



Revista Integración

ISSN: 0120-419X

integracion@matematicas.uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Colombia

Macías, Mauricio; Martínez, Héctor J.; Pérez, Rosana  
Un algoritmo cuasi-Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial  
Revista Integración, vol. 34, núm. 2, 2016, pp. 187-206  
Universidad Industrial de Santander  
Bucaramanga, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327048838006>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## *Un algoritmo cuasi-Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial*

MAURICIO MACÍAS<sup>a\*</sup>, HÉCTOR J. MARTÍNEZ<sup>b</sup>,  
ROSANA PÉREZ<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad del Cauca, Departamento de Matemáticas, Popayán, Colombia.

<sup>b</sup> Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

**Resumen.** En este artículo proponemos un algoritmo cuasi-Newton para resolver una ecuación cuadrática matricial, el cual reduce el costo computacional del método Newton-Schur, tradicionalmente usado para resolver dicha ecuación. Demostramos que el algoritmo propuesto es local y hasta cuadráticamente convergente. Presentamos pruebas numéricas que ratifican los resultados teóricos desarrollados.

**Palabras clave:** Función cuadrática matricial, operador de Fréchet diferenciable, método de Newton-Schur, convergencia cuadrática.

**MSC2010:** 65H10, 49M15, 90C53, 15A24, 39B42.

## *A quasi-Newton algorithm to solve the matrix quadratic equation*

**Abstract.** In this paper we propose a quasi-Newton algorithm to solve a matrix quadratic equation, which reduces the computational cost of Newton-Schur method, traditionally used to solve this equation. We show that the proposed algorithm is local and up to quadratically convergent. We present some numerical tests which confirm the theoretical results developed.

**Keywords:** matrix quadratic equation, Fréchet derivative operator, Newton-Schur method, quasi-Newton method, quadratic convergence.

### *1. Introducción*

Una de las ecuaciones matriciales no lineales más sencillas es la ecuación cuadrática matricial

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}, \quad (1)$$

---

\*E-mail: [mauromac@unicauca.edu.co](mailto:mauromac@unicauca.edu.co)

Recibido: 01 de julio de 2016, Aceptado: 17 de noviembre 2016.

Para citar este artículo: M. Macías, H.J. Martínez, R. Pérez, Un algoritmo cuasi-Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial, *Rev. Integr. Temas Mat.* 34 (2016), No. 2, 187–206.

con  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Esta ecuación aparece en una gran variedad de aplicaciones, como *el problema de los valores propios cuadrático* [16], [17], [32] y *problemas estocásticos* [29], y surge en áreas de estudio como *el análisis dinámico de mecánica estructural y sistemas acústicos* [3], [30], *simulación de circuitos eléctricos* [21], *mecánica de fluidos* [28], *procesamiento de señales* [6], [19], *problemas de vibración y modelamiento de sistemas mecánicos microelectrónicos* [5], [20], [36].

Una matriz solución  $X$  de la ecuación (1) se llama un *solvente* [2], [9], [16], [20], [32]. Un resultado importante sobre la existencia de *solventes* es que el *Teorema Fundamental del Algebra* no se extiende a polinomios matriciales. Un ejemplo de ello se presenta cuando  $A = I_n$ ,  $B = \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $C = -D$ , donde  $D$  es una matriz singular [18].

Un caso particular de la ecuación (1), en el que existe una fórmula cerrada para sus *solventes* tal como sucede con la *fórmula cuadrática escalar*, se tiene cuando  $A = I_n$ , las matrices  $B$  y  $C$  conmutan y la raíz cuadrada de  $B^2 - 4C$  existe. En este caso, el *solvente* está dada por la matriz

$$X = \frac{1}{2} \left[ -B + (B^2 - 4C)^{1/2} \right], \quad (2)$$

donde  $(B^2 - 4C)^{1/2}$  denota la raíz cuadrada de  $B^2 - 4C$  [17].

Una completa caracterización de los solventes de (1) en términos de la generalización de la *descomposición de Schur* se presenta en [16]. Allí se describen y comparan varias técnicas numéricas de solución y, a partir de trabajos anteriores, se realiza el proceso de generalización y unificación.

Con respecto a la solución numérica de la ecuación cuadrática matricial, se destacan algoritmos basados en la *descomposición de Schur* [7], [16], algoritmos basados en sus propiedades teóricas [7], [22], [29], [35], algoritmos tipo Newton [10], [17] y recientemente algoritmos secantes [24], [25], [26].

Casos particulares de la ecuación (1) han dado lugar al desarrollo de algoritmos tipo Newton y de su respectiva teoría de convergencia [15], [16], [23]. Un ejemplo de ello es el estudio y análisis de convergencia de la ecuación  $X^2 - A = \mathbf{O}$ , realizados en [14] y [15].

En general, el método de Newton para resolver problemas matriciales no lineales, y en particular para resolver la ecuación matricial (1), ha tenido un papel central en cuanto a métodos numéricos se refiere; pero hay que destacar que la mayoría de los algoritmos tipo Newton propuestos para resolver la ecuación cuadrática están ligados a problemas cuadráticos particulares que surgen en aplicaciones específicas [4], [10].

Con el objetivo de reducir el costo computacional que representa la solución de (1) mediante el tradicional método de Newton basado en la descomposición Schur [7], [16], en este artículo proponemos un algoritmo cuasi-Newton que consiste en una *iteración de Newton simplificada* para resolver la ecuación cuadrática matricial (1), y bajo ciertas hipótesis demostramos que el algoritmo respectivo converge local y hasta cuadráticamente a un *solvente* de (1).

Organizamos este artículo en la siguiente forma. En la Sección 2 presentamos en forma descriptiva el método de Newton para resolver la ecuación (1), y como alternativa a su alto costo computacional proponemos un algoritmo cuasi-Newton para resolver (1).

Además, presentamos un lema técnico que usaremos en el desarrollo teórico de nuestra propuesta. En la Sección 3, bajo ciertas hipótesis, mostramos que el algoritmo propuesto es local y hasta cuadráticamente convergente. En la Sección 4 exploramos numéricamente el comportamiento local del algoritmo propuesto. Finalmente, en la Sección 5 hacemos algunos comentarios finales y propuestas de trabajos futuros sobre el tema.

## 2. La iteración de Newton simplificada para la ecuación cuadrática matricial

Una iteración del método de Newton para resolver (1) puede expresarse en la siguiente forma

$$L_{X_k}(S_k) = -Q(X_k), \quad (3)$$

$$X_{k+1} = X_k + S_k, \quad (4)$$

donde  $L_{X_k}(S_k)$  denota la derivada de Fréchet de  $Q$  en  $X_k$  en la dirección de  $S_k$  [14]. La derivada Fréchet de  $Q$  en  $X$  en la dirección de  $S$  satisface [24] que, para toda  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$$Q(X + S) = Q(X) + L_X(S) + R(S), \quad (5)$$

con

$$\lim_{\|S\| \rightarrow 0} \frac{\|R(S)\|}{\|S\|} = 0.$$

Evalutando  $Q$  en  $X + S$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Q(X + S) &= A(X + S)^2 + B(X + S) + C \\ &= Q(X) + (ASX + (AX + B)S) + AS^2; \end{aligned} \quad (6)$$

por lo tanto,  $L_X(S) = ASX + (AX + B)S$ . Así, dada una matriz inicial  $X_0$ , una iteración del método de Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial (1) está dada por

$$\begin{aligned} AS_k X_k + (AX_k + B)S_k &= -Q(X_k), \\ X_{k+1} &= X_k + S_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Observemos que en cada iteración se debe resolver un caso particular de la ecuación  $ASB + CSD = E$  (conocida como la *ecuación de Sylvester generalizada* [12],[17]) para encontrar la matriz  $S_k$ . La forma usual de resolver este tipo de ecuación es a través de la descomposición generalizada de Schur [11] de las matrices  $A$  y  $AX + B$ , la cual es muy costosa computacionalmente [17]. Esta versión del método de Newton para resolver (1) se conoce como el método de *Newton-Schur*, ya que utiliza el *algoritmo de Schur* para calcular la solución  $S_k$  de la ecuación (7), lo que hace que el método de Newton-Schur sea excesivamente costoso.

Por otro lado, es natural intentar “simplificar” la iteración (7). Con este propósito, si tenemos la relación de conmutatividad  $AS_k X_k = AX_k S_k$ , entonces, a partir de la

iteración de Newton (7), obtenemos la siguiente iteración

$$\begin{aligned}(2AX_k + B)S_k &= -Q(X_k), \\ X_{k+1} &= X_k + S_k.\end{aligned}\tag{8}$$

Así, dada una matriz inicial  $Y_0$ , la *iteración de Newton simplificada* la podemos expresar como

$$Y_{k+1} = (2AY_k + B)^{-1}(AY_k^2 - C),\tag{9}$$

la cual define el *método cuasi-Newton* que estamos proponiendo para resolver la ecuación (1). Ahora, nuestro interés es mostrar que la iteración (9) está bien definida y analizar su convergencia. Previo a esto, presentaremos a manera de preliminar, un resultado de álgebra lineal numérica que da una condición suficiente para la no singularidad de una matriz y una cota para su inversa [11], [34].

**Lema 2.1** ([8]). Sean  $\|\cdot\|$  una norma matricial inducida en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , tal que  $\|I_n\| = 1$  y  $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si  $\|F\| < 1$ , entonces  $(I_n - F)^{-1}$  existe y

$$\|(I_n - F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|F\|}.$$

### 3. Hipótesis y convergencia de la iteración de Newton simplificada

Para los resultados de convergencia que presentamos en esta sección asumiremos las siguientes hipótesis generales. Las tres primeras son análogas a las hipótesis generales usadas para probar convergencia local de algoritmos cuasi-Newton para sistemas de ecuaciones vectoriales [8]. La cuarta hipótesis puede verse como una versión matricial de la condición *tipo Dennis-Moré* [8] para convergencia superlineal de algoritmos cuasi-Newton. Cabe mencionar que, para la prueba de convergencia local del método de Newton-Schur se usan hipótesis análogas a las hipótesis estándar del caso vectorial [15], dos de las cuales son las hipótesis **H1** y **H2**, que mencionamos a seguir.

**H1.**  $Q : \mathbb{C}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  es Fréchet diferenciable en un conjunto  $D \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  abierto y convexo.

**H2.** Existe  $X_* \in D$  tal que  $Q(X_*) = \mathbf{O}$ .

**H3.** La matriz  $2AX_* + B$  es no singular y  $\beta$  es la norma de su matriz inversa, esto es,

$$\|(2AX_* + B)^{-1}\| = \beta.$$

**H4.** Existe  $\theta \in [0, 1]$  tal que

$$\lim_{\|S\| \rightarrow 0} \frac{\|L_{X_*}(S) - (2AX_* + B)S\|}{\|S\|^{1+\theta}} = 0.$$

Equivalentemente, existe  $\theta \in [0, 1]$  tal que para todo  $\gamma > 0$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$\frac{\|L_{X_*}(S) - (2AX_* + B)S\|}{\|S\|^{1+\theta}} < \gamma,$$

siempre que  $\|S\| < \epsilon_0$ .

El lema siguiente garantiza que existe una vecindad del solvente  $X_*$  de la ecuación cuadrática matricial (1) tal que para cada matriz  $Z$  en esta vecindad, la matriz  $2AZ + B$  es no singular y está acotada.

**Lema 3.1.** Sea  $Q : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  una función cuadrática matricial que satisface las hipótesis **H1** a **H3**. Existe una constante positiva  $\epsilon_1$  tal que si  $\|Z - X_*\| < \epsilon_1$ , entonces la matriz  $(2AZ + B)$  es no singular y  $\|(2AZ + B)^{-1}\| \leq 2\beta$ .

*Demostración.* Sea  $\|\cdot\|$  una norma matricial inducida en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  y sea

$$\epsilon_1 \leq \frac{1}{4\beta\|A\|}. \quad (10)$$

Supongamos que  $\|Z - X_*\| < \epsilon_1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|(2AX_* + B)^{-1}(2AZ + B) - I_n\| &= \|(2AX_* + B)^{-1}[(2AZ + B) - (2AX_* + B)]\| \\ &\leq 2\|(2AX_* + B)^{-1}\|\|A\|\|Z - X_*\| \\ &= 2\beta\|A\|\|Z - X_*\| \leq 2\beta\|A\|\epsilon_1 \leq 2\frac{\beta\|A\|}{4\beta\|A\|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$1 - \|(2AX_* + B)^{-1}(2AZ + B) - I_n\| \geq 1/2. \quad (11)$$

Por el Lema 2.1 y usando (11), la matriz  $(2AZ + B)$  es no singular y está acotada por  $2\beta$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \|(2AZ + B)^{-1}\| &\leq \frac{\|(2AX_* + B)^{-1}\|}{1 - \|(2AX_* + B)^{-1}[(2AZ + B) - (2AX_* + B)]\|} \\ &\leq \frac{\|(2AX_* + B)^{-1}\|}{\frac{1}{2}} = 2\beta. \end{aligned} \quad (12)$$

☑

El siguiente teorema garantiza que la iteración (9) está bien definida y converge linealmente a un solvente  $X_*$  si  $\theta = 0$ ; superlinealmente si  $\theta \in (0, 1)$ , y cuadráticamente si  $\theta = 1$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $Q : \mathbb{C}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  una función cuadrática matricial que satisface las hipótesis **H1** a **H4**. Existen constantes positivas  $\epsilon_2$  y  $\mu$  tales que, si  $\|Y_0 - X_*\| < \epsilon_2$ , entonces para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$  se tiene:

$$2AY_k + B \text{ es no singular}; \quad (13)$$

$$\|Y_{k+1} - X_*\| \leq \frac{2}{3} \|Y_k - X_*\|, \text{ para } \theta = 0; \quad (14)$$

$$\|Y_{k+1} - X_*\| < \mu \|Y_k - X_*\|^{1+\theta}, \text{ para } 0 < \theta \leq 1. \quad (15)$$

*Demostración.* Sea  $\|\cdot\|$  una norma matricial inducida en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . La demostración la haremos por inducción en dos casos, dependiendo del valor de la constante  $\theta$ .

1. Para  $\theta = 0$ . Sean  $\gamma$  y el correspondiente  $\epsilon_0$  (ver **H4**) tales que  $\gamma \leq \frac{1}{12\beta}$ . Definimos

$$\epsilon_2 = \min \{\epsilon_0, \epsilon_1\}, \quad (16)$$

donde  $\epsilon_1$  está dado en el Lema 3.1.

- a) Para  $k = 0$ .

Por hipótesis, tenemos que  $\|Y_0 - X_*\| < \epsilon_2$ , y dado que  $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ , se tiene que  $\|Y_0 - X_*\| < \epsilon_1$ . El Lema 3.1 garantiza que la matriz  $2AY_0 + B$  es no singular y  $\|(2AY_0 + B)^{-1}\| \leq 2\beta$ , con lo cual se prueba (13). En consecuencia,  $Y_1$  está bien definido, y de (9) se tiene

$$Y_1 - X_* = (2AY_0 + B)^{-1}(AY_0^2 - C) - X_*.$$

Sumando y restando  $AX_*^2, BY_0$  y  $C$  y teniendo en cuenta que  $Q(X_*) = \mathbf{O}$  ( $-C = AX_*^2 + BX_*$ ), tenemos que

$$\begin{aligned} Y_1 - X_* &= (2AY_0 + B)^{-1} [AY_0^2 - C - (2AY_0 + B)X_*] \\ &= (2AY_0 + B)^{-1} [Q(Y_0) - Q(X_*) - 2AY_0X_* + AX_*^2 - BY_0 - C] \\ &= (2AY_0 + B)^{-1} [Q(X_0) - Q(X_*) - L_{X_*}(Y_0 - X_*) \\ &\quad + (2AX_* + B)(Y_0 - X_*) - L_{X_*}(Y_0 - X_*)] \\ &= (2AY_0 + B)^{-1} [A(Y_0 - X_*)^2 \\ &\quad + (2AX_* + B)(Y_0 - X_*) - L_{X_*}(Y_0 - X_*)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Para una norma matricial inducida y consistente, usando **H4**, la desigualdad triangular y (16) en (17), tenemos

$$\begin{aligned} \|Y_1 - X_*\| &\leq \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A(Y_0 - X_*)^2\| \\ &\quad + \|L_{X_*}(Y_0 - X_*) - (2AX_* + B)(Y_0 - X_*)\|] \\ &< \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A\| \|Y_0 - X_*\|^2 + \gamma \|Y_0 - X_*\|] \\ &\leq \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A\| \|Y_0 - X_*\| + \gamma] \|Y_0 - X_*\| \\ &< 2\beta [\|A\| \epsilon_2 + \gamma] \|Y_0 - X_*\| \leq 2\beta \left[ \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{12\beta} \right] \|Y_0 - X_*\| \\ &\leq \frac{2}{3} \|Y_0 - X_*\|, \end{aligned} \quad (18)$$

lo cual prueba que  $\|Y_1 - X_*\| < \epsilon_2$ .

- b) *Hipótesis inductivas:* Supongamos que (13) y (14) se satisfacen para todo  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ . De lo cual se tiene que

$$2AY_{i-1} + B \text{ es no singular,} \quad (19)$$

$$Y_i \text{ está bien definida,} \quad (20)$$

$$\|Y_i - X_*\| \leq \frac{2}{3} \|Y_{i-1} - X_*\|. \quad (21)$$

Además, de (21) tenemos

$$\|Y_i - X_*\| < \left(\frac{2}{3}\right)^i \|Y_0 - X_*\| < \epsilon_2. \quad (22)$$

- c) *Paso de inducción:* Probemos que (13) y (14) se cumplen para  $k = i$ .

Por (22) se tiene que  $\|Y_i - X_*\| < \epsilon_2$ ; usando el Lema 3.1, se tiene que la matriz  $2AY_i + B$  es no singular con  $\|(2AY_i + B)^{-1}\| \leq 2\beta$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta (20) y mediante un proceso análogo al utilizado para acotar  $\|Y_1 - X_*\|$ , se demuestra que

$$\|Y_{i+1} - X_*\| \leq \frac{2}{3} \|Y_i - X_*\|. \quad (23)$$

Con lo cual se completa la demostración para este caso.

2. Para  $0 < \theta \leq 1$ . Sean  $\gamma$  y el correspondiente  $\epsilon_0$  (ver **H4**) tales que  $\gamma \leq \frac{\|A\|^\theta}{(8\beta)^{1-\theta}}$ . Tomemos

$$\epsilon_2 = \min \left\{ \epsilon_0, \frac{\epsilon_1}{2} \right\}, \quad (24)$$

donde  $\epsilon_1$  esta dado en el Lema 3.1.

- a) Para  $k = 0$ .

Por hipótesis, sabemos que  $\|Y_0 - X_*\| < \epsilon_2$ ; de (24) tenemos que  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ; en consecuencia  $\|Y_0 - X_*\| < \epsilon_1$ . Así, por el Lema 3.1, garantizamos que la matriz  $2AY_0 + B$  es no singular y  $\|(2AY_0 + B)^{-1}\| \leq 2\beta$ , con lo cual se prueba (13). En consecuencia,  $Y_1$  está bien definido, y de (9) se tiene

$$Y_1 - X_* = (2AY_0 + B)^{-1}(AY_0^2 - C) - X_*.$$

Procediendo en forma análoga al caso anterior, usando la constante  $\gamma$  de **H4** ya



definida, la desigualdad triangular, y teniendo en cuenta que  $\epsilon_2 \leq \epsilon_2^\theta$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|Y_1 - X_*\| &\leq \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A(Y_0 - X_*)^2\| \\ &\quad + \|L_{X_*}(Y_0 - X_*) - (2AX_* + B)(Y_0 - X_*)\|] \\ &< \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A\| \|Y_0 - X_*\|^2 + \gamma \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta}] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A\| \|Y_0 - X_*\| + \gamma \|Y_0 - X_*\|^\theta] \|Y_0 - X_*\| \\ &< 2\beta [\|A\| \epsilon_2 + \gamma \epsilon_2^\theta] \|Y_0 - X_*\| \\ &\leq 2\beta \left[ \frac{1}{8\beta} + \gamma \left( \frac{1}{8\beta \|A\|} \right)^\theta \right] \|Y_0 - X_*\| \leq 2\beta \left[ \frac{1}{8\beta} + \frac{1}{8\beta} \right] \|Y_0 - X_*\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|Y_0 - X_*\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Lo cual prueba que  $\|Y_1 - X_*\| < \epsilon_2$ .

Por otra parte, de (25) se tiene

$$\begin{aligned} \|Y_1 - X_*\| &\leq \|(2AY_0 + B)^{-1}\| [\|A\| \|Y_0 - X_*\|^{1-\theta} + \gamma] \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta} \\ &< 2\beta [\|A\| \epsilon_2^{1-\theta} + \gamma] \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta} \\ &< 2\beta \left[ \|A\| \left( \frac{1}{8\beta \|A\|} \right)^{1-\theta} + \frac{\|A\|^\theta}{(8\beta)^{1-\theta}} \right] \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta} \\ &\leq \frac{1}{2} (8\beta \|A\|)^\theta \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta} = \mu \|Y_0 - X_*\|^{1+\theta}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $\mu = \frac{1}{2} (8\beta \|A\|)^\theta > 0$ .

- b) *Hipótesis inductivas*: Supongamos que (13) y (14) se satisfacen para todo  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ . De lo cual se tiene que

$$2AY_{i-1} + B \text{ es no singular}, \quad (28)$$

$$Y_i \text{ está bien definida}, \quad (29)$$

$$\|Y_i - X_*\| < \frac{2}{3} \|Y_{i-1} - X_*\|. \quad (30)$$

Además, de (21) tenemos

$$\|Y_i - X_*\| < \left( \frac{2}{3} \right)^i \|Y_0 - X_*\| < \epsilon_2. \quad (31)$$

- c) *Paso de inducción*: Probemos que (13) y (14) se cumplen para  $k = i$ .

Por (31), se tiene que  $\|Y_i - X_*\| < \epsilon_2$ ; usando el Lema 3.1, se tiene que la matriz  $2AY_i + B$  es no singular con  $\|(2AY_i + B)^{-1}\| \leq 2\beta$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta (29) y mediante un proceso análogo al utilizado para acotar  $\|Y_1 - X_*\|$ , se demuestra que

$$\|Y_{i+1} - X_*\| < \frac{1}{2} \|Y_i - X_*\|, \quad (32)$$

$$\|Y_{i+1} - X_*\| < \mu \|Y_i - X_*\|^{1+\theta}, \quad (33)$$

donde  $\mu = \frac{1}{2}(8\beta \|A\|)^\theta$ .

Con lo cual se completa la demostración.  $\square$

En general, el Teorema 3.2 garantiza la convergencia de la iteración (9) a un solvente  $X_*$  de la ecuación (1) para problemas en los cuales  $\theta \in [0, 1]$ ; en particular, si  $\theta = 0$  tenemos convergencia lineal; para  $\theta \in (0, 1)$ , convergencia superlineal; y si  $\theta = 1$ , la convergencia es cuadrática.

Antes de finalizar esta sección presentamos un resultado que garantiza que la iteraciones (7) y (9) son iguales bajo ciertas hipótesis de conmutatividad.

**Lema 3.3.** *Consideremos las iteraciones (7) y (9). Supongamos que la matriz inicial  $X_0 = Y_0$  conmuta con  $A$ ,  $B$  y  $C$ ; que las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  conmutan entre sí y que la iteración de Newton (7) está bien definida. Entonces la matriz  $X_k$  conmuta con  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y  $X_k = Y_k$  para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$*

*Demostración.* Probaremos por inducción en forma conjunta que

$$AX_k = X_k A, \quad BX_k = X_k B \quad \text{y} \quad CX_k = X_k C, \quad (34)$$

$$X_k = Y_k, \quad (35)$$

para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$

a) Para  $k = 0$ , (34) y (35) son inmediatas por hipótesis.

b) *Hipótesis inductivas:* Supongamos que (34) y (35) se satisfacen para  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ . Lo cual implica que las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  también conmutan con  $(2AX_k + B) = (2AY_k + B)$  y por tanto, conmutan con  $(2AX_k + B)^{-1}$ ; además, se tiene que  $X_k(2AX_k + B) = (2AX_k + B)X_k$ . Por tanto,

$$X_k(2AX_k + B)^{-1} = (2AX_k + B)^{-1}X_k. \quad (36)$$

Definimos para  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ ,

$$F_k = -(2AX_k + B)^{-1}(AX_k^2 + BX_k + C). \quad (37)$$

Usando (36), tenemos

$$\begin{aligned} AF_k X_k &= -A(2AX_k + B)^{-1}(AX_k^2 + BX_k + C)X_k \\ &= -A(2AX_k + B)^{-1}(AX_k^3 + BX_k^2 + CX_k) \\ &= -A(2AX_k + B)^{-1}X_k(AX_k^2 + BX_k + C) \\ &= -AX_k(2AX_k + B)^{-1}(AX_k^2 + BX_k + C) \\ &= AX_k F_k. \end{aligned} \quad (38)$$

Probemos ahora que  $L_{X_k}(F_k) = L_{X_k}(S_k)$ . En efecto, de (38) tenemos que

$$\begin{aligned} L_{X_k}(F_k) &= AF_kX_k + (AX_k + B)F_k = AF_kX_k + AX_kF_k + BF_k \\ &= 2AX_kF_k + BF_k = (2AX_k + B)F_k \\ &= -(2AX_k + B)(2AX_k + B)^{-1}(AX_k^2 + BX_k + C) \\ &= -(AX_k^2 + BX_k + C) = -Q(X_k). \end{aligned} \quad (39)$$

Luego  $F_k$  es solución de (7); por lo tanto  $F_k = S_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ .

c) *Paso de inducción:* Probemos que (34) y (35) se cumplen para  $k = i$ .

Actualizando el paso de Newton en (7), tenemos:

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i-1} + F_{i-1} = X_{i-1} - (2AX_{i-1} + B)^{-1}(AX_{i-1}^2 + BX_{i-1} + C) \\ &= (2AX_{i-1} + B)^{-1} [(2AX_{i-1} + B)X_{i-1} - AX_{i-1}^2 - BX_{i-1} - C] \\ &= (2AX_{i-1} + B)^{-1} [2AX_{i-1}^2 + BX_{i-1} - AX_{i-1}^2 - BX_{i-1} - C] \\ &= (2AX_{i-1} + B)^{-1} [AX_{i-1}^2 - C] = Y_i, \end{aligned} \quad (40)$$

lo cual demuestra (35). Veamos ahora que (34) se cumple para  $k = i$ . Usando (40) tenemos

$$\begin{aligned} AX_i &= A(2AX_{i-1} + B)^{-1}(AX_{i-1}^2 - C) = (2AX_{i-1} + B)^{-1}A(AX_{i-1}^2 - C) \\ &= (2AX_{i-1} + B)^{-1}(AX_{i-1}^2 - C)A = X_iA. \end{aligned}$$

Así,  $X_i$  conmuta con  $A$ , y de forma análoga se prueba que  $BX_i = X_iB$  y  $CX_i = X_iC$ .

Con lo cual se completa la demostración.  $\square$

**Observación:** para una matriz inicial  $Y_0$  que satisfaga las hipótesis del Lema 3.3 y que se encuentre en la región de convergencia dada por el Teorema 3.2, tendríamos que la sucesión generada por (9) converge cuadráticamente a un solvente de  $X_*$ . En este caso,  $L_{X_*}(S) = (2AX_* + B)S$ , y la hipótesis **H4** se cumple para  $\theta = 1$ .

#### 4. Experimentos numéricos

En esta sección analizamos numéricamente el comportamiento local del método cuasi-Newton propuesto en (9). Para ello, consideramos dos ecuaciones matriciales y dos problemas de aplicación; uno de estos es un *sistema masa-resorte amortiguador* [16], [24], y el otro es un *problema de ruido de Wiener-Hopf* [1], [13].

Escribimos los códigos del algoritmo y de las funciones que definen los problemas en MATLAB<sup>®</sup> y realizamos los experimentos numéricos en un computador Intel (R) Core (TM) i5-3450 de 2,8 GHz.

Las matrices iniciales son de la forma  $X_0 = 10^p I_n$ , donde  $p \in \mathbb{Z}$  y  $I_n$  denota la matriz identidad de orden  $n$ . El criterio de parada es el sugerido en [16], [27], [32]. Usamos

$$Res(X_k) = \frac{\|Q(X_k)\|_F}{\|A\|_F \|X_k\|_F^2 + \|B\|_F \|X_k\|_F + \|C\|_F}, \quad (41)$$

y declaramos convergencia si  $Res(X_k) < n * eps$ , donde  $eps$  denota el épsilon de la máquina, que en nuestro caso, corresponde a  $eps = 2,22044604925031 \times 10^{-16}$  [16] y  $n$  el orden de las matrices en la ecuación (1). Declaramos divergencia si el número de iteraciones es mayor que 200.

Con el propósito de comparar el desempeño de nuestra propuesta algorítmica, implementamos también los métodos *secante* y *Newton-Schur*; El primero, un método *cuasi-Newton* que usa una aproximación secante a la matriz  $L(X, S)$  [24], [25], [27]; el segundo, usa el *algoritmo de Schur* para encontrar  $S_k$  en (7) [7], [16], que consiste en calcular la descomposición *generalizada de Schur* de las matrices  $A$  y  $AX + B$  [11].

Los resultados obtenidos los presentamos en 4 tablas. Para los problemas, cada tabla tiene cuatro columnas con la siguiente información: la primera columna indica la matriz inicial utilizada ( $X_0$ ); la segunda columna indica el número de iteraciones ( $N$ ); la tercera columna hace referencia al valor de  $Res$  definido por (41) ( $Res$ ), y la cuarta columna indica el tiempo de ejecución medido en segundos (*tiempo*); para medir el tiempo y quitar el efecto aleatorio de los computadores multitareas, realizamos el promedio de repetir 100 veces el algoritmo con la misma matriz inicial.

Además, al finalizar esta sección, presentamos una tabla que contiene los resultados de un experimento teórico y numérico donde, para cada problema considerado, primero encontramos el valor del parámetro  $\theta$  para determinar el tipo de convergencia teórica (Teorema 3.2) y, segundo, determinamos la convergencia numérica haciendo el análisis de error respectivo.

**Problema 1.** Calcular un solvente de  $Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso las matrices  $A, B$  y  $C$  conmutan entre sí. Un solvente de la ecuación es

$$X_* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

En el Cuadro 1 presentamos los resultados obtenidos al aplicar los tres algoritmos al Problema 1.

<i>Método cuasi-Newton propuesto</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-2}I_2$	7	2,57074828832357e-017	0,000509
$10^{-4}I_2$	7	6,60437193294431e-017	0,000444
$10^{-5}I_2$	7	5,63222730873046e-017	0,000448
$10^{-10}I_2$	7	0	0,000483
$10^{-15}I_2$	7	5,14149657664714e-017	0,000645
$10^{-20}I_2$	7	0	0,000352
<i>Método de Newton-Schur</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-2}I_2$	41	1,69980707267349e-015	0,006028
$10^{-4}I_2$	35	2,03661033158416e-015	0,004995
$10^{-5}I_2$	33	7,90186303390576e-016	0,004934
$10^{-10}I_2$	19	8,22719784225286e-016	0,003160
$10^{-15}I_2$	6	7,49407299022261e-016	0,000784
$10^{-20}I_2$	3	2,22038849852706e-016	0,000608
<i>Método secante</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-2}I_2$	11	0	0,001350
$10^{-4}I_2$	11	5,14149657664714e-017	0,001951
$10^{-5}I_2$	11	2,57074828832357e-017	0,001562
$10^{-10}I_2$	11	1,14967358514655e-017	0,001690
$10^{-15}I_2$	11	1,14967358514655e-017	0,001557
$10^{-20}I_2$	11	0	0,002113

Cuadro 1: Resultados para el Problema 1.

Observemos que en todos los casos se obtiene convergencia al solvente  $X_*$ . Para este problema, el desempeño del *método cuasi-Newton propuesto* es mejor que el de *Newton-Schur* y el *método secante* en cuanto a número de iteraciones se refiere. Resaltamos que, además, el tiempo de ejecución de *método cuasi-Newton propuesto* es menor que el tiempo empleado por los otros métodos. En efecto, para este ejemplo, este es aproximadamente un 14 % del tiempo que usa el método de *Newton-Schur* y un 35 % del tiempo que usa el *método secante*.

**Problema 2** ([17]). Calcular un solvente de  $Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para este problema, las matrices  $A, B$  y  $C$  conmutan entre sí. La ecuación tiene dos solventes reales,

$$X_*^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_*^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos los presentamos en el Cuadro 2.

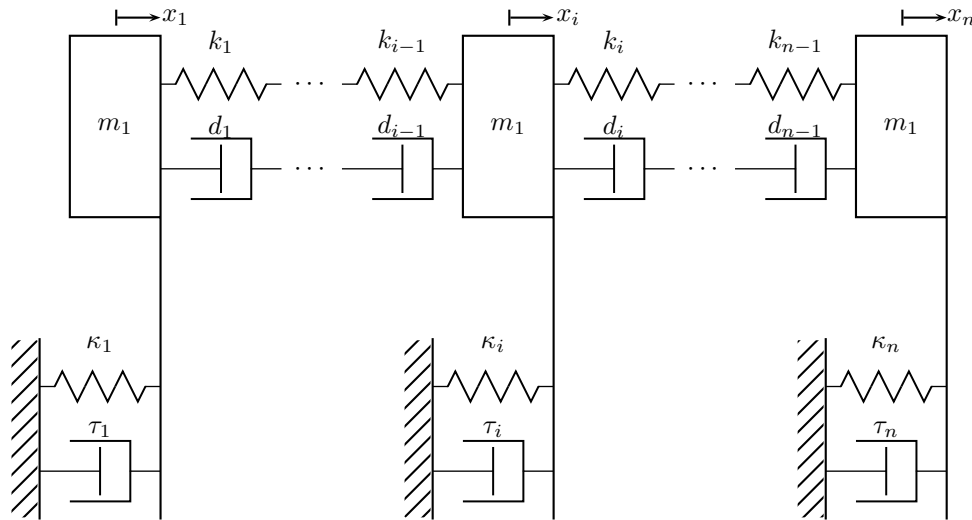
<i>Método cuasi-Newton propuesto</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_2$	9	0	0,000634
$10^{-2}I_2$	12	0	0,000917
$10^{-4}I_2$	19	0	0,001137
$10^{-5}I_2$	22	0	0,001515
$10^{-6}I_2$	26	0	0,001564
<i>Método de Newton-Schur</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_2$	8	3,5108334685767e-017	0,001404
$10^{-2}I_2$	8	3,84592537276713e-017	0,001175
$10^{-4}I_2$	8	4,44089209850063e-017	0,001412
$10^{-5}I_2$	8	4,44089209850063e-017	0,001649
$10^{-6}I_2$	8	2,22044604925031e-017	0,001518
<i>Método secante</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_2$	13	6,2803698347351e-017	0,002255
$10^{-2}I_2$	15	0	0,002880
$10^{-4}I_2$	15	2,71947991102104e-017	0,002172
$10^{-5}I_2$	15	0	0,002171
$10^{-6}I_2$	15	1,57009245868377e-017	0,001641

Cuadro 2: Resultados para el Problema 2.

En este ejemplo, cada uno de los métodos utilizados converge al solvente  $X_{*}^1$ . Observamos que, dependiendo del valor de la potencia de 10 en la matriz inicial, la convergencia se hace ligeramente más lenta en el *método cuasi-Newton propuesto* con respecto a los otros métodos en cuanto a número de iteraciones se refiere; pero resaltamos que el tiempo de ejecución del *método cuasi-Newton propuesto* es aproximadamente el 48 % del tiempo que usa el método de *Newton-Schur* y el 35 % del que usa el *método secante*.

En los dos problemas siguientes, las matrices  $B$  y  $C$  no conmutan; es decir, vamos a analizar el comportamiento del *método cuasi-Newton propuesto* para el cual no se cumple una de las hipótesis del Lema 3.3.

**Problema 3. Sistema masa-resorte amortiguador conectado** [16], [24], [27], [31].



**Figura 1.** Sistema masa-resorte amortiguador conectado.

En este problema se considera un *sistema masa-resorte amortiguador* [33], donde la masa  $i$ -ésima de peso  $m_i$  está conectada a su  $(i+1)$  vecino por un resorte y un amortiguador con constantes  $\kappa_i$  y  $d_i$ , respectivamente. La masa  $i$ -ésima también está conectada a tierra por un resorte y un amortiguador con constantes  $\kappa_i$  y  $\tau_i$ , respectivamente (ver Figura 1). La vibración de este sistema está descrita por una ecuación diferencial de segundo orden

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0,$$

donde  $A = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$  es la *matriz de las masas*,  $B = \text{tridiag}(-\tau_i, 3\tau_i, -\tau_i)$  es la *matriz de amortiguación* y  $C = \text{tridiag}(-\kappa_i, 3\kappa_i, -\kappa_i)$  es la *matriz de rigidez*, respectivamente.

En las pruebas numéricas, tomamos  $n = 10$ ,  $m_i = 1$ , para todo  $i$ , los *resortes* y los *amortiguadores* con un mismo valor constante; es decir,  $\kappa_i = \kappa = 5$  y  $\tau_i = \tau = 10$ , para todo  $i$ , excepto  $B(1,1) = B(n,n) = 2\tau = 20$ .

<i>Método cuasi-Newton propuesto</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_{10}$	8	6,01162776560417e-017	0,000869
$10^{-2}I_{10}$	9	1,1900844327981e-015	0,000965
$10^{-4}I_{10}$	9	1,15763568151991e-015	0,000874
$10^{-8}I_{10}$	9	1,15719882431618e-015	0,000937
$10^{-10}I_{10}$	9	1,15719891909909e-015	0,000947
<i>Método de Newton-Schur</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_{10}$	6	2,47165569954525e-017	0,003472
$10^{-2}I_{10}$	5	1,80436425295183e-015	0,002878
$10^{-4}I_{10}$	6	3,13323221652392e-017	0,003546
$10^{-8}I_{10}$	5	1,31401644418059e-015	0,002802
$10^{-10}I_{10}$	6	2,31236752049169e-017	0,003407
<i>Método secante</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$10^{-1}I_{10}$	nc	matriz singular	-
$10^{-2}I_{10}$	12	1,09115415620959e-016	0,002581
$10^{-4}I_{10}$	12	2,96191146017478e-015	0,002478
$10^{-8}I_{10}$	15	9,2448388308868e-016	0,002764
$10^{-10}I_{10}$	14	1,68473486378222e-015	0,002732

Cuadro 3: Resultados para el Problema 3.

En el Cuadro 3 presentamos los resultados obtenidos por los tres métodos. Observamos que, para las diferentes matrices iniciales, los métodos de *Newton-Schur* y el *cuasi-Newton propuesto* convergen en todos los casos considerados; el *método secante* converge para casi todas las matrices iniciales, excepto para la matriz  $X_0 = 10^{-1}I_{10}$ . En este problema, el método de *Newton-Schur* tiene mejor desempeño en cuanto a número de iteraciones con respecto a los otros métodos. En cuanto al tiempo de ejecución, resaltamos que el *método cuasi-Newton propuesto* emplea aproximadamente el 38 % del tiempo que usa el *método secante* y el 28 % del tiempo que usa el método de *Newton-Schur*.



**Problema 4. Problemas de ruido Wiener-Hopf [1], [13].**

En el estudio de Cadenas de Márkov para *problemas de Ruido Wiener-Hopf*, necesitamos encontrar matrices  $Z_*$  que tengan elementos fuera de la diagonal principal no negativos, y que la suma de las componentes de sus filas sea menor o igual a cero, para una matriz diagonal  $V$  y un número positivo  $\epsilon$  dados que satisfacen

$$\frac{1}{2}\epsilon^2 Z^2 \mp VZ + Q = \mathbf{O}, \quad (42)$$

donde  $V$  tiene elementos positivos y negativos; el número  $\epsilon$  se conoce como el nivel de ruido del movimiento Browniano independiente de la cadena de Márkov [1], [13].

En la ecuación (42) se puede suponer que  $\epsilon = \sqrt{2}$ ; así, se pueden considerar dos ecuaciones cuadráticas matriciales

$$Z^2 - VZ + Q = \mathbf{O}, \quad (43)$$

$$Z^2 + VZ + Q = \mathbf{O}. \quad (44)$$

Como caso particular, consideramos la ecuación (44) con

$$V = \begin{bmatrix} aI_{10} & 0 \\ 0 & bI_{10} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & & \\ & & -1 & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 1 & \\ 1 & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix},$$

donde  $a = 1$  y  $b = -3$ . Las matrices  $V$  y  $Q$  se escogieron de orden 20.

A continuación, presentamos la tabla de resultados.

<i>Método cuasi-Newton propuesto</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$\mathbf{O}$	45	1,324485371079e-015	0,003713
$10^{-2}I_{10}$	45	1,35467661806983e-015	0,003885
$10^{-10}I_{10}$	45	1,324485371079e-015	0,003862
<i>Método secante</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$\mathbf{O}$	nc	—	—
$10^{-2}I_{10}$	nc	—	—
$10^{-10}I_{10}$	nc	—	—

<i>Método de Newton-Schur</i>			
$X_0$	$N$	$Res$	$tiempo$
$\mathbf{O}$	14	9,11880622078644e-016	0,006637
$10^{-2}\mathbf{I}_{10}$	15	1,59376163239596e-016	0,007007
$10^{-10}\mathbf{I}_{10}$	15	7,07023695066298e-016	0,006933

Cuadro 4: Problema 4.

En el Cuadro 4 se puede observar que los métodos *cuasi-Newton propuesto* y *Newton-Schur* en todos los casos convergen, a diferencia de *método secante*. El tiempo de ejecución que emplea el *método cuasi-Newton propuesto* es aproximadamente el 55% del tiempo que usa el método de *Newton-Schur*.

A continuación, presentamos un cuadro resumen que nos indica el orden de convergencia para los 4 problemas que hemos considerado.

<i>Problema</i>	<i>Valor de <math>\theta</math> en H4</i>	<i>Tipo de convergencia</i>	
		<i>Teórica</i>	<i>Númerica</i>
1	1	Cuadrática	Cuadrática
2	1	Cuadrática	Cuadrática
3	0,04	Superlineal	Superlineal
4	0	Lineal	Lineal

Cuadro 5: Análisis teórico y numérico de convergencia.

El Cuadro 5 contiene 4 columnas con la siguiente información: la primera columna (*Problema*) indica el número del problema considerado; la segunda (Valor de  $\theta$  en **H4**) contiene, para cada problema, el valor de la constante  $\theta$  mencionada en la hipótesis **H4**; en la tercera y cuarta columnas se presenta la tasa de convergencia, tanto teórica como numérica, del algoritmo propuesto de acuerdo con el valor de  $\theta$  (Teorema 3.2) y el análisis de los errores, respectivamente.

Observamos que, para los Problemas 1 y 2, el método propuesto tiene convergencia cuadrática. Vale la pena mencionar que para estos problemas, la matriz inicial  $Y_0$  conmuta con  $A$ ,  $B$  y  $C$  y estas matrices conmutan entre sí, lo cual teóricamente también conduce a convergencia cuadrática. En los Problemas 3 y 4 no se cumple la hipótesis de conmutatividad del Lema 3.3; numéricamente la convergencia alcanzada es superlineal para el Problema 3 y lineal para el Problema 4.

## 5. Comentarios finales

La ecuación cuadrática matricial  $Q(X) = AX^2 + BX + C = \mathbf{O}$  aparece en numerosos contextos de la ciencia y de la ingeniería. Este gran número de aplicaciones ha motivado

el desarrollo, entre otros, de métodos tipo Newton para encontrar una solución numérica de la *ecuación cuadrática matricial*.

En este trabajo proponemos un algoritmo cuasi-Newton, obtenido como una *iteración de Newton simplificada*, para resolver la ecuación cuadrática matricial, el cual reduce el alto costo computacional del método *Newton-Schur*, tradicionalmente usado para resolver dicha ecuación. Además, bajo ciertas hipótesis demostramos que el algoritmo propuesto es local y hasta cuadráticamente convergente.

Para contribuir con la exploración numérica del *método cuasi-Newton propuesto*, analizamos y comparamos su desempeño numérico con los métodos de *Newton-Schur* y *secante*, usando dos ecuaciones matriciales y dos problemas de aplicación. En ella, el método propuesto muestra un buen desempeño numérico y además una disminución en cuanto al tiempo de ejecución comparado con los dos métodos mencionados. Adicionalmente, se comprueban numéricamente los resultados obtenidos sobre la tasa de convergencia dada por el Teorema 3.2 en términos del valor de  $\theta$  involucrado en la hipótesis **H4**.

Finalmente, en búsqueda de ampliar el espectro de trabajo con respecto a la ecuación cuadrática matricial, pensamos que vale la pena globalizar el algoritmo y hacer el correspondiente estudio teórico del algoritmo globalizado.

## Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad del Cauca por el tiempo concedido para esta investigación, mediante el Proyecto de investigación titulado Optimización en Aplicaciones Fase II, VRI ID 4189, y a nuestro colega Favián Arenas por el tiempo brindado para discutir aspectos numéricos de nuestro trabajo.

## Referencias

- [1] Bai Z-Z., Guo X-X and Yin J-F., “On two iteration methods for the quadratic matrix equations”, *Inter. J. Numer. Anal. Model.* 2 (2005), suppl., 144–122.
- [2] Berhanu M., “The polynomial eigenvalue problem”, Thesis (Ph.D.), University of Manchester, 2005, 219 p.
- [3] Bermúdez A., Durán R.G., Rodríguez R. and Solomin J., “Finite element analysis of a quadratic eigenvalue problem arising in dissipative acoustics”, *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), No. 1, 267–291.
- [4] Butler G.J., Johnson C.R. and Wolkowicz H., “Nonnegative solutions of a quadratic matrix equation arising from comparison theorems in ordinary differential equations”, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6 (1985), No. 1, 47–53.
- [5] Clark J.V., Zhou N. and Pister K.S.J., “Modified nodal analysis for MEMS with multi-energy domains”, International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators, San Diego, CA, March, 2000.
- [6] Dávila C.E., “A subspace approach to estimation of autoregressive parameters from noisy measurements”, *IEEE Trans. Signal Process.* 46 (1998), No. 2, 531–534.

- [7] Davis G.J., "Numerical solution of a quadratic matrix equation", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 2 (1981), No. 2, 164–175.
- [8] Dennis J.E., Jr., and Schnabel R.B., *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [9] Dennis J.E., Jr., Traub J.F. and Weber R.P., "The algebraic theory of matrix polynomials", *SIAM J. Numer. Anal.* 13 (1976), No. 6, 831–845.
- [10] Gao Y-H., "Newton's method for the quadratic matrix equation", *Appl. Math. Comput.* 182 (2006), No. 2, 1772–1779.
- [11] Golub G.H. and Van Loan C.F., *Matrix computations*, Third ed. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [12] Golub G.H., Nash S. and Van Loan C.F., "A Hessenberg-Schur method for the problem  $AX+XB=C$ ", *IEEE Trans. Automat. Control.* 24 (1979), No. 6, 909–913.
- [13] Guo C-H., "On a quadratic matrix equation associated with an M-matrix", *IMA J. Numer. Anal.* 23 (2003), No. 1, 11–27.
- [14] Higham N.J., *Functions of matrices. Theory and computations*, SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [15] Higham N.J., "Stable iterations for the matrix square root", *Numer. Algorithms* 15 (1997), No. 2, 227–242.
- [16] Higham N.J. and Kim H-M., "Numerical analysis of a quadratic matrix equation", *IMA J. Numer. Anal.* 20 (2000), No. 4, 499–519.
- [17] Higham N.J. and Kim H-M., "Solving a quadratic matrix equation by Newton's method with exact line searches", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 23 (2001), No. 2, 303–316.
- [18] Horn R.A. and Johnson C.R., *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [19] Kay S.M., "Noise compensation for autoregressive spectral estimates", *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* ASSP-28 (1980), No. 3, 292–303.
- [20] Lancaster P. *Lambda-matrices and vibrating systems*, Pergamon Press, Oxford-New York-Paris, 1966.
- [21] Laub A.J., "Efficient multivariable frequency response computations", 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 39–41, December, 1980.
- [22] Liu L-D., "Perturbation analysis of a quadratic matrix equation associated with an M-matrix", *J. Comput. Appl. Math.* 260 (2014), 410–419.
- [23] Liu L-D. and Lu X., "Two kinds of condition numbers for the quadratic matrix equation", *Appl. Math. Comput.* 219 (2013), No. 16, 8759–8769.
- [24] Macías E.M., "Métodos secantes de cambio mínimo para el cálculo de ceros de funciones de matrices", Tesis de maestría, Universidad del Cauca, 2013.
- [25] Macías M., Martínez H.J. and Pérez R., "Sobre la convergencia de un método secante para ecuaciones matriciales no lineales", *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), No. 2, 181–197.

- [26] Monsalve M. and Raydan M., “A secant method for nonlinear matrix problems”, in *Numerical linear algebra in signals, systems and control*, Springer (2011), 387–402.
- [27] Monsalve M. and Raydan M., “Newton’s method and secant methods: a longstanding relationship from vectors to matrices”, *Port. Math.* 68 (2011), No. 4, 431–475.
- [28] Reddy S.C., Schmid P.J. and Henningson D.S., “Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator”, *SIAM J. Appl. Math.* 53 (1993), No. 1, 15–47.
- [29] Seo S-H., Seo J-H. and Kim H-M , “Newton’s method for solving a quadratic matrix equation with special coefficient matrices”, *Honam Math. J.* 35 (2013), No. 3, 417–433.
- [30] Smith H.A., Singh R.K. and Sorensen D.C., “Formulation and solution of the non-linear, damped eigenvalue problem for skeletal systems”, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 38 (1995), No. 18, 3071–3085.
- [31] Tisseur F., “Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems”, *Linear Algebra Appl.* 309 (2000), No. 1-3, 339–361.
- [32] Tisseur F. and Meerbergen K., “The quadratic eigenvalue problem”, *SIAM Rev.* 43 (2001), No. 2, 235–286.
- [33] Thomson W.T., *Theory of vibration with applications*, Fourth ed., CRC Press, 1996.
- [34] Watkins D.S., *Fundamentals of matrix computations*. Second ed, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 2002.
- [35] Xu H.G. and Lu L.Z., “Properties of a quadratic matrix equation and the solution of the continuous-time algebraic Riccati equation”, *Linear Algebra Appl.* 222 (1995), 127–145.
- [36] Zhou N., Clark J.V. and Pister K.S.J., “Nodal simulation for MEMS design using SUGAR v0.5”, International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators, Santa Clara, CA, 308–313, 1988.