-rT/3}[qc_{uuu} - (1-q)c_{uud}], 60)$$

$$\max \frac{4}{9}c_{uuu} - \frac{2}{9}c_{uud}, 60 = 360$$

y

$$c_u = \max(e^{-rT/3}[qc_{uu} - (1-q)c_{ud}], 60)$$

$$\max \frac{4}{9}c_{uu} - \frac{2}{9}c_{ud}, 60 = 93.3$$

Los posibles valores de la opción de abandono en el futuro, calculados de modo recursivo “hacia atrás” comenzando con la última etapa, se muestran en la figura 6. Como consecuencia de los resultados obtenidos, el proyecto tiene que ser abandonado en los eventos

$$\{d\}, \{d, d\}, \{u, d, d\} \quad \text{y} \quad \{d, d, d\}$$

Obsérvese que siempre que el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente desciende dos veces consecutivas, la opción de abandono debe ejercerse. Asimismo, el valor presente modificado de la opción real de abandono está dado por la diferencia entre la opción real en  $t = 0$  y la inversión inicial. Es decir,

$$\overline{\text{VPN}} = c_0 - I_0 = 93.65 - 90 = 3.65$$

## VIII. VALUACIÓN CON OPCIONES REALES DE UN PROYECTO CARRETERO DE INVERSIÓN

En el esquema tradicional del VPN, la valuación de un proyecto carretero de inversión requiere estimar el aforo vehicular en diferentes fechas futuras y calcular los ingresos. Posteriormente, los costos de mantenimiento y operación se restan de dichos ingresos para generar los flujos de efectivo futuros. Por último, dichos flujos se descuentan a una tasa adecuada y se establece un monto de inversión inicial para la obra de que se trate.

A continuación se utiliza la metodología de opciones reales para determinar cuánto tiempo se debe permanecer en un proyecto carretero de inversión, de manera que el valor presente neto modificado del proyecto sea positivo,  $\overline{\text{VPN}} > 0$ , cuando la inversión inicial de la obra es  $I_0$ . En particular, se considera el proyecto de construcción

**CUADRO 3. Parámetros y valor de la opción real de permanencia**

$K_T$	$R(0, T) (\%)$	$T$	$c(0, T)$
27 864 458.93	4.1798	1	323 679.52
27 961 670.42	4.1796	2	983 983.66
28 059 223.41	4.1794	3	1 705 599.12
28 157 102.14	4.1792	4	2 442 240.80
28 255 313.32	4.1790	5	3 178 450.67
28 353 858.07	4.1789	6	3 906 814.08
28 452 737.47	4.1787	7	4 623 135.65
28 551 952.65	4.1785	8	5 324 805.56
28 651 504.71	4.1783	9	6 010 135.87
28 751 394.77	4.1781	10	6 678 028.95
28 851 623.95	4.1779	11	7 327 791.19
28 952 193.36	4.1777	12	7 959 018.23
29 053 104.15	4.1775	13	8 571 519.24
29 154 357.42	4.1773	14	9 165 264.24
29 255 954.33	4.1771	15	9 740 345.99
29 357 890.10	4.1770	16	10 296 951.65
29 460 183.59	4.1768	17	10 835.341.06
29 562 818.22	4.1766	18	11 355 829.93
29 665 801.06	4.1764	19	11 858 776.21
29 769 133.25	4.1762	20	12 344 571.56
29 872 815.94	4.1760	21	12 813 628.80
29 976 850.31	4.1758	22	13 266 379.19
30 081 237.50	4.1756	23	13 703 264.82
30 185 978.70	4.1754	24	14 124 734.53
30 291 075.06	4.1752	25	14 531 240.25
30 396 527.77	4.1751	26	14 923 233.98
30 502 337.99	4.1749	27	15 301 165.44
30 608 509.33	4.1747	28	15 665 480.03
30 715 035.75	4.1745	29	16 016 617.30
30 821 925.65	4.1743	30	16 355 009.66

del primer tramo de la autopista Toluca-Atlacomulco.<sup>2</sup> El valor presente de los flujos de efectivo anuales esperados (valor presente de los ingresos esperados anuales por peaje del aforo vehicular) es  $S_0 = 25 129 565.22$  dólares y la volatilidad del aforo pronosticado es de 8.7685%. En  $t = 0$ , el valor presente de los costos totales de mantenimiento y operación tienen una estimación de  $K_0 = 27 767 571$  dólares. En la primera columna del cuadro 3 se calcula el valor futuro de dichos costos con la estructura de plazos de la segunda columna, para los años subsecuentes. La cuarta columna muestra los valores de las

<sup>2</sup> Sólo se presenta la información financiera que requiere la evaluación del proyecto.

opciones reales de permanencia con la metodología de Black-Scholes (es decir,  $S_T$  se supone log normal) para vencimientos anuales consecutivos  $T = 1, 2, 3, \dots$ , con los parámetros  $S_0 = 25\,129\,565.22$  dólares,  $r = 0.087685$ ,  $K_T = K_0 e^{R(0,T)T}$  (precio de ejercicio) y  $R(0, T)$  (tasa libre de riesgo). Si se supone una inversión inicial de la obra de  $I_0 = 16\,300\,000$  dólares, se requiere permanecer en el proyecto, por lo menos, 30 años, ya que en  $T = 30$  es la primera vez que se obtiene que  $\overline{\text{VPN}} = c(0.30) - I_0 < 0$ .

## IX. OPCIONES REALES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

La volatilidad del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente no es constante ni observable. Por tanto, requiere un tratamiento adecuado en la valuación de opciones reales. La opción idónea es modelarla como un proceso estocástico.<sup>3</sup> Este nuevo ingrediente en la valuación de opciones reales introduce complicaciones técnicas.

### 1. Volatilidad como función conocida del tiempo

Si el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente sigue una distribución log normal y su volatilidad instantánea es una función conocida del tiempo,  $\sigma_t$ , entonces el proceso neutral al riesgo que conduce dicho precio está dado por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dU_t \quad (33)$$

en el que el parámetro de tendencia representa la tasa de interés libre de riesgo. El proceso  $(U_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento browniano definido de un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada  $(\mathcal{F}^U, F^U, (F_t^U)_{t \in [0, T]}, P^U)$ . En este caso, la fórmula de Black-Scholes se modifica sustituyendo la varianza promedio en  $[t, T]$ ,

$$\frac{-2}{t, T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T u^2 du \quad (34)$$

por el parámetro de varianza. Desafortunadamente, casi nunca la volatilidad es una función conocida del tiempo. Por esta razón, en el

<sup>3</sup> Entre la bibliografía de la volatilidad estocástica, que usualmente es recomendada, se encuentran los trabajos de Ball y Roma (1994), y Hull y White (1987).

transcurso de la presente sección se considerará a la volatilidad misma como un proceso estocástico.

## 2. Un modelo de volatilidad estocástica para valuar opciones reales

A continuación, con un conjunto de supuestos, se extiende el modelo de Hull y White (1987) para establecer una fórmula del precio de una opción real europea de compra cuando la varianza del activo subyacente sigue un movimiento geométrico browniano. Supóngase, además de (33), que

$$d\bar{W}_t = \sigma^2 dt + \sigma dW_t \quad (35)$$

en la que el proceso  $(\bar{W}_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento browniano definido de un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada  $(\mathcal{F}^{\bar{W}}, \mathcal{F}^{\bar{W}}, P^w, F^{\bar{W}}, (F_t^{\bar{W}})_{t \in [0, T]})$ . Se supone además que

$$\text{Cov}(d\bar{W}_t, dU_t) = 0$$

es decir, la volatilidad no está correlacionada con el precio del activo. La consideración de un valor medio de largo plazo para la volatilidad de manera que el proceso (35) presente reversión a dicho valor y el supuesto  $\text{Cov}(d\bar{W}_t, dU_t) = 0$  complican en exceso los cálculos. Por esta razón nos mantenemos con los supuestos iniciales. Defíñase ahora la volatilidad estocástica promedio

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T u^2 du$$

en la que  $\bar{\sigma}^2$  es solución de la ecuación diferencial estocástica (35). Se verá, a continuación, que el precio de una opción real europea de compra es el precio de Black-Scholes integrado en la distribución de probabilidad de la varianza estocástica promedio a lo largo de la vida de la opción. Es decir, el precio de una opción real europea de compra,  $c = c(S_t, \bar{\sigma}^2, t)$ , en un mundo neutral al riesgo, satisface

$$c(S_t, \bar{\sigma}^2, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{S_T|S_t, \bar{\sigma}^2} [\max(S_T - K, 0) | F_t] \quad (36)$$

$$= c_{BS}(S_t, t; \bar{\sigma}^2) h(\bar{\sigma}^2 | \bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2$$

en la que  $c_{BS}$  es el precio de Black-Scholes con varianza  $\bar{\sigma}^2$ ,  $h$  represen-

ta la función de densidad de  $\bar{\epsilon}_{t,T}^2$ , condicional en  $\bar{\epsilon}_t^2$ , y  $F_t$ :  $F_t^U = F_t^W$ . En efecto, obsérvese primero que, con algún abuso en la notación,

$$f(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_t^2) = \int_0^\infty g(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_{t,T}^2) h(\bar{\epsilon}_{t,T}^2 | \bar{\epsilon}_t^2) d\bar{\epsilon}_{t,T}^2$$

en la que  $f$  y  $g$  son funciones de densidad condicionales. Por tanto,

$$\begin{aligned} c(S_t, \bar{\epsilon}_t^2, t) &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) f(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_t^2) dS_T \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_{t,T}^2) h(\bar{\epsilon}_{t,T}^2 | \bar{\epsilon}_t^2) d\bar{\epsilon}_{t,T}^2 \\ &= [e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_{t,T}^2) dS_T] h(\bar{\epsilon}_{t,T}^2 | \bar{\epsilon}_t^2) d\bar{\epsilon}_{t,T}^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, con el supuesto  $\text{Cov}(dW_t, dU_t) = 0$  se puede verificar que la distribución condicional de  $\ln(S_T/S_t)$ , dado  $\bar{\epsilon}_t^2$ , es normal con media

$$r - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{t,T}^2 (T-t)$$

y varianza  $\bar{\epsilon}_{t,T}^2 (T-t)$ . Por tanto, dicha distribución es congruente con el mundo normal de Black-Scholes. En consecuencia,

$$\begin{aligned} c_{BS}(S_t, t; \bar{\epsilon}_{t,T}^2) &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T | S_t, \bar{\epsilon}_{t,T}^2) dS_T \\ &= S_t (d_1) - Ke^{-r(T-t)} (d_2) \end{aligned}$$

en que

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - r - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{t,T}^2 (T-t)}{\bar{\epsilon}_{t,T} \sqrt{T-t}} \quad (37)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - r - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{t,T}^2 (T-t)}{-\bar{\epsilon}_{t,T} \sqrt{T-t}}$$

Así,

$$c(S_t, \bar{\epsilon}_t^2, t) = c_{BS}(S_t, t, \bar{\epsilon}_{t,T}^2) h(\bar{\epsilon}_{t,T}^2 | \bar{\epsilon}_t^2) d\bar{\epsilon}_{t,T}^2$$

### 3. Método de aproximación

En esta subsección se describe el método de aproximación que se utilizará para valuar una opción real europea de compra cuando la

varianza del precio del activo subyacente está dada por (35). Si se define la función

$$H(\bar{\sigma}_{t,T}^2) = c_{BS}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2)$$

y se calcula su expansión en series de Taylor alrededor de  $E[\bar{\sigma}_{t,T}^2]$  se tiene que

$$\begin{aligned} H(\bar{\sigma}_{t,T}^2) - H(\hat{\sigma}_{t,T}^2) &= \frac{H}{\bar{\sigma}_{t,T}^2} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^3 - \dots \end{aligned}$$

en que las derivadas parciales se evalúan en  $\hat{\sigma}_{t,T}^2$ . Si se multiplica la expresión anterior por  $h(\bar{\sigma}_{t,T}^2)$  y se integra respecto a  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$ , se obtiene

$$c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t) - H(\hat{\sigma}_{t,T}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \text{var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] - \dots$$

En las subsecciones siguientes se demostrará que si  $\delta = 0$  y  $\gamma$  es pequeña se tiene la siguiente aproximación:

$$c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t) - H(\hat{\sigma}_{t,T}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \text{var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] \quad (38)$$

#### 4. Momentos de la volatilidad estocástica promedio

En esta subsección se determinan los momentos de la volatilidad estocástica promedio. Asimismo, se calcula la varianza y sesgo de dicha variable aleatoria. Los detalles técnicos se presentan en el apéndice II. Se puede demostrar que si  $\delta = 0$ , entonces

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^2] = \frac{e^{(T-t)}}{(T-t)} \frac{1}{\bar{\sigma}_t^2} \quad (39)$$

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^4] = \frac{4}{(T-t)^2} \frac{2e^{(T-t)}}{\bar{\sigma}_t^2} - \frac{2}{(T-t)} \frac{1}{\bar{\sigma}_t^2} - \frac{e^{(T-t)}}{\bar{\sigma}_t^4} \quad (40)$$

en la que  $\bar{\sigma}_t^2 = \sigma_0^2 e^{2\delta t}$  y

$$E[-\frac{6}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \frac{e^{3^2(T-t)} - 9e^{2^2(T-t)} + 6^{-2(T-t)} - 8}{3^6} \quad (41)$$

cuando 0. En el caso particular de 0, se infiere que

$$E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \frac{2(e^{2^2(T-t)} - 2^2(T-t) - 1)}{4} \quad (42)$$

$$E[-\frac{6}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \frac{e^{3^2(T-t)} - 9e^{2^2(T-t)} + 6^{-2(T-t)} - 8}{3^6} \quad (43)$$

$$Var[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = E[-\frac{4}{t,T} | \frac{2}{t}] - (E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}])^2$$

$$\frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \frac{2(e^{2^2(T-t)} - 2^2(T-t) - 1)}{4} - 1 \quad (44)$$

y

$$Sesgo[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = E[(E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] - E[-\frac{2}{t,T}])^3 | \frac{2}{t}]$$

$$\frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \frac{e^{3^2(T-t)} - (9 - 18^{-2}(T-t))e^{2^2(T-t)} + 6^{-2(T-t)}}{3^6} -$$

$$\frac{8 - 18^{-4}(T-t)^2 - 6^{-6}(T-t)^3 + 18^{-2}(T-t)}{3^{-6}(T-t)^3} \quad (45)$$

Si, por simplificación, se escribe

$$2^2(T-t)$$

se infiere que

$$Var[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \frac{2(e^{-2} - 1)}{2} - 1 \quad (46)$$

y

$$Sesgo[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \frac{e^3 - (9 - 18)e^{-2} + 8^{-24} - 18^{-2} + 6^{-3}}{3^3} \quad (47)$$

### 5. Aproximación del precio de una opción real con volatilidad estocástica mediante series de Taylor

Se puede demostrar (véase apéndice III) que la aproximación del precio de una opción real con volatilidad estocástica mediante series de Taylor satisface

$$\begin{aligned}
 c(S_t, t; \frac{\sigma^2}{t}) - c_{BS}(S_t, \frac{\sigma^2}{t}, t) &= \frac{1}{2} S_t (d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4} (d_1 d_2 - 1) \\
 &\quad \frac{2(e^{-\frac{r}{2}} - 1)}{2} - 1 - \frac{4}{t} \\
 &\quad \frac{1}{6} S_t (d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 - d_2^2)] \\
 &\quad \frac{e^{-\frac{3}{2}} (9 - 18)e^{-\frac{8}{3}} - 24 + 18^{-\frac{2}{3}} - 6^{-\frac{3}{2}}}{3^{-\frac{3}{2}}} - \frac{6}{t} \dots
 \end{aligned} \tag{48}$$

Para valores pequeños de  $\frac{\sigma^2}{t}$  la serie converge rápidamente. Por tanto, para  $\frac{\sigma^2}{t} = 0$  (o bien muy pequeña) y suficientemente pequeña, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 c(S_t, t; \frac{\sigma^2}{t}) - c_{BS}(S_t, \frac{\sigma^2}{t}, t) &= \frac{1}{8} (S_t (d_1) \sqrt{T-t} (d_1 d_2 - 1)) A(\frac{\sigma^2}{t}) \\
 &\quad \frac{1}{48} (S_t (d_1) \sqrt{T-t} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 - d_2^2)]) B(\frac{\sigma^2}{t})
 \end{aligned} \tag{49}$$

en la que

$$\begin{aligned}
 A(\frac{\sigma^2}{t}) &= \frac{2(e^{-\frac{r}{2}} - 1)}{2} - 1 \\
 B(\frac{\sigma^2}{t}) &= \frac{e^{-\frac{3}{2}} (9 - 18)e^{-\frac{8}{3}} - 24 + 18^{-\frac{2}{3}} - 6^{-\frac{3}{2}}}{3^{-\frac{3}{2}}} \\
 &\quad - \frac{2(T-t)}{(T-t)^2}
 \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - r - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{t} (T-t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{t} (T-t)}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\frac{\sigma^2}{t} (T-t)}$$

Si los flujos de efectivo esperados tienen volatilidad estocástica, entonces la fórmula (49) puede sustituirse en (7) para obtener el valor de una opción real de expansión con volatilidad estocástica. Si (49) se sustituye en (16) se obtiene el valor de una opción de permanencia con volatilidad estocástica. Por último, la sustitución de (49) en (17) produce el valor de una opción real de abandono con volatilidad estocástica.

### *6. Limitaciones y ventajas del modelo de volatilidad estocástica para valuar opciones reales*

Claramente, el hecho de que la dinámica de la volatilidad no presenta reversión a la media es una desventaja. La inclusión de este supuesto en el modelo conduce a complicaciones técnicas, las cuales por razones de simplificación no se abordan en esta investigación. Por otra parte, en la fórmula de valuación obtenida en (48), considerar que  $\sigma = 0$  es un supuesto simplificador. La fórmula para  $\sigma = 0$ , que seguramente es más complicada, puede ser obtenida con un poco más de esfuerzo algebraico.

## X. VALUACIÓN MEDIANTE OPCIONES REALES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA DE UN PROYECTO CARRETERO DE INVERSIÓN

En esta sección se utiliza la metodología de opciones reales con volatilidad estocástica para determinar cuánto tiempo se debe permanecer en un proyecto carretero de inversión, de manera que el valor presente neto modificado del proyecto sea positivo,  $\overline{VPN} > 0$ , cuando se tiene una inversión inicial. De nuevo, se considera el proyecto de construcción del primer tramo de la autopista Toluca-Atlacomulco. El valor presente de los flujos de efectivo anuales esperados es  $S_0 = 25\,129\,565.22$  dólares y en lugar de especificar la volatilidad del aforo se emplea  $\sigma = 0.02$  en el modelo de volatilidad estocástica. En  $t = 0$  el valor presente de los costos totales de mantenimiento y operación tiene una estimación de  $K_0 = 27\,767\,571$  dólares. En la primera columna del cuadro 4 se calcula el valor futuro de dichos costos con la estructura de plazos de la segunda columna para los años subsiguientes. La cuarta columna muestra los valores de las opciones rea-

**CUADRO 4. *Valor de la opción real con volatilidad estocástica de permanencia***

$K_T$	$R(0, T)$ (%)	$T$	$c(0, T)$
27 864 458.93	4.1798	1	345 725.98
27 961 670.40	4.1796	2	1 131 983.98
28 059 223.41	4.1794	3	1 856 376.12
28 157 102.14	4.1792	4	2 945 378.39
28 255 313.32	4.1790	5	3 463 386.03
28 353 858.07	4.1789	6	4 226 343.36
28 452 737.47	4.1787	7	5 745 387.22
28 551 952.65	4.1785	8	5 956 348.37
28 651 504.71	4.1783	9	7 965 365.98
28 751 394.77	4.1781	10	8 459 965.43
28 851 623.95	4.1779	11	8 967 286.32
28 952 193.36	4.1777	12	9 145 386.93
29 053 104.15	4.1775	13	9 476 129.59
29 154 357.42	4.1773	14	10 234 156.86
29 255 954.33	4.1771	15	10 738 137.01
29 357 890.10	4.1770	16	11 148 945.22
29 460 183.59	4.1768	17	11 876 486.90
29 562 818.22	4.1766	18	12 346 129.54
29 665 801.06	4.1764	19	12 797 339.45
29 769 133.25	4.1762	20	13 192 835.46
29 872 815.94	4.1760	21	13 476 965.95
29 976 850.31	4.1758	22	13 903 578.75
30 081 237.50	4.1756	23	14 102 645.56
30 185 978.70	4.1754	24	14 902 684.49
30 291 075.06	4.1752	25	15 331 754.89
30 396 527.77	4.1751	26	15 634 854.27
30 502 337.99	4.1749	27	16 485 276.67

les con volatilidad estocástica para vencimientos anuales consecutivos  $T = 1, 2, 3, \dots$ , con los parámetros  $S_0 = 25 129 565.22$  dólares,  $K_T = K_0 e^{R(0, T)T}$  (precio de ejercicio) y  $R(0, T)$  (tasa libre de riesgo). Si se supone una inversión inicial de la obra de  $I_0 = 16 300 000$  dólares, se requiere permanecer en el proyecto 27 años, pues en  $T = 27$  es la primera vez que se obtiene que  $\overline{\text{VPN}} = c(0, 30) - I_0 = 0$ .

#### COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Esta investigación de opciones reales de ninguna manera pretende ser completa. Ejemplos de opciones reales también pueden surgir en fusiones y compras de empresas. Asimismo, cuando se efectúan

acuerdos entre empresas ambas partes poseen una opción de abandono del acuerdo o de extensión del mismo. Las grandes corporaciones (transnacionales) poseen las opciones para autorizar franquicias o patentes. Las empresas que emiten deuda con baja calidad crediticia tienen la opción de incumplir, parcial o totalmente, con sus obligaciones de pago. Como se observa, para valuar de manera adecuada opciones reales es necesario tener un buen dominio del tema de opciones financieras, ya sean simples (“vanilla”) o exóticas, así como de finanzas corporativas.

En este trabajo de investigación se examinaron varias fórmulas analíticas para valuar la opcionalidad o flexibilidad de un proyecto subyacente. Para ello, por un lado, se recurrió al método de árboles binomiales, mientras que por otro se supuso que el valor presente de los flujos de efectivo esperados sigue una distribución lognormal. Se realizaron dos aplicaciones al caso mexicano de las opciones reales. En particular, se analizaron los casos de una empresa mexicana de servicios satelitales de comunicación y del proyecto de construcción del primer tramo de la autopista Toluca-Atlacomulco; en este último se estudiaron los casos de una opción real de volatilidad constante y volatilidad estocástica.

## APÉNDICE I

### *Fórmulas aproximadas para calcular la distribución normal estándar y la distribución acumulada normal bivariada estándar para valuar opciones reales compuestas*

En este apéndice se presenta fórmulas aproximadas para calcular la distribución normal estándar y la distribución acumulada normal bivariada tradicional, que son útiles en la valuación de opciones reales compuestas. Conviene recordar que la función de distribución acumulada normal tradicional bivariada se define como

$$F_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{u^2 + 2uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right) du dv$$

la cual puede ser aproximada mediante el siguiente procedimiento con una precisión de hasta seis decimales. Para la distribución acumulada de una variable normal estándar se utiliza la fórmula de aproximación

$$(x) \quad \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\{-x^2/2\} [a_1 k - a_2 k - a_3 k - a_4 k - a_5 k], & x \neq 0 \\ 1 - (-x), & x = 0 \end{cases}$$

junto con

$$\begin{array}{lll} k = 1/(1 - 0.2316419x) & a_1 = 0.319381530 & a_2 = 0.356563782 \\ a_3 = 1.781477937 & a_4 = 1.821255978 & a_5 = 1.330274429 \end{array}$$

Para el caso de la distribución acumulada normal bivariada tradicional una fórmula de aproximación de Drezner (1978) se obtiene como sigue. Se define primero

$$H(y, z; \lambda) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{i=1 j=1} v_i v_j G(w_i, w_j)$$

en la que

$$G(w_i, w_j) = \exp\{y_1(2w_i - y_1) - z_1(2w_j - z_1) - 2(w_i - y_1)(w_j - z_1)\}$$

junto con

$$y_1 = y/\sqrt{2(1 - \lambda^2)}, \quad z_1 = z/\sqrt{2(1 - \lambda^2)}$$

$$\begin{array}{llll} v_1 = 0.24840615 & w_1 = 0.10024215 & v_2 = 0.39233107 & w_2 = 0.48281397 \\ v_3 = 0.21141819 & w_3 = 1.0609498 & v_4 = 0.03324666 & w_4 = 1.7797294 \\ v_5 = 0.00082485334 & w_6 = 2.6697604 & & \end{array}$$

Si el producto de  $y, z$  y  $\lambda$  no es positivo, entonces se aproxima  $H_2(y, z; \lambda)$  utilizando las siguientes reglas:

- i) si  $y = 0, z = 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $H_2(y, z; \lambda) = H(y, z; \lambda)$ ,
- ii) si  $y = 0, z \neq 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $H_2(y, z; \lambda) = \overline{H}(y, -z; \lambda)$ ,
- iii) si  $y \neq 0, z = 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $H_2(y, z; \lambda) = \overline{H}(-y, z; \lambda)$ ,
- iv) si  $y = 0, z \neq 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $H_2(y, z; \lambda) = \overline{H}(y, -z; \lambda)$ .

En los casos en que el producto de  $y, z$  y  $\lambda$  es positivo, entonces se utiliza

$$H_2(y, z; \lambda) = \overline{H}_2(y, 0; \lambda_1) \overline{H}_2(z, 0; \lambda_2) L$$

en que  $\overline{H}_2(y, 0; \lambda_1)$  y  $\overline{H}_2(z, 0; \lambda_2)$  se calculan con las reglas establecidas cuando el producto de  $y, z$  y  $\lambda$  no es positivo, y

$$\lambda_1 = \frac{(y - z)\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{y^2 - 2yz - z^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{z - y)\operatorname{sgn}(z)}{\sqrt{y^2 - 2yz - z^2}}, \quad L = \frac{1 - \operatorname{sgn}(y)\operatorname{sgn}(z)}{4}$$

## APÉNDICE II

*Cálculo de los momentos de la volatilidad estocástica promedio*

En este apéndice se calcula la media, varianza y sesgo de la volatilidad estocástica promedio. Para ello se calcula los tres primeros momentos de  $\tilde{\sigma}_{t,T}^2$ . En primer lugar se puede demostrar que si  $\mu = 0$ , entonces

$$E[\tilde{\sigma}_{t,T}^2 | \tilde{\sigma}_t^2] = \frac{e^{(T-t)}}{(T-t)} - 1$$

En efecto, en virtud de (35), se infiere que

$$\frac{2}{u} \tilde{\sigma}_u^2 e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2} = \sqrt{u-t}, \quad u > t$$

en que  $\tilde{\sigma}_u \sim N(0, 1)$ . Por tanto,

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{2}{u} \tilde{\sigma}_u^2 du = \frac{1}{T-t} \int_t^T e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2} \sqrt{u-t} du$$

Si se define el siguiente cambio de variable  $y = u - t$ , se cumple que

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_0^T \frac{2}{t+y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} E[\tilde{\sigma}_{t,T}^2 | \tilde{\sigma}_t^2] &= \frac{1}{T-t} \int_0^T \frac{2}{t+y} e^{-\frac{1}{2}y^2} E[e^{-\sqrt{y}}] dy \\ &= \frac{1}{T-t} \int_0^T \frac{2}{t+y} e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned} \tag{50}$$

$$= \frac{2}{t} \frac{e^{-(T-t)}}{(T-t)}$$

Asimismo, se puede demostrar que

$$E[\tilde{\sigma}_{t,T}^4 | \tilde{\sigma}_t^2] = \frac{4}{(T-t)^2} \frac{2e^{(T-t)}}{(T-t)^2} - \frac{2}{T-t} \frac{1}{e^{(T-t)}}$$

en que  $\tilde{\sigma}_y^2 = 2$  y  $E[\tilde{\sigma}_y^4] = 2$ . En efecto, claramente,

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^4 = \frac{4}{(T-t)^2} \int_0^T \frac{2}{t+y} e^{-\frac{1}{2}y^2} \tilde{\sigma}_y^4 dy$$

$$\frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \int_0^T \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(y-W_y)^2} e^{-\frac{1}{2}(x-W_x)^2} dy dx \quad (51)$$

Obsérvese ahora que si  $x = y$ , entonces

$$\begin{aligned} Cov(W_y, W_x) &= Cov(W_y - W_x, W_x - W_x) \\ &= Cov(W_y - W_x, W_x - W_0) = Cov(W_x, W_x) \\ &= 0 = \min[x, y] \end{aligned} \quad (52)$$

ya que los incrementos  $W_y - W_x$  y  $W_x - W_0$  son estocásticamente independientes.

De acuerdo con la gráfica 1 la región de integración de la integral (51),  $D = [0, T-t] \times [0, T-t]$ , se puede subdividir como  $D = D_1 \cup D_2$ , en la que  $D_1 = \{0 \leq x \leq T-t, 0 \leq y \leq x\}$  y  $D_2 = \{0 \leq x \leq T-t, x \leq y \leq T-t\}$ . Así, en virtud de (52) se deduce que

$$\begin{aligned} E[-\frac{4}{t,T}] &= \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \int_0^T \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2} E[e^{-(W_y - W_x)}] dy dx \\ &= \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \int_0^T \int_y^T e^{-(y-x)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \int_y^T e^{-(y-x)} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (53) \\ &= \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \frac{2e^{-(T-t)}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{-(T-t)}}{t} \end{aligned}$$

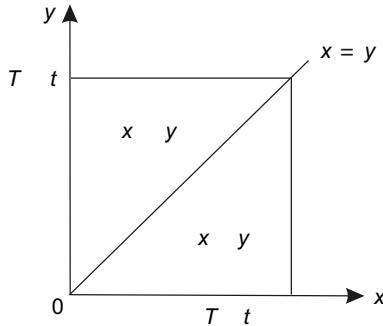
Por último, se calcula el tercer momento de la volatilidad promedio estocástica,

$$\begin{aligned} E[-\frac{6}{t,T}] &= \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \int_0^T \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(y-x-z)^2} E[e^{-(W_y - W_x - W_z)}] dy dx dz \\ &= \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \int_0^T \int_0^t \int_0^t e^{-(x-y-z)} e^{-\frac{1}{2}(y-x-z)^2} e^{2(\min[y,x] - \min[x,z] - \min[y,z])} dy dx dz \quad (54) \end{aligned}$$

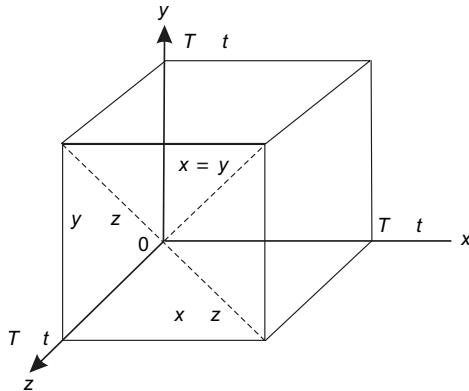
De acuerdo con la gráfica 2, las regiones de integración en que se divide el cubo  $[0, T-t] \times [0, T-t] \times [0, T-t]$  son

$$\begin{aligned} G_1 &: 0 \leq y \leq x \leq z \leq T-t, \\ G_2 &: 0 \leq z \leq x \leq y \leq T-t, \\ G_3 &: 0 \leq x \leq y \leq z \leq T-t, \\ G_4 &: 0 \leq z \leq y \leq x \leq T-t, \\ G_5 &: 0 \leq x \leq z \leq y \leq T-t, \\ G_6 &: 0 \leq y \leq z \leq x \leq T-t \end{aligned}$$

GRÁFICA 1. Región de integración en las variables x y y



GRÁFICA 2. Región de integración en las variables x, y y z



Por tanto, en el caso particular  $0, la triple integral de (54) puede calcularse como$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^t \int_0^T e^{-2(\min[y,x] - \min[x,z] - \min[y,z])} dx dy dz \\
 & \int_0^T \int_0^z \int_0^y e^{2(2y-x)} dx dy dz \quad \int_0^T \int_0^y \int_0^z e^{2(2z-x)} dx dz dy \\
 (55) \quad & \int_0^T \int_0^x \int_0^z e^{2(2x-y)} dy dx dz \quad \int_0^T \int_0^x \int_0^z e^{2(2z-y)} dy dz dx \\
 & \int_0^T \int_0^y \int_0^x e^{2(2x-z)} dz dx dy \quad \int_0^T \int_0^x \int_0^y e^{2(2y-z)} dz dy dx
 \end{aligned}$$

en las que cada integral se calcula en su correspondiente región  $G_i, i = 1, 2, \dots, 6$ . La primera integral de (55) satisface

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^t \int_0^z e^{-(2y-x)} dx dy dz = \int_0^T \int_0^t \int_0^z e^{2y} e^{-x} dx dy dz \\
 & \quad = \int_0^T \int_0^t \int_0^z e^{2y} e^{-x} \frac{e^{2z} - e^{-2y}}{2} dy dz \\
 & \quad = \int_0^T \int_0^t \int_0^z e^{2y} e^{-x} \frac{e^{2z} - e^{-2y}}{2} dy dz \\
 & \quad = \frac{e^{3(T-t)} - 9e^{2(T-t)} + 6e^{2(T-t)} - 8}{18^6} \quad (56)
 \end{aligned}$$

Es posible verificar que cada una de las integrales proporciona exactamente el mismo resultado de (56). En consecuencia, cuando  $\lambda = 0$ ,

$$E[-\frac{2}{t,T}] = \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \frac{e^{3(T-t)} - 9e^{2(T-t)} + 6e^{2(T-t)} - 8}{3^6} \quad (57)$$

Obsérvese ahora que si  $\lambda = 0$ , se deduce de (50), (53) y (57), utilizando la regla de L'Hopital, que

$$E[-\frac{2}{t,T}] = \frac{2}{t} \quad (58)$$

ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(T-t)} - 1}{(T-t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T-t)e^{(T-t)}}{T-t} = 1$$

De igual manera, de (53), se tiene que

$$\begin{aligned}
 E[-\frac{4}{t,T}] &= \frac{\frac{4}{t}}{(T-t)^2} \frac{2(e^{2(T-t)} - 2(T-t) - 1)}{4} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{(\frac{T-t}{t})^2} \frac{(\frac{2}{t})(T-t)e^{(T-t)} - e^{(T-t)}}{(\frac{T-t}{t})^2} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{(\frac{T-t}{t})^2} \frac{(\frac{2}{t})(T-t)e^{(T-t)} - e^{(T-t)}}{(\frac{T-t}{t})^2}
 \end{aligned} \quad (59)$$

puesto que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} = \frac{1}{2^2} = \frac{e^{(T-t)}}{2}$$

$$2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{(2-t)^2} \cdot \frac{\left(\frac{e^3}{t}(T-t)e^{-\frac{(T-t)}{2}} - e^{-\frac{(T-t)}{2}}\right)}{\left(\frac{e^3}{t}(T-t)\right)^2}$$

$$2 \cdot \frac{\frac{2}{4}(T-t) - 1}{4}$$

y, como ya se sabe,

$$E[-\frac{6}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{\frac{6}{t}}{(T-t)^3} \cdot \frac{e^{3-\frac{2}{t}(T-t)} - 9e^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 6^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 8}{3^{-6}} \quad (60)$$

Así, cuando  $t=0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} Var[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] &= E[-\frac{4}{t,T} | \frac{2}{t}] - (E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}])^2 \\ &= \frac{4}{t} \cdot \frac{2(e^{-\frac{2}{t}(T-t)} - \frac{2}{t}(T-t) - 1)}{4(T-t)^2} - 1 \end{aligned} \quad (61)$$

y

$$\begin{aligned} Sesgo[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] &= E(-\frac{2}{t,T} - E[-\frac{2}{t,T}])^3 | \frac{2}{t} \\ &= E[-\frac{6}{t,T} | \frac{2}{t}] - 3E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}]E[-\frac{4}{t,T} | \frac{2}{t}] + 2(E[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}])^3 \\ &= \frac{6}{t} \cdot \frac{e^{3-\frac{2}{t}(T-t)} - (9 - 18^{-\frac{2}{t}(T-t)})e^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 6^{-\frac{2}{t}(T-t)}}{3^{-6}(T-t)^3} \\ &\quad - \frac{8 - 18^{-\frac{4}{t}(T-t)^2} - 6^{-\frac{6}{t}(T-t)^3} - 18^{-\frac{2}{t}(T-t)}}{3^{-6}(T-t)^3} \end{aligned} \quad (62)$$

Si, por simplificación, se escribe

$$^2(T-t)$$

se infiere, de (61) y (62), que

$$Var[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{4}{t} \cdot \frac{2(e^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 1)}{2} - 1 \quad (63)$$

y

$$Sesgo[-\frac{2}{t,T} | \frac{2}{t}] = \frac{6}{t} \cdot \frac{e^3 - (9 - 18^{-\frac{2}{t}(T-t)})e^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 8^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 24^{-\frac{3}{t}(T-t)} - 18^{-\frac{2}{t}(T-t)} - 6^{-\frac{3}{t}(T-t)}}{3^{-3}}$$

### APÉNDICE III

#### *Cálculo del precio de una opción real con volatilidad estocástica mediante series de Taylor*

En este apéndice se calcula la aproximación, mediante una serie de Taylor, del valor de una opción real europea de compra, con varianza promedio estocástica. Obsérvese primero que

$$c(S_t, \frac{2}{t}, t) = c_{BS}(S_t, t; \frac{-2}{t,T}) h(\frac{-2}{t,T} | \frac{2}{t}) d(\frac{-2}{t,T})$$

La expansión en serie de Taylor de  $c_{BS}(S_t, t; \frac{-2}{t,T})$  alrededor de  $\hat{\frac{2}{t,T}} = E[\frac{-2}{t,T}]$  está dada por

$$\begin{aligned} c_{BS}(S_t, t; \frac{-2}{t,T}) &= c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}}) + \frac{\partial^2 c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}})}{\partial^2 t} (\frac{-2}{t,T} - \hat{\frac{2}{t,T}})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}})}{\partial^3 t} (\frac{-2}{t,T} - \hat{\frac{2}{t,T}})^3 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}})}{\partial^4 t} (\frac{-2}{t,T} - \hat{\frac{2}{t,T}})^4 \dots \end{aligned} \quad (64)$$

La notación en las derivadas parciales anteriores significa que primero se calculan las derivadas y después se evalúan en el punto  $\hat{\frac{2}{t,T}}$ . Si se multiplica (64) por la densidad  $h(\frac{-2}{t,T} | \frac{2}{t})$  y después se integra el resultado, en virtud de (36) se obtiene que

$$\begin{aligned} c(S_t, \frac{2}{t}, t) &= c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}})}{\partial^2 t} Var[\frac{-2}{t,T} | \frac{2}{t}] \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c_{BS}(S_t, t; \hat{\frac{2}{t,T}})}{\partial^3 t} Sesgo[\frac{-2}{t,T} | \frac{2}{t}] \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Si  $\frac{-2}{t,T} = 0$ , entonces  $\hat{\frac{2}{t,T}} = \frac{2}{t}$ . Además, si en las derivadas de (65) se sustituye  $\frac{-2}{t,T}$  por  $\frac{2}{t}$  el resultado que se obtiene cuando se calculan las derivadas con respecto a  $\frac{-2}{t,T}$  y después se evalúan en el punto  $\frac{2}{t,T}$ , es el mismo. Si ahora se utilizan (63) y (64), se tiene que

$$\begin{aligned} c(S_t, \frac{2}{t}, t) &= c_{BS}(S_t, t; \frac{2}{t}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{BS}(S_t, t; \frac{2}{t})}{\partial^2 t} \frac{2(e^{\frac{2}{t}} - 1)}{2} - 1 - \frac{4}{t} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c_{BS}(S_t, t; \frac{2}{t})}{\partial^3 t} \frac{e^3 (9 - 18)e^{-\frac{8}{t}} - 24 - 18^{-2} - 6^{-3}}{3} - \frac{6}{t} \dots \end{aligned} \quad (66)$$

A continuación se calculan las derivadas parciales en (66). Obsérvese, primero, que si

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - r - \frac{1}{2} \frac{2}{t} (T-t)}{\sqrt{\frac{2}{t} (T-t)}}$$

entonces

$$\frac{d_1}{\frac{2}{t}} = \frac{1}{2} \frac{2}{t} \sqrt{\frac{2}{t} (T-t)} - d_1 = \frac{d_2}{2} \quad (67)$$

Dado que  $d_2 = d_1 - \sqrt{\frac{2}{t} (T-t)}$ , se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{\frac{2}{t}} &= \frac{d_1}{\frac{2}{t}} - \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t} (T-t)}} \\ &= \frac{d_2}{\frac{2}{t}} - \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t} (T-t)}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{t}} \sqrt{\frac{2}{t} (T-t)} - d_2 \\ &= \frac{d_1}{\frac{2}{t}} \end{aligned} \quad (68)$$

Adviértase que las siguientes identidades son válidas:

$$d_1 \frac{d_1}{\frac{2}{t}} = d_2 \frac{d_2}{\frac{2}{t}} = \frac{d_1 d_2}{2 \frac{2}{t}} \quad (69)$$

$$d_1 \frac{d_2}{\frac{2}{t}} = d_2 \frac{d_1}{\frac{2}{t}} = \frac{d_1^2 - d_2^2}{2 \frac{2}{t}} \quad (70)$$

y

$$(d_1 - d_2) \frac{d_1}{\frac{2}{t}} = \frac{d_1}{\frac{2}{t}} - \frac{d_2}{\frac{2}{t}} = \frac{(d_1 - d_2)^2}{2 \frac{2}{t}} \quad (71)$$

Ahora bien, de acuerdo con la definición de  $c_{BS}$  se infiere que

$$\frac{c_{BS}}{\frac{2}{t}} = S_t - (d_1) \frac{d_1}{\frac{2}{t}} = e^{-r(T-t)} - (d_2) \frac{d_2}{\frac{2}{t}}$$

y

$$0 = S_t - (d_1) - e^{-r(T-t)} - (d_2)$$

De esta manera,

$$\frac{c_{BS}}{\left(\frac{2}{t}\right)^2} S_t(d_1) - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)} - \frac{d_2}{\left(\frac{2}{t}\right)}$$

$$S_t(d_1) \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t}(T-t)}}$$

Así,

$$\frac{^2c_{BS}}{\left(\frac{2}{t}\right)^2} S_t(d_1) - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)} \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t}(T-t)}} - S_t(d_1) \frac{(T-t)^2}{4\left[\frac{2}{t}(T-t)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (72)$$

Al utilizar el hecho de que  $(d_1) = (d_1)d_1$  y debido a (69), se deduce que

$$\frac{^2c_{BS}}{\left(\frac{2}{t}\right)^2} S_t(d_1)d_1 - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)} \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t}(T-t)}} - S_t(d_1) \frac{(T-t)^2}{4\left[\frac{2}{t}(T-t)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$S_t(d_1) \frac{d_1 d_2}{2\left(\frac{2}{t}\right)} - \frac{T-t}{2\sqrt{\frac{2}{t}(T-t)}} - S_t(d_1) \frac{(T-t)^2}{4\left[\frac{2}{t}(T-t)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (73)$$

$$S_t(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\left(\frac{3}{t}\right)} (d_1 d_2 - 1)$$

Obsérvese también que por (71) y (72)

$$\frac{^3c_{BS}}{\left(\frac{2}{t}\right)^3} S_t(d_1) - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)} \frac{\sqrt{T-t}}{4\left(\frac{3}{t}\right)} (d_1 d_2 - 1) - S_t(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\left(\frac{3}{t}\right)} d_1 - \frac{d_2}{\left(\frac{2}{t}\right)} - d_2 - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)}$$

$$3S_t(d_1)(d_1 d_2 - 1) - \frac{\sqrt{T-t}}{8\left(\frac{5}{t}\right)}$$

$$S_t(d_1)d_1 - \frac{d_1}{\left(\frac{2}{t}\right)} \frac{\sqrt{T-t}}{4\left(\frac{3}{t}\right)} (d_1 d_2 - 1) - S_t(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\left(\frac{3}{t}\right)} \frac{d_1^2 - d_2^2}{2\left(\frac{2}{t}\right)} \quad (74)$$

$$3S_t(d_1)(d_1 d_2 - 1) - \frac{\sqrt{T-t}}{8\left(\frac{5}{t}\right)}$$

$$S_t(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\left(\frac{5}{t}\right)} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 - d_2^2)]$$

Se concluye a partir de (66), (73) y (74) que

$$\begin{aligned}
 c(S_t, t; \frac{2}{t}) - c_{BS}(S_t, \frac{2}{t}, t) &= \frac{1}{2} S_t (d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4} (d_1 d_2 - 1) \\
 &\quad \frac{2(e^{-\frac{2}{t}} - 1)}{2} - 1 - \frac{4}{t} \\
 &\quad \frac{1}{6} S_t (d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 - d_2^2)] \\
 &\quad \frac{e^3 - (9 - 18/t)e^{-\frac{8}{t}} - 24 - 18^2 - 6^3}{3^3} - \frac{6}{t} \dots
 \end{aligned} \tag{75}$$

Para valores pequeños de  $t$  la serie converge rápidamente. Por tanto, para  $t = 0$  (o bien  $t$  muy pequeña) y suficientemente pequeña, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 c(S_t, t; \frac{2}{t}) - c_{BS}(S_t, \frac{2}{t}, t) &= \frac{1}{8} S_t (d_1) \sqrt{T-t} (d_1 d_2 - 1) A(\frac{2}{t}) \\
 &\quad \frac{1}{48} S_t (d_1) \sqrt{T-t} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 - d_2^2)] B(\frac{2}{t})
 \end{aligned} \tag{76}$$

en la que

$$\begin{aligned}
 A(\frac{2}{t}) &= \frac{2(e^{-\frac{2}{t}} - 1)}{2} - 1 \\
 B(\frac{2}{t}) &= \frac{e^3 - (9 - 18/t)e^{-\frac{8}{t}} - 24 - 18^2 - 6^3}{3^3} \\
 &\quad - \frac{2(T-t)}{t}
 \end{aligned}$$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amram, M., y N. Kulatilaka (1999), *Real Options Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Boston, Harvard Business School Press.
- Ball, C. A., y A. Roma (1994), “Stochastic Volatility Option Pricing”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29, núm. 4, pp. 589-607.
- Bengtsson, J. (2001), “Manufacturing Flexibility and Real Options: A Review”, *International Journal of Production Economics*, vol. 74, núm. 1-3, páginas 213-224.
- Bernardo, A. E., y B. Chowdhry (2002), “Resources, Real Options, and Corporate Strategy”, *Journal of Financial Economics*, vol. 63, núm. 2, pp. 211-234.

- Boer, F. P. (2002), *The Real Options, Solution, Finding Total Value in a High-Risk World*, John Wiley & Sons, Inc.
- Botteron, P., M. Chesney y R. Gibson-Asner (2003), “Analyzing Firms’ Strategic Investment Decisions in a Real Options’ Framework”, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, vol. 13, núm. 5, páginas 451-479.
- Britten-Jones, M., y A. Neuberger (2000), “Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility”, *The Journal of Finance*, vol. 55, núm. 2, pp. 839-866.
- Copeland, T., y V. Antikarov (2003), *Real Options. A Practitioner’s Guide*, Thomson Texere.
- Courchane, M., D. Nickerson y R. Sullivan (2002), “Investment in Internet Banking as a Real Option: Theory and Tests”, *Journal of Multinational Financial Management*, vol. 12, núm. 4-5, pp. 347-363.
- Cuthbertson, K., y D. Nitzsche (2001), *Financial Engineering, Derivatives and Risk Management*, John Wiley & Sons, Inc.
- Drezner, Z. (1978), “Computations of the Bivariate Normal Integral”, *Mathematics of Computation*, vol. 32, pp. 277-279.
- Dixit, A. K., y R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton, Princeton University Press.
- Henderson, V., y D. G. Hobson (2002), “Real Options with Constant Relative Risk Aversion”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27, núm. 2, pp. 329-355.
- Hull, J., y A. White (1987), “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities”, *The Journal of Finance*, vol. 42, núm. 2, pp. 281-300.
- Insley, M. (2002), “A Real Options Approach to the Valuation of a Forestry Investment”, *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 44, núm. 3, pp. 471-492.
- Mahieu, R. J., y P. C. Schotman (1998), “An Empirical Application of Stochastic Volatility Models”, *Journal of Applied Econometrics*, vol. 13, núm. 4, páginas 333-359.
- Mun, J. (2002), *Real Options Analysis, Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*, John Wiley & Sons, Inc.
- Schwartz, E. S., y L. Trigeorgis (2001), *Real Options and Investment under Uncertainty*, Massachusetts-Londres, The MIT Press Cambridge.
- Shackleton, M., B. Andrianos, E. A. Tsekrekos y R. Wojakowski (2004), “Strategic Entry and Market Leadership in a Two-Player Real Options Game”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 28, núm. 1, pp. 179-201.
- Slade, M. D. (2001), “Valuing Managerial Flexibility: An Application of Real-Option Theory to Mining Investments”, *Journal of Environmental Economics and Management*, vol. 41, núm. 2, pp. 193-233.
- Trigeorgis, L. (1998), *Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, Cambridge, The MIT Press.