El Trimestre Económico
ISSN: 0041-3011
trimestreeditor@fondodeculturaeconomica.com
Fondo de Cultura Económica
México

Brida, Juan Gabriel

Población y crecimiento económico. Una versión mejorada del modelo de Solow

El Trimestre Económico, vol. LXXV, 2008, pp. 5-22
Fondo de Cultura Económica
Distrito Federal, México

EL TRIMESTRE ECONÓMICO, vol. LXXV, núm. especial, enero de 2008, pp. 5-22

POBLACIÓN Y CRECIMIENTO ECONÓMICO

Una versión mejorada del modelo de Solow*

*Juan Gabriel Brida***

RESUMEN

Una de las hipótesis tradicionales en teoría del crecimiento económico es que la fuerza de trabajo crece exponencialmente. Esta no es una hipótesis sostenible pues implica que la población del planeta puede ser arbitrariamente grande. En este artículo mejoramos el modelo de Solow al introducir una ley de crecimiento poblacional que verifique las propiedades más importantes observadas en el crecimiento de la población humana: *i*) la población es creciente y acotada y *ii*) la tasa de crecimiento de la población decrece a 0 cuando el tiempo tiende al infinito. El resultado principal del trabajo es un teorema en el que se demuestra que el modelo es asintóticamente estable y que el capital *per capita* tiende a un valor constante.

ABSTRACT

One of the usual hypothesis in standard economic growth theory is that labor force follows exponential growth. This is an unrealistic assumption because growing exponentially population can be arbitrarily large. In this paper we reformulate the neoclassical Solow model of economic growth by assuming that the law describing population growth verifies two stylized facts: *i*) population is strictly increasing

* *Palabras clave*: modelo de Solow, crecimiento poblacional. *Clasificación JEL*: C62, O41. El autor desea agradecer la ayuda financiera para la investigación otorgada por la Universidad Libre de Bolzano (proyecto WW500S, "Dynamical Regimes in Economics: Modeling and Statistical Tools") y por el Conacyt México (proyecto número 42609; título: Modelado matemático del cambio en economía).

** School of Economics and Management, Free University of Bolzano, Italia (correo electrónico: JuanGabriel.Brida@unibz.it).

and bounded and *ii*) the rate of growth of population is strictly decreasing to zero. The main result of the paper is the proof of the convergence of capital per worker to a constant value independently of the initial condition.

INTRODUCCIÓN

Una de las hipótesis tradicionales en los modelos de crecimiento económico es que la fuerza de trabajo L crece a una tasa constante $n \quad 0$. En tiempo t continuo es natural definir esta tasa de crecimiento como:

$$n \quad \frac{\dot{L}}{L} \quad \frac{\frac{L}{t}}{L} \tag{1}$$

lo que implica que la fuerza de trabajo L crece exponencialmente y para cada condición inicial $L(0) \quad L_0$, la fuerza de trabajo al tiempo t es

$$L(t) \quad L_0 e^{nt} \tag{2}$$

Este sencillo modelo exponencial de crecimiento de la fuerza de trabajo representa fielmente el crecimiento poblacional sólo en el periodo inicial pues, creciendo exponencialmente, la fuerza de trabajo crecería al infinito cuando el tiempo tiende al infinito, lo que por supuesto no es sostenible. El modelo exponencial no se ajusta a las reducciones en el crecimiento de la población debidas a la competencia por los recursos ambientales como comida y territorio. Verhulst (1838) afirma que una población estable debe llegar a una saturación característica, usualmente llamado capacidad de carga del ambiente, que define una cota superior del crecimiento.[1] Con una población mundial de más de 6 mil millones de personas, los expertos en crecimiento poblacional indican que hemos entrado en una zona en la que se observan claramente límites en la capacidad de carga del planeta (véase Day, 1996, y Brown, 1984). Esto nos define el primer hecho estilizado del crecimiento de la población: la capacidad de carga del planeta define una cota superior del tamaño de la población que no puede ser superada.

[1] La expresión inglesa *carrying capacity*, que en este trabajo traducimos como "capacidad de carga" se utilizó por vez primera cuando se intentó determinar la población máxima de una especie dada que puede soportar su entorno sin límite de tiempo. La capacidad de carga de la Tierra puede ser definida como la carga máxima que la humanidad puede imponer de modo sostenible al medio ambiente antes de que éste sea incapaz de sostener y alimentar la actividad humana. En las referencias bibliográficas el lector puede encontrar información pormenorizada acerca del concepto de capacidad de carga, de algunos métodos para calcular la capacidad de carga de la Tierra y aplicaciones en la teoría del crecimiento económico.

Otra regularidad empírica en el crecimiento poblacional es que las tasas de mortalidad y natalidad han disminuido en los últimos decenios. Las personas viven más años debido al mayor acceso a la inmunización, a la atención primaria de la salud y a los programas de erradicación de enfermedades. Muchos padres se están dando cuenta de que a medida que mejoran las condiciones de salud, es más probable que sobrevivan más de sus hijos, de manera que están decidiendo tener menos bebés. El mayor acceso a la planeación de la familia está ayudando a controlar el número de hijos y el tiempo que transcurre entre los nacimientos de sus hijos. Además, gracias al mayor acceso a la educación y al empleo, son más las mujeres que están formando sus familias a mayor edad y están teniendo menos hijos, pero más sanos. Debido a la desaceleración de las tasas de natalidad, las tasas de crecimiento de la población han comenzado a disminuir notoriamente en los últimos decenios y sus valores son cercanos a 0. Incluso se han observado regiones del planeta con tasas de crecimiento de la población negativas durante largos periodos.[2] Esto nos define el segundo hecho estilizado del crecimiento de la población: la tasa de crecimiento de la población es decreciente y tiende a ser nula.

Estas observaciones determinan que, como afirma Maynard Smith (1974), una ley $L(t)$ de crecimiento de la población que sea acorde con las observaciones empíricas debe verificar las siguientes propiedades: *i*) cuando la población es suficientemente pequeña en relación con la capacidad de carga del planeta L , entonces L crece alrededor de una tasa constante n 0; *ii*) cuando la población es suficientemente grande en relación con la capacidad de carga del planeta L , los recursos económicos comienzan a ser escasos y esto afecta de manera negativa el crecimiento de la población, y *iii*) la tasa de crecimiento de la población decrece a 0.

En este artículo suponemos que la ley de crecimiento de la población verifica estas propiedades. Existen en la bibliografía muchos ejemplos de modelos de crecimiento poblacional que verifican estas propiedades básicas. El más conocido es la ley logística, introducida por Verhulst (1838) como una extensión del modelo exponencial (véase Schtickzelle, 1981). La ecuación logística también se conoce como ley de Verhulst-Pearl ya que fueron Pearl

2 Entre 2000 y 2005 la población mundial creció a razón del 1.31% por año, cifra considerablemente más baja que el 1.71% registrado en los dos últimos decenios. Las proyecciones de la variante media en materia de fecundidad efectuadas por las Naciones Unidas indican que la tasa de crecimiento de la población seguirá decreciendo hasta el 0.3% pronosticado para el quinquenio 2045-2050 (World Population Prospects: The 2002 Revisión, vol. I, II y III; publicación de las Naciones Unidas, núm. de venta E.03.XIII.6, 7 y 8).

y Reed (1920) quienes la popularizaron usándola para describir los datos del crecimiento de la población de los Estados Unidos desde 1790 a 1920.[3] La curva logística es del tipo sigmoide con el punto de inflexión en $L\ /2$, la mitad del valor de la capacidad de carga del planeta L , lo que genera una poco deseable propiedad de simetría a la hora de confrontar la curva con los datos observados. Para evitar esta restricción muchos autores han introducido modelos con parámetros adicionales que generalizan la ecuación logística.[4] La curva de Richards (1959) aún es la más popular de estas generalizaciones[5] y es una de las ecuaciones tradicionales para calibrar con datos observados ofrecidas en los paquetes de *software* estadístico. Como la curva logística es también una curva sigmoidal pero su punto de inflexión puede tomar cualquier valor entre 0 y L .

En la sección I modificamos el clásico modelo de crecimiento económico de Solow (1956) cambiando la función exponencial de crecimiento de la población por una ley que verifique las propiedades introducidas anteriormente. Este trabajo se entiende como una continuación de los ejercicios precedentes (Accinelli y Brida, 2006a y b; Brida, 2006; Brida y Limas Maldonado, 2005, y Mingari Scarpello y Ritelli, 2003), en los que se hace un análisis del modelo de Solow en el caso particular en que la tecnología de producción está representada por una función de producción del tipo Cobb-Douglas y la ley de crecimiento de la población es de tipo logístico (Accinelli y Brida, 2006b; Mingari Scarpello y Ritelli, 2003, y Brida, Mingari Scarpello y Ritelli, 2006) está representada por la ley de Von Bertalanffy (Brida y Limas Maldonado, 2005), o sigue la ecuación de Richards (Accinelli y Brida, 2006a). El trabajo de Donghan (1998) ha inspirado el actual. En ese artículo el autor obtiene resultados similares a los que presentaremos en las secciones siguientes y de allí hemos recogido algunas ideas para las demostraciones.

I. El modelo de crecimiento de Solow modificado

El modelo tiene dos elementos clave: *i*) la función de producción, esto es, como el capital K y el trabajo L se transforman en producto, y *ii*) como cam-

[3] En Maynard Smith (1974) y Coke y Witten (1986) el lector puede encontrar una revisión pormenorizada acerca del modelo logístico y de su uso para describir la dinámica de la población humana.

[4] Véase, por ejemplo, Oliver (1969), Chaddha y Chitgopekar (1971) y Zwanzig (1973).

[5] Algunos autores llaman a la curva de Richards ecuación logística generalizada. Véase Nelder (1961) y Thomas *et al* (1980).

bian con el tiempo el trabajo y el capital. En lo que sigue en este trabajo suponemos que el modelo verifica las siguientes propiedades:

i) La función de producción $F(K, L)$ satisface las siguientes condiciones:
   a) $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$; $\forall \lambda, K, L \in \mathbb{R}$ (rendimientos constantes a escala)
   b) $F(K, 0) = F(0, L) = 0$; $\forall K, L \in \mathbb{R}$
   c) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$
   d) $\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty$; $\lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$ (condiciones de Inada)

ii) La tasa de crecimiento de acervo de capital iguala la inversión neta $i = sF(K, L)$ menos la depreciación del capital δK:

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K \tag{3}$$

iii) La fuerza de trabajo $L(t)$ verifica las siguientes propiedades:
   a) $L(0) = L_0 > 0$; $\dot{L}(t) > 0$, $\forall t \geq 0$ y $\lim_{t \to \infty} L(t) = L_\infty$ (la población es estrictamente creciente y acotada)
   b) Si $n(t) = \dot{L}(t)/L(t)$ entonces $\dot{n}(t) < 0$, $\forall t \geq 0$ y $\lim_{t \to \infty} n(t) = 0$ (la tasa de crecimiento de la población es estrictamente decreciente a 0)

Las propiedades *i*) y *ii*) son las usuales en el modelo clásico de Solow. La última hipótesis es la única diferencia con el modelo original pues en éste el crecimiento de la población es exponencial.

Si $k = K/L$ es el capital por trabajador y $f(k) = F(K/L, 1) = F(k, 1)$ es la función de producción en forma intensiva tenermos que

$$f(0) = 0$$

$$f'(k) > 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$$

$$f''(k) < 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

De $k = K/L$ se deduce

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{4}$$

y entonces

$$\frac{k}{k} \quad \frac{sF(K,L) \quad K}{K} \quad n(t) \quad s\frac{F \; \frac{K}{L}, 1}{\frac{K}{L}} \qquad n(t) \tag{5}$$

De aquí se obtiene la ecuación fundamental del modelo de Solow modificado. Esta ley describe cómo varía con el tiempo el capital *per capita*:

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n(t))k \tag{6}$$

Nótese que en el modelo original en el que la fuerza de trabajo crece exponencialmente es $n(t) \quad n$ (constante) y la ley de variación de capital *per capita* está representada por la ecuación diferencial autónoma

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n)k \tag{7}$$

En este caso sabemos que hay un equilibrio $\hat{k}_n \quad 0$ que es asintóticamente estable y todas las soluciones de la ecuación diferencial convergen a la solución de equilibrio $\hat{k}_n$ cuando t .[6] El valor $\hat{k}_n$ es la única solución positiva de la ecuación

$$sf(k) \quad (\quad n)k \tag{8}$$

Por lo contrario, el modelo modificado está representado por una ecuación diferencial no autónoma que tiene un único equilibrio en $k \quad 0$. En la siguiente sección estudiamos las propiedades dinámicas de la ecuación (6).

II. Análisis cualitativo del modelo

Sea $\hat{k}$ la única solución positiva de la ecuación

$$sf(k) \quad k \tag{9}$$

En esta sección vamos a demostrar que $\hat{k}$ es un atractor global de la ecuación (6). En particular demostramos que $k_0 \quad 0$ existe una única solución $k(t)$ al problema

$$\begin{array}{l} k \quad sf(k) \quad (\quad n(t))k \\ k(0) \quad k_0 \end{array} \tag{S}$$

que esta verifica que

$$\lim_{t} k(t) \quad k \tag{10}$$

[6] En Solow (1956) y Simonivits (2000) se encuentran las demostraciones de las propiedades básicas del modelo clásico de Solow. En particular, se encuentra en estas obras el siguiente resultado que usaremos más adelante en este trabajo: si $k(t)$ es una solución de (7) con condición inicial $k(0) \quad \hat{k}_n \; (k(0) \quad \hat{k}_n)$ entonces $k(t)$ es estrictamente monótona decreciente (creciente).

y que la convergencia es monótona. Además demostramos teoremas que permiten analizar como varían las soluciones del problema (S) al cambiar la condición inicial k_0 o al cambiar la curva que define la tasa de crecimiento de la población. Para comenzar, veamos el siguiente teorema de existencia y unicidad de trayectorias.

Teorema 1. Para cada k_0 0, existe una única solución del problema (S) con dominio $[0,\quad)$.

Demostración. Sean $g(k,t)\quad sf(k)\quad(\quad n(t))k$ y $A\quad[k_0/2,\quad)\quad[0,\quad)$. Tenemos que:

$$\left|\frac{g(k,t)}{k}\right|\quad |sf\ (k)\qquad n(t)|\quad sf\ \frac{k_0}{2}\qquad n(0),\quad (k,t)\quad A$$

y por tanto g satisface una condición de Lipchitz con constante $L\quad sf\ (k_0/2)\qquad n(0)$ uniformemente en A. Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo g continua y uniformemente lipchitziana en A, existe una única solución del problema (S) con dominio $[0,\quad)$.

Teorema 2. Sean $k_1(t)$ y $k_2(t)$ soluciones de la ecuación diferencial

$$k\quad sf(k)\quad(\quad n(t))k$$

con condiciones iniciales $k_1(0)$ y $k_2(0)$ respectivamente. Si se verifica que $k_1(0)\quad k_2(0)$, entonces $k_1(t)\quad k_2(t)$ para todo $t\quad[0,\quad)$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que existe un valor $\hat{t}\quad[0,\quad)$ tal que $k_1(\hat{t})\quad k_2(\hat{t})$. Entonces por continuidad existe un valor $\tilde{t}\quad[0,\ \hat{t}]$ tal que $k_1(\tilde{t})\quad k_2(\tilde{t})$. Esto no puede ser pues existe una sola solución de la ecuación diferencial $k\quad sf(k)\quad(\quad n(t))k$ con la condición inicial $k(\tilde{t})\quad k_1(\tilde{t})$.

Este resultado es análogo al que se obtiene en el modelo clásico de Solow: si dos economías tienen los mismos fundamentales, entonces la que tiene mayor capital *per capita* inicial tiene siempre mayor capital *per capita*. En lo que sigue haremos uso de un teorema de comparación para ecuaciones diferenciales cuya demostración se encuentra en textos avanzados del tema.

Teorema 3. Sean $f(t)$ y $g(t)$ soluciones de las ecuaciones diferenciales $x\quad F(x,\ t)$ y $x\quad G(x,\ t)$ respectivamente, definidas en el intervalo $[a, b]$ con la misma condición inicial $f(a)\quad g(a)$. Si las funciones F y G son lipchitzianas en $[a, b]$ y se verifica que $F(x, t) \quad G(x, t)$ para todo $t \quad [a, b]$, entonces $f(t) \quad g(t)$ para todo $t \quad [a, b]$.

Demostración. Véase, por ejemplo, King, Billingham y Otto (2003), p. 213. ■

Corolario 4. Sean $k_1(t)$ y $k_2(t)$ soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n_1(t))k$$

y

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n_2(t))k$$

con la misma condición inicial

$$k_1(0) \quad k_2(0) \quad k_0$$

Si se verifica que $n_1(t) \quad n_2(t)$ para todo $t \quad [0, \quad)$, entonces $k_1(t) \quad k_2(t)$ para todo $t \quad [0, \quad)$.

Demostración. Se deduce directamente del teorema anterior. ■

Este resultado muestra que cuanto más grande es la tasa de crecimiento de la población de una economía menor es el capital *per capita*. Esto indica que una política que permita bajar la tasa de crecimiento de la población de una economía mejora el rédito.

Teorema 5. Sean $k_1(t)$, $k_2(t)$ y $k_3(t)$ soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n(0))k \tag{A}$$

$$k \quad sf(k) \quad (\quad n(t))k \tag{B}$$

y

$$k \quad sf(k) \quad k \tag{C}$$

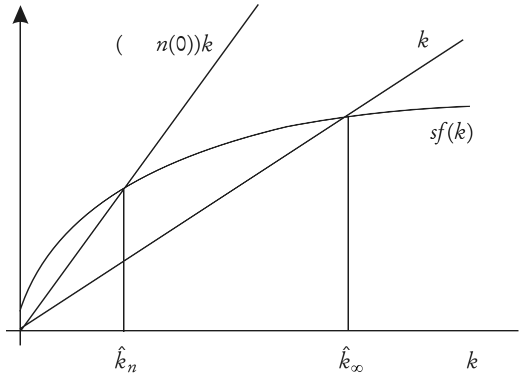
respectivamente, y con la misma condición inicial

$$k_1(0) \quad k_2(0) \quad k_3(0) \quad k_0$$

Si $\hat{k}_n$ y $\hat{k}$ son los equilibrios de las ecuaciones (A) y (C), entonces se verifica que:

i) $k_1(t) \quad k_2(t) \quad k_3(t)$ para todo $t \quad [0, \quad)$;
ii) Si $k_0 \quad \hat{k}_n$ entonces $k_2(t)$ es estrictamente creciente en $[0, \quad)$;
iii) Si $\hat{k}_n \quad k_0 \quad \hat{k}$ entonces existe $\hat{t} \quad [0, \quad)$ tal que $k_2(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, \hat{t}]$ y es estrictamente creciente en $[\hat{t}, \quad)$;

GRÁFICA 1. *La función de producción y la determinación del equilibrio en el modelo de Solow clásico con tasas de crecimiento de la población* $n(0)$ *y* 0



iv) Si $\hat{k} \quad k_0$ entonces existe $\hat{t} \quad [0, \quad)$ tal que $k_2(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, \quad)$ o bien existe $\hat{t} \quad [0, \quad)$ tal que $k_2(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, \hat{t}]$ y es estrictamente creciente en $[\hat{t}, \quad)$.

Demostración. Antes de empezar la demostración introducimos la gráfica 1 que puede ayudar al lector a seguir la prueba del teorema.

a) Sabemos que $0 \quad n(t) \quad n(0), \quad t \quad [0, \quad)$, y esto implique que $sf(k)$ $(\quad n(0))k \quad sf(k) \quad (\quad n(t))k \quad sf(k) \quad k, \quad t \quad [0, \quad)$. Entonces por el teorema 3 es

$$k_1(t) \quad k_2(t) \quad k_3(t), \quad t \quad [0, \quad] \tag{11}$$

Como k_1 y k_3 están acotadas, entonces (11) implica que $k_2(t)$ está acotada.

b) Como $k_0 \quad \hat{k}_n$ entonces la función $H(k) \quad sf(k) \quad (\quad n(0))k$ verifica que (véase gráfica 1): *i*) $H(k) \quad 0$ si $k \quad \hat{k}_n$, *ii*) $H(k) \quad 0$ si $k \quad \hat{k}_n$, *iii*) $H(k) \quad 0$ si $k \quad \hat{k}_n$. Esto implica que si $k_0 \quad \hat{k}_n$ entonces

$$k_2(0) \quad sf(k_0) \quad (\quad n(0))k_0 \quad H(k_0) \quad 0 \tag{12}$$

Luego, por continuidad de $k_2(t)$, $t_0 \quad 0$ tal que $k_2(t) \quad 0$ para todo $t \quad (0, t_0)$. Si $k_0 \quad \hat{k}_n$, entonces

$$k_2(0) \quad sf(k_0) \quad (\quad n(0))k_0 \quad H(k_0) \quad H(k_n) \quad 0$$

De todos modos, como la derivada segunda de $k_2(t)$ verifica que:

$$k_2(t) \quad sf \;(k_2(t))k_2(t) \quad (\quad n(t))k_2(t) \quad n(t)k_2(t) \tag{D}$$

podemos calcular, en particular, el signo de su valor en 0:

$$k_2(0) \quad sf\,(k_2(0))\,k_2(0) \quad (\quad n\,(0))\,k_2(0) \quad n(0)\,k_2(0) \quad n\,(0)\,k_2(0) \quad 0$$

y esto implica que $k_2(t)$ es creciente en $t \quad 0$. Siendo $k_2(0) \quad 0$, podemos deducir que $t_0 \quad 0$ tal que $k_2(t) \quad 0$, para todo $t \quad (0,\ t_0)$. Por tanto, hemos demostrado que:

$$k_0 \quad \hat{k}_n,\ t_0 \quad 0 \text{ tal que } k_2(t) \quad 0,\ t \quad (0, t_0)$$

Supongamos ahora por el absurdo que $t_1 \quad t_0$ tal $k_2(t_1) \quad 0$. Sea $t_2 \quad t_0$ tal que

$$t_2 \quad \inf\{t \quad t_0\colon k_2(t) \quad 0\}$$

Por continuidad este valor verifica que $k_2(t_2) \quad 0$. Por el cálculo hecho en (D) para la derivada segunda $k_2(t)$ tenemos que:

$$k_2(t_2) \quad sf\,(k_2(t_2))\,k_2(t_2) \quad (\quad n(t_2))\,k_2(t_2) \quad n(t_2)k_2(t_2) \quad n(t_2)\,k_2(t_2) \quad 0$$

y esto implica que $k_2(t)$ es creciente en $t \quad t_2$. Por tanto $\quad 0$ tal que $k_2(t) \quad 0$ para todo $t \quad (t_2, t_2 \quad)$, y esto contradice la definición de t_2. Luego $k_2(t) \quad 0,\ t \quad 0$ y entonces $k_2(t)$ es estrictamente creciente en $[0, \quad)$.

c) Si $\hat{k}_n \quad k_0 \quad \hat{k}$ como $k_1(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, \quad)$ tenemos que:

$$k_2(0) \quad sf\,(k_0) \quad (\quad n(0))\,k_0 \quad k_1(0) \quad 0$$

lo que implica que existe $t_0 \quad [0, \quad)$ tal que $k_2(t)$ es estrictamente decreciente en $[0,\ t_0]$. Supongamos por el absurdo que $k_2(t) \quad 0,\ t \quad [0, \quad)$. Entonces, siendo $k_2(t)$ decreciente en $[0, \quad)$ y acotada, existe

$$\lim_{t} k(t) \quad \bar{k}$$

y además es

$$(*)\colon \hat{k}_n \quad \bar{k} \quad k_0 \quad \hat{k}$$

Sabemos que

$$sf\,(k_2(t)) \quad (\quad n(t))\,k_2(t) \quad k_2(t) \quad 0,\ t \quad [0, \quad)$$

y por tanto

$$\lim_{t}\,[sf\,(k_2(t)) \quad (\quad n(t))k_2(t)] \quad 0$$

Entonces

$$sf\,(\bar{k}) \quad \bar{k} \quad 0$$

y esto implica que $\bar{k} \quad \hat{k}$ (véase gráfica 1). Esto contradice la desigualdad

(*). La contradicción parte de suponer que $\dot{k}_2(t) \quad 0, \quad t \quad [0, \quad)$ y por tanto existe $t_1 \quad (t_0, \quad)$ tal que $\dot{k}_2(t_1) \quad 0$. Sea $\hat{t} \quad [0, \quad)$ tal que

$$\hat{t} \quad \inf\{t \quad [0, \quad): k_2(t) \quad 0\}$$

Para este valor se verifica que

$$k_2(\hat{t}) \quad 0 \text{ y } k_2(t) \quad 0, \quad t \quad [0, \hat{t}\,]$$

Sólo nos queda por demostrar que $k_2(t)$ es estrictamente creciente en $[\hat{t}, \quad)$. Por el cálculo hecho en (D) tenemos que:

$$k_2(\hat{t}) \quad sf \;(k_2(\hat{t}))k_2(\hat{t}) \quad (\quad n(\hat{t}))k_2(\hat{t}) \quad n(\hat{t})k_2(\hat{t}) \qquad n(\hat{t})\,k_2(\hat{t}) \quad 0$$

Entonces $k_2(t)$ es creciente en $t \quad \hat{t}$ y por tanto $\quad 0$ tal que $k_2(t) \quad 0$ para todo $t \quad (\hat{t}, \hat{t} \quad)$. Supongamos por el absurdo que $\quad t_1 \quad \hat{t}$ tal que $k_2(t_1) \quad 0$. Sea $t_2 \quad \hat{t}$ tal que

$$t_2 \quad \inf\{t \quad \hat{t}: k_2(t) \quad 0\}$$

Por continuidad este valor verifica que $k_2(t_2) \quad 0$. Por el cálculo hecho en (D) para la derivada segunda $k_2(t)$ tenemos que:

$$k_2(t_2) \quad sf \;(k_2(t_2))k_2(t_2) \quad (\quad n(t_2))k_2(t_2) \quad n(t_2)k_2(t_2) \qquad n(t_2)\,k_2(t_2) \quad 0$$

y esto implica que $k_2(t)$ es creciente en $t \quad t_2$. Por tanto $\quad 0$ tal que $k_2(t) \quad 0$ para todo $t \quad (t_2, t_2 \quad)$; esto contradice la definición de t_2. Luego, $k_2(t) \quad 0, \quad t \quad 0$ y entonces $k_2(t)$ es estrictamente creciente en $[0, \quad)$.

d) La demostración es análoga a la de la parte anterior. ■

Observación 6. En el teorema anterior, las ecuaciones (A) y (C) representan el modelo de Solow clásico cuando la tasa de crecimiento constante es $n(0)$ y 0 respectivamente. En el numeral *i*) del teorema precedente hemos probado que una economía con tasa de crecimiento de la población decreciente a 0 mejora el rédito de una economía con los mismos fundamentales pero tasa de crecimiento de la población constante positiva. En los numerales *ii*)-*iv*) se demostró que si una economía tiene tasa de crecimiento de la población decreciente a 0, entonces el capital *per capita* varía en forma monótona en un intervalo del tipo $[t_0, \quad)$. La diferencia con el modelo de Solow clásico es que para algunos valores de la condición inicial k_0, la trayectoria es decreciente en un periodo inicial hasta que alcanza un valor mínimo, a partir del cual es estrictamente creciente. La monotonía junto con la acotación implican que las trayectorias del modelo mejorado convergen en forma monótona a un valor de largo periodo. El siguiente teorema se refiere a este valor de largo periodo.

Teorema 7. Si $k(t)$ es la solución del problema (S), entonces:

$$\lim_{t} \; k(t) \quad \hat{k}$$

Demostración. Por el teorema 5 sabemos que $k(t)$ es una función monótona y acotada y por tanto que existe $\lim_{t} k(t) \quad \bar{k} \quad 0$. Tenemos que probar que $\bar{k} \quad \hat{k}$ y esto es equivalente a probar que $sf(\bar{k}) \quad \bar{k} \quad 0$, ya que la ecuación $sf(k) \quad k \quad 0$ tiene una única solución positiva. Haremos la demostración del teorema para el caso en que $k(t)$ es una función monótona decreciente en un intervalo del tipo $[t_0, \quad)$. La demostración es totalmente análoga para el caso en que $k(t)$ es una función monótona creciente en un intervalo del tipo $[t_0, \quad)$. Supongamos entonces que $k(t)$ es una función monótona decreciente en un intervalo del tipo $[t_0, \quad)$. Entonces:

$$k(t) \quad 0, \;\; t \quad [t_0, \quad)$$

$$sf(k(t)) \quad (\quad n(t))\,k(t) \quad 0, \;\; t \quad [t_0, \quad)$$

$$\lim_{t} \; [sf(k(t)) \quad (\quad n(t))\,k(t)] \quad 0$$

$$sf(\bar{k}) \quad \bar{k} \quad 0$$

Sólo nos queda por demostrar que $sf(\bar{k}) \quad \bar{k}$ no es estrictamente negativo. Supongamos por el absurdo que fuera $sf(\bar{k}) \quad \bar{k} \quad A \quad 0$. Entonces

$$\lim_{t} \; [sf(k(t)) \quad (\quad n(t))\,k(t)] \quad A \quad 0$$

$$t_1 \quad t_0 \text{ tal que } [sf(k(t)) \quad (\quad n(t))k(t)] \quad \frac{A}{2}, \;\; t \quad [t_1, \quad)$$

$$k(t) \quad \frac{A}{2}, \;\; t \quad [t_1, \quad)$$

$$k(t) \quad k(t_1) \quad \int_{t_1}^{t} k(\;)\, d \quad \int_{t_1}^{t} \frac{A}{2}\, d \quad \frac{A}{2}(t \quad t_1), \;\; t \quad (t_1, \quad)$$

$$\lim_{t \to \infty} k(t) \geq \lim_{t \to \infty} k(t_1) + \frac{A}{2}(t - t_1)$$

Pero esto contradice el hecho de que $k(t)$ es una función acotada. ■

Observación 8. El teorema anterior implica que $\hat{k}$ es un atractor global de la ecuación diferencial (6): todas las trayectorias de (6) tienden asintóticamente a $\hat{k}$.

Observación 9. Habíamos observado antes que de dos economías con los mismos fundamentales, aquella con mayor capital inicial *per capita* tiene mayor capital *per capita* siempre. El hecho de que $\hat{k}$ sea un atractor global implica que si los fundamentales de dos economías son idénticos, entonces el capital *per capita* inicial no afecta el capital *per capita* de largo periodo.

Observación 10. Como el nivel de capital *per capita* de largo periodo $\hat{k}$ no depende de la ley de crecimiento de la población, dos economías con diferentes tasas de crecimiento de la población monótonas decrecientes a 0 que tengan las mismas tecnología de producción, tasa de crecimiento del acervo de capital y tasa de depreciación del capital convergen al mismo nivel de capital *per capita*. Por tanto, en el modelo de Solow modificado la convergencia es independiente de la tasa de crecimiento de la población y el valor de largo periodo es el estado estacionario positivo del modelo de Solow clásico con tasa de crecimiento nula, independientemente de cuál sea la ley de crecimiento de la población con tasas de crecimiento decrecientes a 0.

Observación 11. Varios autores (Cohen, 1995a y b; Kremer, 1993; Arrow *et al*, 1995; Meyer *et al*, 1999) han demostrado que el cambio tecnológico afecta el crecimiento de la población mediante la capacidad de carga del planeta: cuando el desarrollo tecnológico crece, la capacidad de carga L también crece. Esto es, si denotamos con T al nivel de tecnología, entonces la capacidad de carga $L(T)$ es una función creciente de la variable T. Un aumento de la capacidad de carga $L(T)$ no influye en la dinámica del modelo de Solow clásico, pues ésta no interviene en su formulación, pero si produce un efecto en el modelo mejorado. En realidad, si aumenta el nivel tecnológico T, aumenta la población de largo periodo del modelo (que coincide con la capacidad de carga $L(T)$) y, como el capital *per capita* se mantienen constantes, entonces aumenta el capital agregado de largo periodo.

Teorema 12. La solución del problema (S) es asintóticamente estable.

Demostración. Para demostrar la estabilidad (Lyapunov) de la solución $k_0(t)$ del problema (S) tenemos que probar que: 0, 0 tal que si $k_1(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (6) con condición inicial k_1 $k_1(0)$ que verifica $|k_1 \quad k_0|$, entonces es $|k_1(t) \quad k_0(t)|$, t [0,). Dado 0, sean $_1(t)$ y $_2(t)$ las soluciones de la ecuación diferencial (6) con condiciones iniciales $_1(0)$ $3k_0/2$ y $_2(0)$ $k_0/2$ respectivamente. Por el teorema 5 sabemos que

$$\lim_{t} \quad _1(t) \quad \lim_{t} \quad _2(t) \quad \hat{k}$$

y por tanto t_0 0 tal que $|\ _1(t) \quad k_0(t)|$ y $|\ _2(t) \quad k_0(t)|$ para todo t $[t_0, \quad)$. Entonces por el teorema 2, k_1 $[k_0/2, 3k_0/2]$, si $k_1(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (6) con condición inicial k_1 sabemos que

$$_2(t) \quad k_1(t) \quad _1(t), \quad t \quad [0, \quad)$$

Entonces, k_1 $[k_0/2, 3k_0/2]$ la solución $k_1(t)$ verifica que

$$|k_1(t) \quad k_0(t)| \quad , \quad t \quad [t_0, \quad)$$

Por el teorema de dependencia continua de las condiciones iniciales (King, 2003, p. 211), 0, 0 (que podemos elegir de modo tal que $k_0/2$) tal que si $k_1(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (6) con condición inicial k_1 $k_0(0)$ que verifica $|k_1 \quad k_0|$, entonces es

$$|k_1(t) \quad k_0(t)| \quad , \quad t \quad [0, t_0]$$

Por tanto el valor 0 que acabamos de seleccionar verifica que si $k_1(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (6) con condición inicial k_1 $k_1(0)$ tal que $|k_1 \quad k_0|$, entonces vale que $|k_1(t) \quad k_0(t)|$, t [0,). Esto prueba que la solución del problema (S) es (Lyapunov) estable. Por el teorema anterior sabemos que para cualquier par de soluciones $k_1(t)$ y $k_2(t)$ de la ecuación diferencial (6) es

$$\lim_{t} k_1(t) \quad \lim_{t} k_2(t) \quad \hat{k}$$

y por tanto tenemos que

$$\lim_{t} [k_1(t) \quad k_2(t)] \quad 0$$

Este límite junto con la estabilidad probada previamente implican que la solución del problema (S) es asintóticamente estable. ■

Observación 13. La estabilidad asintótica de las soluciones implica que dos soluciones cualesquiera, además de converger, si tienen condiciones iniciales cercanas entonces se mantienen siempre cerca.

CONCLUSIONES

En la teoría del crecimiento económico usualmente se supone que la población crece siguiendo una ley exponencial. Esto es claramente irreal pues una población que crece de modo exponencial rápidamente obtiene un tamaño muy grande, mucho más de lo que es la capacidad de carga del planeta. Es por este motivo que en este trabajo hemos sugerido sustituir en el modelo de Solow la ecuación de crecimiento exponencial de la población por una ley que verifique dos hipótesis básicas: *i*) la población es estrictamente creciente y acotada y *ii*) la tasa de crecimiento de la población es estrictamente decreciente a 0. Con estas hipótesis, y manteniendo invariados los demás supuestos del modelo, obtenemos un modelo de Solow mejorado. Del análisis de este modelo se deduce que hay un valor constante $\hat{k}$ de largo periodo al que tiende el capital por trabajador.

En la determinación de este valor de largo periodo (y contrariamente a lo que sucede en el modelo de Solow clásico) no interviene la tasa de crecimiento de la población $n(t)$. Además el valor $\hat{k}$ es mayor que el valor de equilibrio $\hat{k}_n$ del modelo clásico. De aquí se deduce que, en el largo periodo el desempeño económico mejora si la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo en vez de ser una constante positiva decrece a 0, lo que puede ser tomado como una motivación para tener una política de crecimiento poblacional eficiente.

En este trabajo demostramos que el modelo propuesto es asintóticamente estable de manera general y que el capital por trabajador (independientemente del capital *per capita* inicial) converge al valor de largo periodo $\hat{k}$. Al ser el valor de largo periodo $\hat{k}$ la única solución positiva de la ecuación $sf(\hat{k}) \quad \hat{k}$, depende sólo de la función de producción $f(\ )$, de la propensión al ahorro s y de la tasa de depreciación del capital . De aquí se deduce que, con la hipótesis de crecimiento de la población como en este trabajo, si dos países tienen las mismas tecnología de producción $f(\ )$, propensión al ahorro s y tasa de depreciación del capital entonces convergen al mismo valor de largo periodo de capital, consumo y producto *per capita*. Finalmente, hemos también mostrado que si el cambio tecnológico afecta el crecimiento de la población mediante la capacidad de carga del planeta, entonces un aumento del nivel tecnológico T, aumentando la población y manteniendo el capital *per capita* constante, produce un aumento del capital agregado de largo periodo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Accinelli, E., y J. G. Brida (2006a), "Re-formulation of the Solow Economic Growth Model with the Richards Population Growth Law", *WSEAS Transactions on Mathematics*, Issue 5, vol. 5, pp. 473-479.

——, y —— (2006b), "Crecimiento económico óptimo y crecimiento poblacional: una versión mejorada del modelo de Ramsey", *Papeles de población*, año 12, núm. 47, pp. 227-241.

Arrow, K., B. Bolin, R. Costanza, P. Dasgupta, C. Folke, C. S. Hollings, B. O. Jansson, S. Levin, K. G. MŠler, C. Perrings y D. Pimentel (1995), "Economic Growth. Carrying Capacity and the Environment", *Science*, 268, pp. 520-521.

Bongaarts, J. (1998), "Demographic Consequences of Declining Fertility", *Science*, 282, pp. 419-420.

Brida, J. G., G. Mingari Scarpello y D. Ritelli (2006), "The Solow Model with Logistic Manpower: A Stability Analysis", *Journal of World Economics Review*, vol. 1, núm. 2.

——, y E. J. Limas Maldonado (2005), "Closed form Solutions to a Generalization of the Solow Growth Model", *Avances*, 77, UACJ.

Brown, L. R (1984), "Stabilizing Population", L. R. Brown (comp.), *State of the World 1984*, Nueva York, W. W. Norton and Co.

Chaddha, R. L., y S. S. Chitgopekar (1971), "A Generalization of the Logistic Curves and Long-Range Forecasts (1966-1991) of Residence Telephones", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 2, núm. 2, pp. 542-560.

Cohen, J. E. (1995a), *How Many People Can the Earth Support?*, Nueva York, Norton.

—— (1995b), "Population Growth and Earth's Human Carrying Capacity", *Science*, 269, pp. 341-346.

Coke, K. L., y M. Witten (1986), "One-Dimensional Linear and Logistic Harvesting Models", *Mathematical Modeling*, 7, 301.

Daily, G. C., y P. R. Ehrlich (1992), "Population, sustainability, and Earth's Carrying Capacity: A Framework for Estimating Population Sizes and Lifestyles that Could be sustained Without Undermining Future Generations", *BioScience*, 42, pp. 761-771.

—— (1996), *Population Projections of the United States by Age, Sex, Race, and Hispanic Origin: 1995 to 2050*, Washington, U. S. Bureau of the Census, Current Population Reports. U. S. Government Printing Office, 25.

Donghan, C. (1998), "An Improved Solow-Swan Model", *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 13, núm. 2, pp. 72-78.

Kin, A. C., J. Billingham y S. R. Otto (2003), *Differential Equations: Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press.

Leach, D. (1981), "Re-Evaluation of the Logistic Curve for Human Populations", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A (General), vol. 144, núm. 1, páginas 94-103.

Maynard Smith, J. (1974), *Models in Ecology*, Cambridge, Cambridge University Press.

Meyer, P. S., y J. H. Ausubel (1999), "Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits", *Technological Forecasting and Social Change*, 61(3), páginas 209-214.

Mingari Scarpello, G., y D. Ritelli (2003), "The Solow Model Improved Through the Logistic Manpower Growth Law", *Annali Università di Ferrara-Sez VII-Sc. Mat.* 73.

Nelder, J. A. (1961), "The Fitting of a Generalization of the Logistic Curve", *Biometrics*, 17, pp. 89-110.

Oliver, F. R. (1969), "Another Generalisation of the Logistic Growth Function", *Econometrica*, vol. 37, núm. 1, pp. 144-147.

Pearl, R, y L. J. Reed (1920), "On the Rate of Growth of the Population of the United States Since 1790 and its Mathematical Representation", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 6, pp. 275-288.

Richards, F. J. (1959), "A Flexible Growth Function for Empirical Use", *J. Exp. Botany*, 10, pp. 290-300.

Schtickzelle M. (1981), "Pierre-François Verhulst (1804-1849). La première découverte de la function logistique", *Population*, vol. 3, pp. 541-556.

Simonovits, A. (2000), *Mathematical Methods in Dynamical Economics*, MacMillan Press.

Solow, R. M. (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Grwth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65.

Thomas, W. R., M. J. Pomerantz y M. E. Gilpin (1980), "Chaos, Asymmetric Growth and Group Selection for Dynamical Stability", *Ecology*, 61, páginas 312-320.

Verhulst, P. F. (1838), "Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement", *Corresp. Math. Phys.*, 10, pp. 113-121

Waltman, P. E. (2004), *A Second Course in Elementary Differential Equations*, Dover Publications, Inc.

Zwanzig, R. (1973), "Generalized Verhulst Laws for Pupulation Growth", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 70, núm. 11, pp. 3048-3051.