



El Trimestre Económico

ISSN: 0041-3011

trimestre@fondodeculturaeconomica.com

Fondo de Cultura Económica

México

García Pérez, Carmelo; Callealta Barroso, Francisco Javier; Núñez Velázquez, José Javier

La evolución de la distribución personal de la renta en España (1973-2000). Con parámetros del modelo de Dagum

El Trimestre Económico, vol. LXXIII (4), núm. 292, octubre-diciembre, 2006, pp. 783-807

Fondo de Cultura Económica

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31340948003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org



Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

LA EVOLUCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN PERSONAL DE LA RENTA EN ESPAÑA (1973-2000)

Con parámetros del modelo de Dagum*

*Carmelo García Pérez, Francisco Javier Callealta
Barroso y José Javier Núñez Velázquez***

RESUMEN

En este artículo se estudia los cambios experimentados por la distribución personal de la renta en España a lo largo del periodo 1973-2000 utilizando las estimaciones de los parámetros del modelo de Dagum para el conjunto del Estado y sus diferentes comunidades autónomas. Con este fin se realiza, en primer lugar, una aproximación teórica a los parámetros del modelo de Dagum que permite obtener una nueva caracterización de cada uno de ellos, en relación con su interpretación económica. Los datos utilizados para el ajuste de las distribuciones de rentas personales proceden de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares para el periodo y del Panel de Hogares de la Unión Europea.

ABSTRACT

In this paper, changes in the Spanish personal income distribution along the period 1973-2000 are studied using the parameter estimations of the Dagum model for the state and its autonomous communities. With this aim, in the first place, a theoretical approach to the parameters of Dagum model is developed to obtain a new characterization of each one of them, in relation to its economic interpretation. Available data from Spanish Household Budgets Basic Surveys and European Union Household Panel are used in order to adjust personal income distributions.

* *Palabras clave:* distribución personal de la renta, desigualdad, modelo de Dagum, España.
Clasificación JEL: C1, D31, I3. Artículo recibido el 7 de marzo y aceptado el 24 de noviembre de 2005. Los datos procedentes del Panel de Hogares de la Unión Europea (Phogue) se utilizan con permiso del contrato ECHP/15/00, que mantiene Eurostat con la Universidad de Alcalá. Los autores agradecen las constructivas y valiosas sugerencias de dos dictaminadores anónimos de EL TRIMESTRE ECONÓMICO y de Camilo Dagum, recientemente fallecido, que enriqueció con sus comentarios la primera versión de este trabajo y a cuya memoria los autores quieren dedicar este artículo. Los errores del trabajo son, por supuesto, responsabilidad exclusiva de los autores.

** Departamento de Estadística, Estructura Económica y Organización Económica Internacional (OEI), Universidad de Alcalá (correo electrónico: carmelo.garcia@uah.es).

INTRODUCCIÓN

Con los trabajos de Pareto (1897) y Gini (1909), dedicados al problema de la distribución personal del ingreso y la medida de la desigualdad, se inicia una línea de estudio que, en palabras de Dagum (1977b), p. 838, se caracteriza por un marcado carácter “esencialmente estadístico y probabilístico, sin haberse plenamente integrado en el contexto de la teoría económica”. En este enfoque eminentemente cuantitativo se enmarca el estudio de la modelización paramétrica¹ de la distribución personal de la renta que utilizamos como instrumento en este estudio de la distribución personal de la renta en España.

Entre los autores que contribuyen a la consolidación de esta línea de investigación iniciada por Pareto, a fines del siglo XIX, destacan Gibrat (1931), Amoroso (1925), Thurow (1970), Salem y Mount (1974), Singh y Maddala (1976) y Dagum (1977a) o más recientemente McDonald y Xu (1995) y Bordley *et al* (1996), entre otros muchos. En los diferentes trabajos sus autores proponen y contrastan la validez de distintas distribuciones probabilísticas como modelos de la distribución personal de la renta.

La utilización de distribuciones teóricas permite simplificar cualquier estudio del análisis de la distribución, facilitando la comparación entre distribuciones a lo largo del tiempo y el espacio, mediante el análisis de la evolución de los parámetros estimados que se convierten, de esta manera, en instrumentos de análisis del efecto de las medidas de política económica en la distribución personal de la renta. Sin embargo, esta capacidad sintética de los modelos para analizar los cambios experimentados en el proceso distributivo no se ha utilizado con frecuencia, y los trabajos de esta línea de investigación, en ocasiones, no llegan más allá de la propuesta y estimación de distribuciones probabilísticas, a falta de que las estimaciones de los parámetros puedan ser utilizadas en el análisis económico de los mecanismos causales de la distribución personal de la renta.

En el presente artículo se utiliza la modelización paramétrica de la distribución personal de la renta como medio para explicar los cambios producidos en la distribución personal de la renta en España.

¹ Se ha desarrollado también un enfoque no paramétrico para la modelización de la distribución personal (Cowell, 1995; Pudney, 1993, entre otros).

ña en un largo periodo (1973-2000), en el que se han producido numerosas transformaciones de la economía y la sociedad española: la asimilación de un sistema democrático, sucesivas reformas fiscales, la integración plena a la Unión Europea, diferentes períodos de crisis y recuperación económica, etc. Con este fin se profundiza en el significado económico de los diferentes parámetros de las distribuciones probabilísticas propuestas para la distribución personal de la renta por medio del modelo de Dagum que, además de sus excelentes propiedades teóricas, presenta el mejor grado de ajuste a las distribuciones empíricas de la renta personal en España en el periodo 1973-2000 (Pena *et al.*, 1996; Prieto, 1998, y García, 2003). El análisis del significado económico de los parámetros que configuran dicha distribución permite clarificar las características fundamentales del proceso de cambio experimentado por la distribución personal de la renta en España en un periodo de tanto interés económico y social.

La estructura del artículo es la siguiente. En primer lugar, se analizan y obtienen las características de cada uno de los parámetros del modelo de Dagum que permiten deducir su interpretación económica. A continuación, se presenta los datos utilizados para el caso español así como las técnicas de estimación empleadas. La siguiente sección contiene el análisis de los resultados obtenidos que permiten deducir las características de los cambios de la distribución personal de la renta en España en el periodo 1973-2000. Finalmente, se presenta las principales conclusiones del trabajo.

I. LA INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS PARÁMETROS Y EL MODELO DE DAGUM

La modelización probabilística de la distribución personal de la renta, desarrollada sobre la base de los trabajos de Pareto, recurre a la formalización de la renta personal como una variable aleatoria continua X y tiene como objetivo la propuesta *a priori* y la posterior estimación de un modelo para la distribución personal de la renta, definido por una familia de funciones de distribución, $\{F(x; \theta); \theta \in \Theta\}$, perfectamente especificadas salvo un vector θ de parámetros desconocidos pertenecientes a un espacio paramétrico

Una de las características que se exigen con mayor consenso a los modelos probabilísticos de la distribución personal de la renta es la interpretación económica de los parámetros (Dagum, 1977a, 1996). Esta propiedad da auténtico sentido al uso de la modelización paramétrica como instrumento de análisis e interpretación en el estudio de la distribución personal de la renta. En efecto, las variaciones experimentadas por los parámetros cuando se ajusta el mismo modelo a diferentes regiones, o a una misma población en diversos momentos, revela interesantes características de los cambios experimentados por la distribución. Los distintos parámetros de los modelos compondrán así un conjunto completo de indicadores que permite sintetizar la naturaleza económica de los cambios de la distribución.

Los modelos paramétricos de Dagum, que verifican otras muchas propiedades deseables (Callealta *et al*, 1996; Dagum, 2004), ofrecen la mencionada posibilidad de interpretar las consecuencias económicas de las variaciones de sus parámetros. Esta tarea, iniciada por Dagum, se complementa en este trabajo en el que se obtendrán nuevas caracterizaciones que permitan interpretar los distintos parámetros del modelo como indicadores de escala, igualdad, polarización o progresividad de los cambios de la distribución.

El modelo de Dagum es uno de los más frecuentemente utilizados para modelizar la distribución personal de la renta en un amplio conjunto de países (Pena *et al*, 1996; Prieto, 1998; Gertel *et al*, 2001; García, 2003). En el caso más general, denominado de tipo III, las funciones de densidad y de distribución vienen definidas por:²

$$f(x) = \frac{1}{x_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)^{-1}; \quad 0 < x_0 < x; \quad (1)$$

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$F(x) = \left(\frac{x}{x_0} \right) \left(1 - \frac{x}{x_0} \right); \quad 0 < x_0 < x; \quad (2)$$

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

El valor de la renta mínima x_0 viene determinado por los valores de los parámetros α , β , y γ . Si $\alpha = 0$, entonces $x_0 = 0$, obteniéndose las funciones correspondientes al conocido como modelo triparamétrico.

² Véase un amplio desarrollo y justificación de este modelo en Dagum (1977a).

trico de tipo I; la renta mínima también se anula cuando $x_0 = 1$, en cuyo caso obtendremos el modelo de tipo II, y cuando $x_0 > 0$, x_0 toma valores estrictamente positivos se obtiene el modelo tetraparamétrico de tipo III.

Las expresiones de la renta media (\bar{x}) y del percentil de orden $p(x_p)$ para estos modelos son las siguientes:

$$E(X) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{x_0}}, & 0 < x_0 < 1, \\ \frac{1}{x_0}; 1 - \frac{1}{x_0}, & 0 < x_0 < 1 \end{cases}$$

en las que

$$x_p = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{x_0}} x^{\frac{1}{x_0}} (1-x)^{\frac{1}{x_0}-1} dx, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x_0}; 1 - \frac{1}{x_0} x^{\frac{1}{x_0}} (1-x)^{\frac{1}{x_0}-1} dx, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Y el percentil de orden p puede obtenerse como:

$$x_p = \frac{1}{p} \frac{1}{1-\frac{1}{x_0}} = 1 - p, \text{ para } 0 < x_0 < 1; \quad p = 0, \text{ para } x_0 = 0$$

Estas expresiones serán utilizadas en este trabajo para caracterizar sus variaciones (derivadas y elasticidades) frente a variaciones de los distintos parámetros y, a partir de ellas, analizar cuáles serían los grupos de perceptores de rentas que se beneficiarían o saldrían perjudicados cuando un parámetro experimenta una variación.

1. Análisis del parámetro

En una primera aproximación, se demuestra³ que tres de los parámetros del modelo de Dagum no están relacionados con la unidad de medida de la variable. En efecto, el parámetro x_0 , cuyo valor de-

³ Si la variable renta X se distribuye de acuerdo con una distribución de Dagum de parámetros α , β , y γ , que notamos de manera abreviada como $X \sim D(\alpha, \beta, \gamma)$, y se define una va-

termina el tipo de modelo, y los parámetros γ y α , que Dagum (1977a) califica, simplemente, como parámetros de igualdad. El parámetro α es, por lo contrario, un parámetro de escala. Por tanto, un cambio en la unidad de medida de la renta producirá la modificación del parámetro de escala α , lo que mantiene inalterado el resto de los parámetros. Esta modificación, exclusivamente de la escala de medida, revela una neutralidad del parámetro en la desigualdad,⁴ que resulta evidente cuando se obtiene la elasticidad de los percentiles, (x_p) , y la renta media, (\bar{x}) , respecto a α . Ambas expresiones, que se presenta a continuación, resultan positivas y constantes para cada orden del percentil e iguales a $(1/\gamma)$.

$$(x_p) = \frac{x_p}{x_p} \frac{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p}} \frac{1}{x_p} = \frac{1}{\gamma} \quad (3)$$

$$(\bar{x}) = \frac{(1 - \gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \quad (4)$$

Así pues, un incremento de 1% del parámetro de escala produce un incremento porcentual constante de $(1/\gamma)\%$ de la renta media y de todos los percentiles, independientemente de su orden; de esta manera se mantienen inalteradas las medidas adimensionales de desigualdad. Por tanto, el parámetro α será un parámetro de escala, cuyo incremento genera un aumento global de todas y cada una de las rentas y, en consecuencia, de la renta media.

2. Análisis del parámetro

Como se ha señalado, el tipo de modelo de Dagum está determinado por el rango de valores que toma el parámetro α . Así, si α toma el

variable $Z = X/c$, $c > 0$, procedente de aplicar un cambio de escala en la variable renta, entonces la función de distribución de Z será: $P[Z \leq z] = P[(X/c) \leq z] = F(zc) = (1 - \gamma)(1 - (zc)^{\gamma})$ $(1 - \gamma)(1 - (zc)^{\gamma})z^{-\gamma} \sim D(\gamma, \gamma, \gamma)$. Por tanto, la nueva variable Z se distribuirá según un modelo de Dagum con los mismos parámetros que X , con excepción del parámetro de escala α que sufre la siguiente transformación: $\alpha' = \alpha/c$.

⁴ Se entiende la desigualdad medida por medio de un índice adimensional.

valor 0 se obtiene el modelo de Dagum de tipo I, caracterizado por la exclusión de rentas negativas, nulas o rentas mínimas. En el modelo de tipo II el parámetro α representa una proporción de rentas nulas. Dagum (1977a) se refiere a un porcentaje de individuos sin fuentes de ingresos o con deudas en su patrimonio, desempleados y sin seguridad social. Por lo contrario, cuando α toma valores negativos (modelo de Dagum de tipo III) se tendrá el caso de distribuciones de renta que tienen una renta mínima x_0 , que puede considerarse como una renta de subsistencia o la mínima resultante de eliminar las unidades con renta no positiva. En los modelos de tipo II y III Dagum (1977a) demuestra que α es un parámetro de desigualdad, respecto al índice de Gini.

Se ha obtenido la expresión de la derivada del percentil de orden p respecto al parámetro α , que, en el caso de los modelos de Dagum de tipo II y III, tras una serie de manipulaciones algebraicas, resulta ser:

$$(x_p) \frac{\frac{x_p}{x_p} - \frac{1}{p}}{(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{p}}} \quad (5)$$

Esta expresión es negativa y creciente, lo que indica que un aumento del parámetro producirá reducciones generalizadas de rentas y esta reducción afectará en mayor medida los percentiles inferiores, provocando así un notorio efecto regresivo que redunda en el aumento de la desigualdad. Para el caso de la distribución de Dagum de tipo II, obviamente, dicha expresión presenta una asíntota vertical en $p = 1$, lo que mantiene inalterado el comportamiento comentado del parámetro para los percentiles de orden superior a 1.

La actuación del parámetro en los percentiles provoca, por consiguiente, un efecto reductor de la renta media, como lo indican las siguientes expresiones, obtenidas tras simplificar el resultado de las derivadas parciales:

$$\text{Si } 0 < p < 1, \quad \frac{1}{p} - 1 < \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} - 1 > 0, \quad 1 - \frac{1}{p} < 1 \quad (6)$$

$$\text{Si } 0, \quad - \quad \frac{1}{x_0^r}; 1 \quad \frac{1}{p} - 0, \quad 1 \quad (7)$$

Así pues, a modo de conclusión, el parámetro r será un parámetro de desigualdad, reductor general de rentas, de efectos regresivos y reductor de la renta media.

3. Análisis del parámetro

Dagum (1977a) ya obtenía una primera interpretación de r como parámetro de igualdad tras comprobar que el signo de la derivada parcial del índice de Gini respecto al parámetro era negativo. Para profundizar y completar esta interpretación, se ha obtenido la expresión de la elasticidad del percentil de orden p respecto al parámetro

$$(x_p) \quad \frac{x_p}{x_p} \quad \frac{\ln \frac{1}{p} - 1 - \ln}{\ln \frac{1}{p}} \quad (8)$$

Esta expresión se anula para

$$p_0 = \frac{1}{(1-1)}, \quad 0$$

probabilidad que se corresponde siempre con el valor de la función de distribución para una renta unitaria. Por otra parte, si evaluamos la expresión de la elasticidad en los dos intervalos que delimita p_0 , se cumple que:

$$(x_p) \quad 0 \quad \text{si } p < \frac{1}{(1-1)} \quad \text{y} \quad (x_p) \quad 0 \quad \text{si } p > \frac{1}{(1-1)} \quad (9)$$

Por tanto, un incremento del parámetro causa un aumento de las rentas más bajas correspondientes a los percentiles de orden inferior a p_0 y, además, una disminución de las rentas más altas correspondientes a los percentiles de orden superior a p_0 . Se comprueba también que la elasticidad de los percentiles respecto a este paráme-

tro es decreciente,⁵ por lo que las reducciones de los percentiles superiores serán mayores según aumente su orden. En el otro extremo de la distribución, los aumentos de los percentiles inferiores serán mayores a medida que su orden sea menor.

Como consecuencia de una redistribución que penaliza excesivamente a los percentiles superiores y no logra equilibrarse con la ganancia de rentas de los percentiles inferiores, se produce una disminución de la renta media como se demuestra al obtener y evaluar el signo de la derivada parcial de la renta media respecto al parámetro, que resulta ser:

$$-\frac{(1 - \gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 - \frac{1}{\gamma}}{1 - \frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{1 - \gamma} - 1 - 0 \quad (10)$$

en el que $\gamma(x)$ es la función digamma,⁶ definida para un número real positivo x como:

$$\gamma(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Concluimos pues que el parámetro γ representa a un instrumento con el cual puede reducirse la desigualdad de la distribución, como ya era conocido de acuerdo con el signo de la derivada del índice de Gini obtenida por Dagum (1977a); sin embargo, el análisis aquí realizado permite conocer los procesos que producen este aumento de la igualdad: una progresiva y creciente penalización de los percentiles, según aumenta su orden, y un aumento de los percentiles infe-

$$5 \frac{\gamma(x_p)}{x_p} - 0.$$

⁶ Aplicando las propiedades de la función digamma (Abramowitz y Stegun, 1970), respecto al crecimiento y acotación, y teniendo en cuenta las restricciones habituales en los parámetros $(\gamma > 1, \alpha > 0, \beta > 1)$, se deduce que:

$$1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{1 - \gamma} - 1 - 0$$

y como

$$(1 - \gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 - \frac{1}{\gamma} - 1 - 0,$$

se tiene que la derivada de la renta media respecto al parámetro γ será negativa. La demostración es similar para las distribuciones de Dagum de tipo I y III.

riores creciente, según disminuye su orden. Esta actuación en los dos extremos de la escala de rentas reducirá, por tanto, la polarización de la distribución. La excesiva penalización de las rentas más altas ocasiona, a la vez, una disminución de la renta media. En consecuencia, queda caracterizado como un parámetro de igualdad, generador de aumentos en rentas bajas y disminuciones en rentas altas, de efectos progresivos y reductor de la renta media.

4. Análisis del parámetro

El parámetro resulta ser también un parámetro de igualdad de acuerdo con el signo de la derivada parcial del índice de Gini (Dagum, 1977a), pero su actuación es muy distinta de la del parámetro α . Así, la elasticidad de los percentiles es siempre positiva y decreciente para todos los órdenes, por lo que un aumento del parámetro produce aumentos generalizados de todas las rentas de la distribución. Así:

$$(x_p) \frac{\frac{x_p}{x_p} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}} = \frac{\frac{1}{p} \ln \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}} = 0 \quad (11)$$

Además, puede comprobarse⁷ que esta función de elasticidad es decreciente, lo que indica que los aumentos relativos de rentas serán cada vez menores según aumenta el orden del percentil. Con un aumento generalizado de rentas, más intenso en los percentiles inferiores que en los superiores, se consigue una mayor igualdad en la distribución a la vez que se produce un aumento de la renta media ya que, para la distribución de tipo II, la derivada parcial de la renta media resulta ser:

$$- (1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} - 1 - (1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \quad (12)$$

⁷ $\frac{(x_p)}{7} = 0$.

expresión que es positiva, de acuerdo con las propiedades de crecimiento y acotación de la función digamma y dadas las restricciones habituales en los valores de los parámetros $(-1, 0, 1)$.⁸

Así pues, será un parámetro que refleja aumentos globales de todas las rentas y, por tanto, identifica también aumentos de la renta media. Por otra parte, la repercusión de sus variaciones produce efectos progresivos en la distribución y, en consecuencia, puede considerarse un parámetro de igualdad.

Una vez analizada la naturaleza de cada parámetro podemos concluir que una política basada en la consecución de mayor renta e igualdad deberá producir un aumento del parámetro de escala α , como indicativo del monto de renta que se distribuye; un aumento del parámetro β , para ocasionar una mayor renta media y, a la vez, una mayor igualdad por medio de la mejora más significativa de los tramos bajos de la distribución; un valor de γ que produzca la necesaria redistribución sin que se penalice en exceso la renta media, y una reducción del parámetro δ , para que la renta mínima y las más bajas crezcan y el efecto de esta mejora reduzca la desigualdad.

II. DATOS UTILIZADOS Y ESTIMACIÓN DE LOS MODELOS

La adecuación de las distribuciones de Dagum como modelos de la distribución personal de la renta en el caso español ha sido argumentada en numerosos trabajos (Pena *et al.*, 1996; Prieto, 1998; García, 2003), teniendo en cuenta sus propiedades teóricas y el adecuado ajuste a las distribuciones empíricas, tanto del agregado nacional como de distintas desagregaciones (regiones, tipos de hábitat, categorías socioprofesionales, etc.). En esta sección, como aplicación de la interpretación teórica presentada en el apartado anterior, se analiza los resultados obtenidos al estimar los parámetros de las distribuciones de Dagum de las rentas del conjunto nacional y de las distintas comunidades autónomas españolas, en los cortes temporales correspondientes a las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares (EBPF), con datos de rentas corregidas del efecto de la ocultación. Para el conjunto del Estado se completa el análisis con la obtención

⁸ Las demostraciones referentes a las distribuciones de Dagum de tipo I y II pueden verse en García (2003) y conducen al mismo signo positivo de la derivada obtenida.

de estimaciones adicionales para 2001 a partir de los datos de rentas procedentes de la más reciente ola disponible del Panel de Hogares de la Unión Europea (Phogue), que corresponden a 2000.

La elección de las EBPF como fuentes estadísticas nos permite disponer de datos homogéneos de renta a lo largo de un periodo suficientemente amplio (1973-1991), en el que la economía española experimenta un proceso de transformaciones significativas que deben reflejarse en las estimaciones de los parámetros. Ninguna otra fuente permite obtener datos de renta con una muestra de mayor tamaño y una desagregación por comunidades autónomas. El concepto de renta utilizado ha sido el de renta disponible anual *per capita*.⁹

Para el último corte temporal considerado se ha optado por trabajar con rentas anuales *per capita* de 2000 procedentes de la pasada ola disponible del Phogue, fuente que retoma el objetivo del estudio detallado de los ingresos que acometían las desaparecidas EBPF, aunque el tamaño muestral de la nueva encuesta no permite realizar una estimación particularizada a las distintas comunidades autónomas.¹⁰ La distinta naturaleza y procedencia de los datos utilizados en el periodo 1973-1991 y los referentes a 2000 deben introducir un elemento de cautela en las posteriores interpretaciones respecto a la evolución de los parámetros en el periodo global; sin embargo,

⁹ Un problema que presenta esta fuente de datos estadísticos es la influencia del fenómeno de la ocultación, que ha intentado paliarse con un doble proceso de corrección de las rentas elaborado por Pena *et al* (1996). En el caso del Phogue, Eurostat advierte que los datos ya han sido tratados para compensar este efecto. La corrección de las rentas de las EBPF, realizada en Pena *et al* (1996), se basa en un doble procedimiento. En primer lugar, se corrigieron los distintos tipos de ingresos de las diferentes categorías de hogares a partir de las discrepancias observadas entre ingresos, gastos y ahorro (*op. cit.*, pp. 190-196). En segundo lugar, se corrigieron las rentas individuales de manera que fueran congruentes con los agregados de la renta total, repartida en España y en cada comunidad autónoma, deducidos de la contabilidad nacional. Las deficiencias de los datos se detectaron observando la evolución de los tipos de ingresos declarados en los diferentes intervalos intercuantílicos. A medida que las rentas eran más altas, los ingresos de capital declarados iban siendo cada vez menores de lo que lógicamente cabría esperar, lo que inducía a pensar que el mayor grado de ocultación ocurría en las clases con mayores rentas de capital, que suelen ser las de mayor renta disponible. Asimismo, se observaba que, a lo largo del tiempo, iba perdiendo peso la proporción de ingresos de la partida de cuenta propia respecto a la de cuenta ajena, y también se presentaban anomalías en la distribución de los ingresos de la propiedad. Todas estas comprobaciones hacían pensar en un alto grado de ocultación en las rentas de la propiedad y en las obtenidas por el desempeño de profesiones liberales y autónomas. Finalmente, se adoptó una tasa progresiva de acuerdo con las características observadas en el reparto de los tipos de ingresos en cada intervalo intercuantílico (*op. cit.*, pp. 434-440).

¹⁰ Para solventar este problema, los datos de ingresos de la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares son otra opción disponible, pero la ausencia de calidad y detalle en la recabación de datos de ingresos de esta encuesta, elaborada fundamentalmente para el estudio de los gastos, nos llevó a descartarla como opción.

la proximidad de los conceptos de renta considerados y los aceptables tamaños muestrales en el nivel nacional permiten apreciar la tendencia del comportamiento agregado de la distribución personal de la renta en España.

La estimación de los distintos parámetros del modelo se realizó considerando una división del recorrido de la variable renta en 100 intervalos interpercentílicos, tomando como representantes de cada intervalo las correspondientes marcas de clase. El método de máxima verosimilitud,¹¹ elegido para este trabajo, resuelve el problema consistente en obtener los parámetros del espacio paramétrico tales que hagan máxima la expresión:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_{i=1}^k (PY_i)^{n_i}, \quad \text{sujeta a: } \sum_{i=1}^k PY_i = 1 \quad (13)$$

en la que k es el número de intervalos (100), PY_i son las probabilidades teóricas de cada uno de los 100 intervalos, que dependerán de $y n_i$ representa el número de individuos observados en el intervalo i -ésimo.

Para obtener la solución óptima para el vector paramétrico se partió de una solución inicial procedente de la estimación de los parámetros de la distribución de Dagum de tipo I para, posteriormente, mediante un método iterativo de optimización con restricciones no lineales, obtener la solución óptima del vector paramétrico perteneciente a la distribución de Dagum, ya sea de tipo I, II o III, con mejor ajuste a la distribución empírica. Finalmente, se realizaron contrastes para valorar si era significativa la reducción de la suma de los cuadrados de los residuos que se producía al introducir el parámetro γ y pasar a los modelos tetraparamétricos II y III frente al modelo de tipo I. Para realizar estos contrastes se usó la metodología sugerida por Dagum (1983) y Cramer (1978), basada en la utilización de estadísticos¹² F construidos para contrastar la hipótesis nula de que la reducción de sumas de cuadrados de errores no es significativa. Los valores de los estadísticos F obtenidos revelaron que no eran signifi-

¹¹ Las razones que han llevado a la utilización de este método recaen en las buenas propiedades de los estimadores, que son suficientemente conocidas (Kendall y Stewart, 1977).

¹² $F = (SCR_A - SCR_B)/(SCR_B/k - h - 1)$ $F(1, k - h - 1)$, en la que k es el número de intervalos, h el número de parámetros del modelo con mayor número de parámetros, SCR_A la suma de cuadrados de los residuos del modelo de menos parámetros y SCR_B la del de más parámetros.

cativas, en ninguno de los casos (totales nacionales y comunidades autónomas), las reducciones experimentadas en las sumas de cuadrados de los errores por utilizar los modelos de tipo II y III. Por tanto, tal como sugería, en principio, la proximidad a cero de los valores estimados para el parámetro α , se optó por utilizar las estimaciones de los parámetros del modelo de Dagum de tipo I.

III. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Al considerar, en primer lugar, las estimaciones de los parámetros del modelo de Dagum de tipo I obtenidas para el total nacional, que se presentan en el cuadro 1, la trayectoria seguida por la distribución personal de la renta en España muestra las siguientes tendencias consolidadas a lo largo del periodo en estudio: un aumento del parámetro de escala α , como consecuencia del aumento de la renta real disponible, una disminución del parámetro de igualdad β y un aumento del parámetro de igualdad γ .

CUADRO 1. Estimaciones de los parámetros de la distribución Dagum de tipo I para España

(Rentas disponibles en pesetas constantes de 1986)

<i>Año</i>	<i>Número de intervalos (k)</i>	<i>Parámetro de escala (α)</i>	<i>Parámetro de igualdad (β)</i>	<i>Parámetro de desigualdad (γ)</i>	<i>Suma de cuadrados de errores (SCR)</i>
1973	100	0.087	1.236	2.520	4 610
1981	100	0.092	1.006	2.758	4 609
1991	100	0.187	0.953	2.980	4 612
2000	100	0.386	0.697	3.192	4 653

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos de las EBPF y del Phogue.

A la vista de los resultados obtenidos se observa que la evolución que sigue España en el periodo es la propia de una pauta de crecimiento acompañada de una reducción de la desigualdad que viene caracterizada, como señalaba Dagum (2004),¹³ por una disminución del parámetro β y un aumento simultáneo del parámetro γ .

¹³ Dagum (2004) señala que un aumento del parámetro γ y una disminución de β ocasiona una gran polarización en la distribución, y establece como características las distribuciones de los países en desarrollo que presentan estimaciones de γ que tienden a ser mayores que 1; asimismo, señala que los países industrializados presentan sistemáticamente mayores valores de γ que los que se obtienen en las distribuciones de los países en desarrollo.

En los trabajos empíricos de Dagum (1977a, 1980), se analizan procesos similares en los que las distribuciones de países más igualitarios se caracterizan por valores bajos de α y valores altos de β . Para el caso de los Estados Unidos (Dagum, 1977a), en el periodo 1960-1969, el parámetro α aumenta de 4.10 a 4.37, mientras que β desciende de 0.38 a 0.35, en un periodo en el que el índice de Gini pasa de 0.35 a 0.33. Con datos más actuales, aunque de riqueza neta, Dagum (2004) obtiene estimaciones que presentan tendencias similares en cuanto a la evolución de los parámetros y del índice de Gini. En el caso español, en el periodo 1973-1991, el índice de Gini, calculado con los datos muestrales considerados, varía de 0.34 a 0.32.

Para ofrecer una idea comparativa con otros países de la Unión Europea, en Bandourian, McDonald y Turley (2003)¹⁴ se obtiene, en 1994, unos valores para Francia de 3.55 para el parámetro α y 0.38 para el parámetro β . En el caso de Alemania, estos valores son de 4.41 y 0.34 respectivamente. En un país con menor desigualdad como Suecia el parámetro α alcanza el valor de 5.87, mientras que el parámetro β se sitúa en 0.13. En el caso de Dinamarca, el país con menor desigualdad entre los pertenecientes a la Unión Europea en el periodo 1996-2001 (Álvarez, Prieto y Salas, 2004; Ahamdanech y García, 2005; Domínguez y Núñez, 2005), las estimaciones se sitúan en 7.81 y 0.08, respectivamente, en 1997.

De acuerdo con el significado expuesto de ambos parámetros, el incremento de las estimaciones obtenidas para α implicaría que se ha experimentado un proceso que ha inyectado progresividad en la distribución de la renta en España, reduciendo la participación de renta de los percentiles superiores y aumentando la de los inferiores, lo que redunda en la disminución de la polarización de rentas. Esta reducción de la polarización, registrada por medio del aumento del parámetro α , también se deduce de otros estudios que emplean métodos de medida similares a los de Wolfson (1994) y Esteban y Ray (1994). En concreto, Gradín (2002) confirma la reducción de la polarización en España en todas las magnitudes de ingreso y gasto disponibles para 1973-1991, más intensa en los años setenta.

¹⁴ Hay que advertir que, en este trabajo, se utilizan distribuciones de ingresos antes de impuestos y transferencias.

Entre los factores que influyen en este proceso despolarizador, reflejado en el crecimiento del parámetro α , se encuentran, por una parte, las reformas del sistema impositivo que se elaboraron en 1977 y su continuación en 1983, que inyectan progresividad sustituyendo un sistema fiscal obsoleto apoyado en la imposición indirecta hacia otro nuevo con gran peso de impuestos personales y progresivos (renta y sociedades). Así, según señala Comín (1996), en 1973, la contribución sobre la renta suponía 1.2% de los ingresos no financieros del Estado, en 1981 era ya 27.6%, en 1986 el 31.3% y en 1995 el 38%.¹⁵ Respecto a la incidencia impositiva en la redistribución, Calonge y Manresa (2001) afirman que el sistema fiscal español se convierte en progresivo y redistributivo en su conjunto gracias al impuesto sobre la renta de las personas físicas en el que “casi el 50% de este impuesto lo paga el decil más rico cuando éste obtiene el 28% de la renta disponible de todos los hogares, mientras que los dos deciles más pobres sólo contribuyen con el pago del 0.12%”. En el mismo sentido apuntan también los resultados de Lasheras, Rabadán y Salas (1993) y Salas (1994), coincidiendo con una estructura porcentual de incidencia conforme a la interpretación de un α creciente.

Por otra parte, en la mejora de los percentiles inferiores, registrada también por el aumento de α , repercuten los efectos distributivos del gasto público. A partir de numerosos estudios, entre ellos los de Medel, Molina y Sánchez (1988), Gimeno (1993), Molina y Jaén (1994), se deduce que los gastos en educación, sanidad, vivienda y pensiones tienen una gran incidencia redistributiva que favorece a los estratos inferiores y que ha intensificado a lo largo del tiempo gracias al aumento de estos gastos. En el caso concreto de las transferencias, Jaén y Molina (2001) observan un aumento de su incidencia a lo largo del tiempo, en la que los más beneficiados son los estratos más bajos.

A lo largo del periodo de estudio considerado, los incrementos del parámetro α son cada vez menores. El periodo de mayor incremento del parámetro es 1973-1981, en línea con la mayor reducción de la desigualdad detectada en trabajos como los de Pena *et al* (1996),

¹⁵ Véase una mejor aproximación a los cambios experimentados en la composición de ingresos del Estado, a lo largo del periodo de estudio, en la información cuantitativa contenida en Comín (1989, 1996).

Goerlich y Mas (2001) y en un gran número de estudios cuyos resultados se resumen en Cantó, Del Río y Gradín (2000).

El parámetro α tiene por lo contrario un descenso a lo largo del periodo. Un aumento de este parámetro indicaría una redistribución basada únicamente en la mejora de todos los percentiles de renta, con una incidencia decreciente según aumenta su orden. En el caso de España la disminución del parámetro indica que las políticas centradas en medidas de apoyo a las clases con menos recursos no han sido la única clave de la redistribución, sino que han estado acompañadas de una moderación de las rentas superiores, que repercute en ambos extremos de la distribución y reduce por tanto la polarización de las rentas, como ya se ha señalado, debido a la actuación del parámetro α .

El parámetro de escala de la distribución de Dagum muestra, en general, un incremento a lo largo del tiempo, con más fuerza entre 1981 y 1991 y, sobre todo, de 1991 a 2000. Este parámetro no hace sino registrar el incremento de la renta real experimentado en España en el periodo de estudio, 25.63% de la renta media real entre 1973 y 1991, que evita el efecto reductor de la renta global que habría supuesto el exclusivo aumento del parámetro α , con derivada negativa respecto a la renta media. Por tanto, el parámetro muestra cómo el crecimiento económico del periodo repercute en la distribución, lo que produce una mayor masa de renta a repartir, sobre todo en el último decenio estudiado, en que los niveles de renta real aumentan decididamente.

Al considerar la evolución de las distintas comunidades autónomas españolas (cuadro 2), se observa diferentes pautas de comportamiento, aunque se comprueba que las medias de las estimaciones siguen la misma evolución que la correspondiente al conjunto del Estado. Así, la media de las estimaciones de α tiene un retroceso a lo largo de todo el periodo de estudio, lo contrario a la media de las estimaciones de los parámetros β y γ , que presentan un crecimiento continuado.

La variabilidad entre las estimaciones de los parámetros en las comunidades autónomas permite realizar una primera aproximación a las relaciones empíricas entre los distintos parámetros, y de cada uno de ellos con la renta media y el índice de Gini, obtenidos ambos

CUADRO 2. Estimaciones de los parámetros de la distribución de Dagum de tipo I para las comunidades autónomas españolas

(Rentas disponibles en pesetas constantes de 1986)

Comunidad autónoma	EBPF 1973-1974			EBPF 1980-1981			EBPF 1990-1991		
	EBPF 1973-1974	EBPF 1980-1981	EBPF 1990-1991	EBPF 1973-1974	EBPF 1980-1981	EBPF 1990-1991	EBPF 1973-1974	EBPF 1980-1981	EBPF 1990-1991
Andalucía	0.042	1.501	2.297	0.072	0.979	2.645	0.127	0.868	2.962
Aragón	0.073	1.460	2.594	0.162	0.938	2.870	0.171	0.812	3.638
Asturias	0.064	1.399	2.831	0.141	0.661	3.229	0.174	0.951	3.734
Baleares	0.082	1.265	3.221	0.120	1.627	2.383	0.425	0.663	3.442
Canarias	0.084	1.285	2.471	0.048	1.559	2.450	0.169	0.804	3.008
Cantabria	0.047	1.601	2.933	0.119	1.160	2.825	0.185	0.821	3.301
Castilla y León	0.046	1.684	2.289	0.108	1.112	2.678	0.161	1.089	2.868
Castilla-La Mancha	0.039	1.765	2.328	0.043	1.068	2.906	0.057	1.373	3.210
Cataluña	0.124	1.079	3.101	0.122	1.023	3.181	0.251	1.308	2.866
Com. Valenciana	0.054	1.636	2.685	0.081	1.167	2.881	0.124	1.154	3.114
Extremadura	0.036	1.382	2.319	0.038	1.195	2.621	0.074	1.059	2.948
Galicia	0.034	2.146	2.432	0.096	0.979	2.911	0.118	1.080	3.101
Madrid	0.075	2.897	2.087	0.149	1.485	2.334	0.233	1.307	2.849
Murcia	0.020	2.283	2.507	0.068	1.473	2.553	0.144	0.956	2.712
Navarra	0.084	1.043	3.193	0.158	1.083	2.875	0.414	0.815	3.560
País Vasco	0.086	1.470	2.866	0.127	1.212	3.157	0.234	1.072	3.068
La Rioja	0.074	1.294	2.898	0.128	0.839	3.584	0.143	1.116	3.142
Media	0.063	1.599	2.650	0.105	1.151	2.828	0.188	1.015	3.148
Desviación característica	0.025	0.454	0.337	0.039	0.253	0.320	0.098	0.197	0.288
Coeficiente de variación	0.405	0.284	0.127	0.371	0.220	0.113	0.521	0.194	0.091

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos de las EBPF.

CUADRO 3. Coeficientes de correlación lineal de los distintos parámetros del modelo de Dagum, renta media e índice de Gini para las comunidades autónomas españolas

				I_G
<i>EBPF 1973-1974</i>				
I_G	1.000			
	0.469	1.000		
	0.581	0.663	1.000	
	0.598	0.523	0.880	1.000
<i>EBPF 1980-1981</i>	0.728	0.140	0.322	0.356
	1.000			
	0.273	1.000		
	0.311	0.785	1.000	
<i>EBPF 1990-1991</i>	0.291	0.357	0.771	1.000
	0.889	0.113	0.085	0.182
	1.000			
	0.443	1.000		
I_G	0.358	0.477	1.000	
	0.344	0.308	0.838	1.000
	0.748	0.138	0.098	0.237

FUENTE: Elaboración propia.

a partir de los datos muestrales.¹⁶ Mediante la observación de los coeficientes de correlación lineal contenidos en el cuadro 3, se detectan diferentes tipos de relaciones. Así, en primer lugar, se presenta una alta correlación entre el parámetro de escala y la renta media, tal como era de esperar, puesto que ambos aluden al monto de renta repartido en la distribución. Las ordenaciones de comunidades por el parámetro de escala y la renta media muestran similitudes importantes, sobre todo si hacemos clasificaciones que se refieren a grupos de comunidades más que al orden exacto de las mismas.

Por otra parte, la correlación entre los dos parámetros de igualdad es siempre negativa; así pues, en general, comunidades con valores altos del parámetro tienen valores bajos del parámetro , lo que demuestra la oposición entre el significado de los dos parámetros. La correlación del parámetro con el parámetro de escala es

¹⁶ Los valores correspondientes al índice de Gini y la renta media correspondientes a cada comunidad autónoma pueden verse en Pena *et al* (1996). A partir del coeficiente de correlación calculado entre estos valores se deduce que, por término medio, las comunidades de mayor renta media tienen también menor desigualdad relativa, aunque esta relación no es muy intensa.

positiva, mientras que, en el caso del parámetro α , comprobamos que la correlación con el parámetro de escala es negativa.

Resulta en particular interesante estudiar el sentido y la intensidad de la relación de los parámetros de igualdad con el índice de Gini, sobre todo para resaltar la gran correlación negativa entre el índice de Gini y el parámetro α lo que ilustra la relación del mecanismo de actuación del parámetro y la desigualdad de la distribución.¹⁷ Sin embargo, la correlación del índice de Gini con el otro parámetro de igualdad β es menos intensa y además positiva, es decir, valores altos del parámetro se presentan asociados a valores altos del índice de Gini.

Las relaciones comentadas ayudan a entender las pautas de comportamiento de cada parámetro en las diferentes comunidades autónomas y su influencia en la desigualdad y en la renta media de la comunidad. Así pues, el parámetro de escala registra los incrementos en las rentas de las distribuciones, apreciándose la disminución de la renta media experimentada por Canarias entre 1973 y 1981, constatada por Pena *et al* (1996).¹⁸ En términos globales, todas las comunidades experimentan crecimientos del parámetro de escala en el periodo 1973-1991, al igual que ocurre con su renta media.

En el caso de los parámetros de igualdad se observa una mayor disparidad de pautas. Respecto al parámetro β , entre una mayoría de comunidades en las que disminuyen las estimaciones, se producen aumentos, entre 1973 y 1981, en Baleares, Canarias y Navarra, mientras que, en 1981-1991, se presentan incrementos en Asturias, Castilla-La Mancha, Cataluña, Galicia y La Rioja.

En el caso del parámetro γ , entre una mayoría de pautas de crecimiento, Baleares, Canarias, Cantabria y Navarra experimentan reducciones entre 1973 y 1981, y Cataluña, País Vasco y La Rioja entre 1981 y 1991. Entre 1973 y 1991 sólo Cataluña tiene un aumento de γ y una disminución de β , circunstancia que coincide con un aumento del índice de Gini. Baleares es la única comunidad, además

¹⁷ Se observa también una correlación de signo positivo entre los incrementos del parámetro β y las disminuciones experimentadas por el índice de Gini en los distintos periodos considerados.

¹⁸ Cataluña experimenta también un pequeño descenso en el parámetro de escala entre 1973 y 1981; sin embargo, este descenso es de apenas dos milésimas, lo que indica una estabilidad del parámetro ante el escaso incremento de la renta media real en esta comunidad en nueve años, cifrado en 3.9 por ciento.

de Cataluña, cuyo índice de Gini crece en el periodo total considerado; no obstante, experimenta la mayor disminución absoluta y relativa del parámetro α y el mayor incremento relativo y absoluto del parámetro β entre 1973 y 1981, periodo en el cual se presenta también, en esta comunidad autónoma, el mayor aumento del índice de Gini. El incremento de la desigualdad en estas dos comunidades es un hecho también constatado en estudios como los de Goerlich y Mas (1999) y (2001).

Por tanto, aunque las relaciones entre parámetros que varían simultáneamente tienen cierta complejidad, las medidas estadísticas utilizadas permiten intuir una relación fuerte y directa del parámetro α con la desigualdad medida por el índice de Gini y una relación inversa con el otro parámetro de igualdad.

Así pues, el cambio de la distribución personal de la renta en España se reproduce en la mayoría de sus comunidades autónomas, aunque existen importantes excepciones. Se observan tendencias convergentes continuadas en las estimaciones de los parámetros de igualdad α y β , evaluadas mediante los respectivos coeficientes de variación, mientras que no hay tal aproximación en el parámetro de escala lo que indica una mayor convergencia en términos de igualdad que en términos de renta real.

CONCLUSIONES

A lo largo del presente artículo se comprueba cómo la modelización paramétrica es un instrumento que presenta gran utilidad para el análisis de los cambios de la distribución personal de la renta a lo largo del tiempo y en el espacio, mediante la interpretación de las variaciones experimentadas por los parámetros de las distribuciones ajustadas. El estudio teórico de los parámetros de la distribución adecuada en cada caso permite convertir a éstos en indicadores de cambios determinantes en el proceso distributivo.

En el caso de los modelos de Dagum, el estudio realizado en este artículo nos permite deducir, entre otras conclusiones, que los dos parámetros de igualdad del modelo actúan de manera muy diferente. El parámetro α es un indicador de la progresividad de los cambios de la distribución, pues un aumento del mismo implica una

reducción de las rentas superiores y un aumento de las inferiores. El parámetro α , por lo contrario, ocasiona una mayor igualdad, aumentando las rentas de todos los percentiles pero en mayor medida las de los inferiores.

Utilizando las mencionadas interpretaciones, se han detectado las características más relevantes de la evolución de la distribución personal de la renta en España y sus comunidades autónomas en el periodo 1973-2000, a partir de la información económica que contienen los parámetros. Dichos parámetros informan que la distribución personal de la renta ha sufrido una evolución, característica de una pauta de desarrollo y consolidación del mismo, que ha reducido la desigualdad mediante un freno de los crecimientos de las rentas más altas en relación con el importante aumento de las más bajas. La moderación del crecimiento de las rentas superiores, con el consiguiente efecto reductor de la polarización, ha sido un factor de mejora de la distribución como resultado de las diferentes reformas fiscales operadas a lo largo de un periodo en el que se liquida un sistema impositivo regresivo (Comín, 1989, 1996; Lasheras, Rabadán y Salas, 1993; Salas, 1994; Calonge y Manresa, 2001). Por otra parte, los gastos públicos en educación, sanidad, vivienda y pensiones tienen una gran incidencia redistributiva que favorece a los estratos inferiores (Medel, Molina y Sánchez, 1988; Gimeno, 1993; Molina y Jaén, 1994; Jaén y Molina, 2001). Estos cambios no se han reproducido uniformemente en las diferentes comunidades autónomas y se observan pautas de comportamiento distintas, aunque la mayor parte de las comunidades evoluciona en el mismo sentido que el conjunto del Estado.

Finalmente, conviene señalar que el enfoque que inicia este trabajo, centrado en el conocimiento del significado económico de los parámetros de Dagum, se complementa con la formulación de un modelo explícito que vincule los parámetros con indicadores socioeconómicos, en la línea de estudio de Jäntti y Jenkins (2001) y García (2003). Este desarrollo exige la elaboración de ecuaciones que relacionen los parámetros con indicadores socioeconómicos, en un contexto de simultaneidad de relaciones causales, tarea que constituye un desafío para investigaciones futuras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., e I. Stegun (1970), *Handbook of Mathematical Functions*, Nueva York, Dover Publications.
- Ahamdanech, I., y C. García (2005), “Welfare, Inequality and Poverty Rankings in the European Union Using an Inference-based Stochastic Dominance Approach”, *First Meeting of the Society for the Study of Economic Inequality*, Universitat de les Illes Balears.
- Álvarez, S., J. Prieto y R. Salas (2004), “The Evolution of Income Inequality in the European Union During the Period 1993-1996”, *Applied Economics*, 36, pp. 1399-1408.
- Amoroso, L. (1925), “Ricerche intorno alla Curva dei Redditi”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 4 (21), pp. 123-157.
- Bandourian, R., J. B. McDonald y R. S. Turley (2003), “Income Distributions: An Inter-temporal Comparison over Countries”, *Estadística*, 55, páginas 135-152.
- Bordley, R. F., J. B. McDonald, y A. Mantrala (1996), “Something New, Something Old: Parametric Models for the Size Distribution of Income”, *Journal of Income Distribution*, 6 (1), pp. 91-104.
- Callealta, F. J., J. M. Casas y J. J. Núñez (1996), “Distribución de la renta ‘per capita’ disponible en España: Descripción, desigualdad y modelización”, Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez (comps.), *Distribución personal de la renta en España*, Madrid, Pirámide, pp. 425-864.
- Calonge, S., y A. Manresa (2001), “La incidencia impositiva y la redistribución de la renta en España: Un análisis empírico”, *Papeles de Economía Española*, 88, pp. 216-229.
- Cantó, O., C. del Río y C. Gradín (2000), “La situación de los estudios de desigualdad y pobreza en España”, *Cuadernos de Gobierno y Administración*, 2, pp. 25-94.
- Comín, F. (1986), “Reforma tributaria y política fiscal”, García Delgado (comp.), *España economía*, pp. 869-902.
- (1996), *Historia de la hacienda pública II*, España, Barcelona, Editorial Crítica.
- Cowell, F. A. (1995), *Measuring Inequality*, Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead, 2a. edición.
- Cramer, J. S. (1978), “A Function for Size Distribution of Incomes: Comment”, *Econometrica*, 46 (2), pp. 459-460.
- Dagum, C. (1977a), “A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation”, *Economie Appliquée*, 30 (3), pp. 413-436.
- (1977b), “El modelo log-logístico y la distribución del ingreso en la Argentina”, *EL TRIMESTRE ECONÓMICO*, XLIV, 4, núm. 176, pp. 837-864.
- (1980), “Sistemas generadores de distribución del ingreso y la ley de Pareto”, *EL TRIMESTRE ECONÓMICO*, XLVII, 4, núm. 188, pp. 877-917.

- Dagum, C. (1983), "Income Distribution Models", S. Kotz y N. L. Jonson (comps.), *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 4, Nueva York.
- (1995), "Alcance y método de la economía como ciencia", *EL TRIMESTRE ECONÓMICO*, LXII, núm. 247, pp. 297-336.
- (1996), "A Systemic Approach to the Generation of Income Distribution Functions", *Journal of Income Distribution*, 6 (1), pp. 105-126.
- (2004), "Specification and Analysis of Wealth Distribution Models with Applications", *Business and Economic Statistic Section, American Statistical Association*, Agosto 8-12, Toronto, Canadá.
- Domínguez, J., y J. J. Núñez (2005), "The Evolution of Economic Inequality in the EU Countries During the Nineties", *First Meeting of the Society for the Study of Economic Inequality*, Universitat de les Illes Balears.
- Esteban, J. M., y D. Ray (1994), "On the Measurement of Polarization", *Econometrica*, 62 (4), pp. 819-851.
- García, C. (2003), "Factores condicionantes y modelos de la distribución personal de la renta en España", tesis doctoral, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Alcalá.
- Gertel, H. N., R. Giuliodori, P. F. Auerbach y A. F. Rodríguez (2001), "Evaluating Equality Using Parametric Income Distribution Models. An Exploration of Alternative Effects Using a Dagum Parametric Income Distribution Model", *II Workshop on Dynamics of Social and Economic Systems*, Instituto de Integración Latinoamericana-Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales, Universidad Nacional de La Plata.
- Gibrat, R. (1931), *Les Inégalités Économiques*, París, Recevil Sirey.
- Gimeno, J. A. (1993), *Incidencia del gasto público por niveles de renta*, Madrid, Fundación Argentaria.
- Gini, C. (1909), "Il Diverso Accrescimento delle Classi Sociali e la Concentrazione della Ricchezza", *Gionarle degli Economisti*, serie II, vol. XXXVII.
- Goerlich, F. J., y M. Mas (1999), *Medición de la desigualdad: Contribución a una base de datos regional*, Valencia, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.
- , y — (2001), "Inequality in Spain 1973-91: Contribution to a Regional Database", *Review of Income and Wealth*, 47 (3), pp. 361-378.
- Gradín, C. (2002), "Polarization and Inequality in Spain, 1973-1991", *Journal of Income Distribution*, 11 (1-2), pp. 34-52.
- Jaén, M., y A. Molina (2001), "Efectos distributivos del gasto público en España", *Papeles de Economía Española*, 88, pp. 198-215.
- Jäntti, M., y S. P. Jenkins (2001), "Examining the Impact of Macro-economic Conditions on Income Inequality", ISER, Working Paper 2001-17, Universidad de Essex.
- Kendall, M., y A. Stewart (1977), *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 1, 4a. edición, Nueva York, McMillan Publishing.

- Lasheras, M. A., I. Rabadán y R. Salas (1993), “Política redistributiva del IRPF entre 1982 y 1990”, *I Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza*, Madrid, Fundación Argentaria.
- McDonald, J. B., y Y. J. Xu (1995), “A Generalization of the Beta Distribution with Applications”, *Journal of Econometrics*, 66, pp. 133-152.
- Medel, B., A. Molina y J. Sánchez (1988), *Los efectos distributivos del gasto público en España*, Madrid, Fundación FIES.
- Molina, A., y M. Jaén (1994), *Gasto público y redistribución de la renta: España 1981-1987*, Bilbao, Fundación BBV.
- Pareto, V. (1897), *Cours d'Economie Politique*, traducción al inglés en A. S. Scheiwer y A. N. Page (comps.) (1972), McMillan.
- Pena, J. B., J. Callealta, J. M. Casas, A. Merediz y J. J. Núñez (1996), *Distribución personal de la renta en España*, Madrid, Pirámide.
- Prieto, M. (1998), *Modelización paramétrica de la distribución personal de la renta para España mediante métodos robustos*, tesis doctoral, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.
- Pudney, S. (1993), “Income and Wealth Inequality and the Life Cycle. A Non-parametric Analysis for China”, *Journal of Applied Econometrics*, 8, pp. 249-276.
- Salas, R. (1994), “Distribución de la renta y redistribución a través del IRPF en España”, *ICAЕ*, núm. 9409, diciembre.
- Salem, A. B., y T. D. Mount (1974), “A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: The Gamma Density”, *Econometrica*, 42, pp. 1115-1127.
- Singh, S. K., y G. S. Maddala (1976), “A Function for the Size Distribution of Incomes”, *Econometrica*, 44, pp. 963-970.
- Thurow, L. C. (1970), “Analyzing the American Income Distribution”, *American Economic Review*, 60, pp. 261-269.
- Wolfson, M. (1994), “When Inequalities Diverge”, *American Economic Review*, 84 (2), pp. 353-358.