



Ingeniería Energética

E-ISSN: 1815-5901

[orestes@cipel.ispjae.edu.cu](mailto:orestes@cipel.ispjae.edu.cu)

Instituto Superior Politécnico José Antonio

Echeverría

Cuba

Regalón Anias, Orlando; Rodríguez Diez, Vladímir; Diez Rodríguez, Milagros; Báez Prieto, Raúl  
Aplicación de algoritmos de control clásico, adaptable y robusto a sistemas dinámicos de parámetros  
variables

Ingeniería Energética, vol. XXXIII, núm. 3, septiembre-diciembre, 2012, pp. 184-195

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría

La Habana, Cuba

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=329127751002>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en [redalyc.org](http://redalyc.org)

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto



## TRABAJO TEÓRICO EXPERIMENTAL

### Aplicación de algoritmos de control clásico, adaptable y robusto a sistemas dinámicos de parámetros variables

***Classic, adaptable and robust control algorithm application, to variant parameter dynamic system***

Orlando – Regalón Anias  
Vladímir – Rodríguez Diez

Milagros – Diez Rodríguez  
Raúl – Báez Prieto

Recibido: Febrero del 2012

Aprobado: Julio del 2012

#### Resumen/ Abstract

Existen múltiples sistemas dinámicos cuyos modelos matemáticos se caracterizan por ser de primer orden y parámetros variables con el tiempo. En estos casos las herramientas clásicas no siempre logran un sistema de control que sea estable, posea un buen desempeño dinámico y rechace adecuadamente las perturbaciones, cuando el modelo de la planta se desvía del nominal, para el cual se realizó el diseño. En este trabajo se evalúa el comportamiento de tres estrategias de control en presencia de variación de parámetros. Estas son: control clásico, control adaptable y control robusto. Se realiza un estudio comparativo de las mismas en cuanto a complejidad del diseño, costo computacional de la implementación y sensibilidad ante variaciones en los parámetros y/o presencia de disturbios. Se llega a conclusiones que permiten disponer de criterios para la elección más adecuada, en dependencia de los requerimientos dinámicos que la aplicación demande, así como de los medios técnicos de que se disponga.

**Palabras clave:** control adaptable, control robusto, identificación de sistemas.

*Many dynamic systems have first order mathematic models, with time variable parameters. In these cases, the classical tools do not satisfy at all control system stability, good performance and perturbation rejection, when the plant model differs from the nominal one, for which the controller was designed. In this article, three control strategies are evaluated in parameter variations and disturbance presence. The strategies are the followings: classical control, adaptive control and robust control. A comparative study is carried out, taking into account the design complexity, the computational cost and the sensitivity. The obtained conclusions helps to provide the criterion to choose the most adequate control strategy, according to the necessary dynamic, as well as the available technical means.*

**Keywords:** adaptable control, robust control, system identification.

#### INTRODUCCIÓN

Una gran parte de los sistemas de control son diseñados a partir de un modelo dinámico de la planta a controlar, teniendo en cuenta las características de esta en condiciones nominales; sin embargo en la práctica los sistemas tienen un comportamiento no lineal lo que hace que dicho modelo sea solo válido alrededor de un punto de operación. Además, al cambiar las condiciones bajo las cuales se obtuvo el modelo, los parámetros de las ecuaciones diferenciales que describen el mismo cambian, lo que hace que el proceso se comporte como un sistema de parámetros variables con el tiempo. Tal es el caso de las articulaciones de robots industriales, los accionamientos asincrónicos que emplean la técnica de control vectorial, así como los procesos de fermentación y secado que ocurren en la industria biotecnológica.

Cuando el objeto de control no presenta variación con el tiempo o alinealidades, las herramientas matemáticas que brinda la teoría de control clásico se bastan para lograr un diseño del sistema de control, que garantice estabilidad en lazo cerrado y buenos índices de desempeño en estado transitorio [1]. Si por el contrario, la planta a controlar fuese no lineal o de dinámica variable, como es el caso de un fermentador discontinuo, entonces con un controlador clásico (P, PI, PID) se logra un desempeño dinámico muy malo, entendiendo por mal desempeño cuando los indicadores de su comportamiento temporal se desvían de las especificaciones de diseño. Aún cuando la planta es lineal e invariante con el tiempo, caso que logra ser gobernada con éxito por controladores clásicos, se pueden evaluar otras estrategias de control si se desea mejorar la razón de rechazo a perturbaciones externas. Un ejemplo de ello es el control de posición de la antena de un radar que esté expuesta a frecuentes perturbaciones provocadas por el viento.

En casos en que la teoría de control clásico no resuelve totalmente los problemas de desempeño dinámico se han aplicado, entre otras técnicas, las de control adaptable y control robusto.

## DESARROLLO

Inicialmente se analizará el objeto de control para seguidamente evaluar la aplicación de cada una de las estrategias de control propuestas.

### El objeto de control

Para expresar la idea de aproximación de un modelo de orden superior a un modelo más sencillo, se ejemplificará a través del control de velocidad de un motor de corriente directa con excitación independiente, el cual cuenta con un modelo muy sencillo y bien conocido [2].

La velocidad de un motor de corriente directa con excitación independiente puede ser controlada manteniendo constante el flujo y variando el voltaje aplicado a la armadura. Para variar este voltaje es común utilizar un convertidor CA-CD controlado o semicontrolado. El modelo matemático del sistema convertidor-motor-carga está determinado por la siguiente ecuación (1),[3].

$$\frac{W(s)}{E_m(s)} = \frac{K_c}{T_c s + I} \frac{K_\phi}{L_a J s^2 + (L_a f + R_a J) s + R_a f + K K_b} \quad (1)$$

donde:

- $W$  : velocidad del motor
- $E_m$  : voltaje de mando del convertidor AC-DC
- $K_c$  : ganancia del convertidor AC-DC
- $T_c$  : constante de tiempo del convertidor AC-DC
- $K_\phi$  : constante de par del motor
- $K_b$  : constante de fuerza contraelectromotriz del motor
- $L_a$  : inductancia de armadura
- $R_a$  : resistencia de armadura del motor
- $J$  : inercia del conjunto motor-carga
- $f$  : fricción del conjunto motor-carga

Se puede apreciar que el modelo dinámico que describe a esta planta es de tercer orden. En la práctica sucede que  $T_c$  y  $L_a$  son muy pequeñas, lo que permite aproximar este modelo a uno de primer orden, el que de forma general puede ser expresado en la ecuación (2):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + I} \quad (2)$$

donde:

- $C$  : señal de salida (en este caso velocidad del motor)
- $R$  : señal de entrada (en este caso voltaje de mando del convertidor AC-DC)
- $K$  : ganancia del sistema (en este caso del conjunto convertidor-motor-carga)
- $T$  : constante de tiempo del sistema (en este caso también se refiere a dicho conjunto)

De forma similar puede ser tratado el modelo matemático de la articulación de un robot. También se conoce que el modelo matemático de un motor asincrónico de corriente alterna, controlado por campo orientado, se puede considerar según el modelo descrito por la ecuación (2), [4]. Por otro lado, los procesos de fermentación y secado

para la fabricación de productos biotecnológicos, al ser linealizados se comportan como modelos PORT (primer orden con retardo de transporte) [5]. En muchas ocasiones se tiene que el retardo de transporte es muy pequeño en comparación con la constante de tiempo y se puede despreciar, obteniendo un modelo resultante aproximado de primer orden como el descrito en ecuación (2).

En los ejemplos mencionados anteriormente la aproximación es válida si se considera que los parámetros del modelo permanecen constantes y no varían con el tiempo; pero esto sucede ya sea por el cambio en la carga que manipula el robot, por las características intrínsecas del control por campo orientado o por la naturaleza no lineal de los procesos biotecnológicos.

Por lo antes expuesto se investigará cómo se comportan las estrategias de control clásica, adaptable y robusta, ante una planta de primer orden con parámetros variables.

El sistema de control bajo estudio puede ser representado de la forma expuesta en la figura 1.

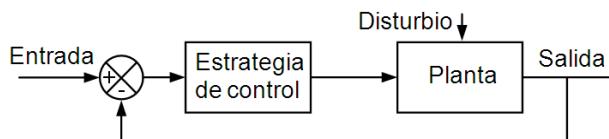


Fig. 1. Diagrama de bloques del sistema bajo estudio.

Para comparar el desempeño del sistema de control se trabajará con un modelo nominal de la planta con ganancia unitaria y constante de tiempo igual a 0.2 segundos, es decir:

$$G_p(s) = \frac{1}{0.2s + 1} = \frac{5}{s + 5} \quad (3)$$

Y para realizar un estudio de la sensibilidad de este sistema de control ante variaciones de los parámetros, así como ante la presencia de disturbios, se escogen los siguientes modelos con parámetros alterados:

$$G_1(s) = \frac{3}{0.6s + 1} \quad \text{Parámetros por 3} \quad (4)$$

$$G_2(s) = \frac{0.33}{0.066s + 1} \quad \text{Parámetros por 1/3} \quad (5)$$

La elección de este rango está acorde a lo planteado en [5]. Aquí se considera este intervalo de variación de parámetros como el caso más crítico para procesos fermentativos; estos a su vez son los que presentan mayores alinealidades de las plantas de interés mencionadas en la introducción. Teniendo en cuenta que el diseño del sistema de control se hace para el caso nominal, los casos de peor desempeño se tendrán en los extremos del intervalo de variación de parámetros.

## Control clásico

En este tipo de control se emplean algoritmos con estructura sencilla como redes de atraso-adelanto o reguladores de tipo proporcional-integral-derivativo (PID) [3]. Por su parte el diseño está basado fundamentalmente en métodos frecuenciales, donde son muy utilizados los diagramas de Bode.

Las especificaciones de diseño dependen en lo fundamental de la aplicación en sí; para este trabajo se ha elegido realizar un diseño de forma tal que el sistema resultante posea un margen de fase  $\gamma=60^\circ$  y una frecuencia de cruce  $\omega_c=1 \text{ rad/s}$ . El controlador que se propone emplear es de tipo PI, cuya función transferencial es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{K_c(T_I s + 1)}{T_I s} \quad (6)$$

Este, a decir de la literatura, es muy recomendado para este tipo de plantas, ya que la acción integral logra una respuesta al paso, en lazo cerrado, con cero error de seguimiento, aspecto este muy deseable en la inmensa mayoría de los sistemas de control [3, 6]. El empleo de controladores con acción derivativa no siempre es recomendable, debido a la alta influencia del ruido que puede acompañar las mediciones.

Los métodos de diseño para calcular los parámetros del controlador escogido pueden ser múltiples, por ejemplo módulo óptimo, métodos analíticos, etc. [4, 7]. En este trabajo se emplea la técnica de síntesis en el dominio de la frecuencia, donde la ganancia y el cero del regulador se modifican iterativamente hasta cumplir las especificaciones de diseño [3]. Con ella se llegó al siguiente resultado:

$$G_c(s) = \frac{7.07(0.05s + 1)}{s}$$

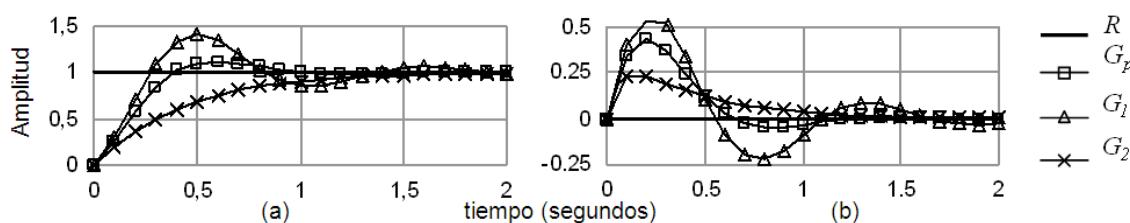
de aquí, teniendo en cuenta la función transferencia de un regulador PI dada por (6), se tiene que:

$$T_I = 0.05 \quad \text{y} \quad K_c/T_I = 7.07 \quad \therefore K_c = 0.354$$

La respuesta al paso del sistema de control a lazo cerrado, empleando el modelo nominal de la planta, se comporta con cero error de seguimiento, sobrepaso del 12%, dada por el margen de fase escogido, y tiempo de establecimiento de 0.93 segundos, el cual queda determinado por el ancho de banda que fue seleccionado.

Nótese la relativa facilidad con que el método de diseño garantiza las especificaciones de lazo abierto, no así las de lazo cerrado las que son determinadas de forma indirecta, aspecto que caracteriza a la teoría de control clásica.

En la figura 2(a,b), se muestra el estudio de sensibilidad de la estrategia de control clásica diseñada, ante la variación de parámetros definida por las plantas  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ .



**Fig. 2. Respuesta de los modelos  $G_p(s)$ ,  $G_l(s)$  y  $G_2(s)$  con estrategia de control clásico:**  
**(a) – ante un paso escalón en la referencia. (b) – ante un paso escalón en el disturbio.**

Obsérvese el deterioro que sufre la respuesta del sistema, la que en un caso crítico pudiese perder la estabilidad. Se nota como a medida que los parámetros aumentan el sistema se vuelve más oscilatorio, debido a que el margen de fase disminuye, y viceversa.

Si se requieren altas prestaciones dinámicas, el control clásico con reguladores de estructura sencilla y parámetros fijos, no resuelve del todo el problema de control de esta planta variable con el tiempo. Este problema dio pie a innumerables investigaciones producto de las cuales se han aplicado a esta planta múltiples esquemas de control, a decir de la literatura: control con aprendizaje, control neuronal, control borroso, etc. [8]. Estas variantes de control inteligente tienen la dificultad de que para su implementación, es indispensable disponer de potentes medios de cálculo, lo que encarece el sistema de control.

Otras variantes más sencillas desde el punto de vista de su implementación también han sido estudiadas, como son los casos de control adaptable y control robusto, las cuales se analizan a continuación.

### Control adaptable

Un regulador adaptable posee la cualidad de modificar su operación, en respuesta a cambios en la dinámica del proceso o la presencia de disturbios. Existen varias técnicas que posibilitan esta característica entre las que se encuentran: la sintonía propia, el inventario de ganancia y la basada en modelo de referencia. Particularmente esta última, es decir, los sistemas de control adaptables con modelo de referencia (S.C.A.M.R.), son de amplio uso para estabilizar las características dinámicas de un sistema de control realimentado ante la variación de parámetros [3, 9].

El modelo de referencia es el encargado de especificar la respuesta deseada que ha de tener el sistema ajustable. De acuerdo al comportamiento de las entradas y los estados de este se conforma el índice de desempeño, quedando para el mecanismo de adaptación la tarea de minimizar un funcional de la diferencia entre la salida (o los estados del sistema ajustable) y los correspondientes al modelo de referencia. Para dar solución a esta problemática el mecanismo de adaptación modifica los parámetros del sistema ajustable y/o genera una señal de entrada auxiliar.

Métodos basados en la variación de parámetros del controlador son reportados por [9]. Tienen la dificultad que requieren resolver un gran número de ecuaciones diferenciales (o de diferencia). Esto hace que la adaptación de parámetros sea muy costosa computacionalmente y por tanto, poco factible. Por el contrario las variantes que emplean síntesis de señal auxiliar de entrada resultan generalmente en sistemas casi tan sencillos como los mismos reguladores.

A continuación se realiza un estudio de la estrategia de control adaptable reportada en [6]. Esta variante posee la cualidad de que sólo es necesaria la medición de una variable de estado para construir la ley de control realimentada, lo que la hace muy simple y poco costosa de implementar [2].

Sea la planta y el modelo de referencia elegido, tales que estén descritos por:

$$\bullet \quad x_p = A_p x_p + B_p u_p \quad y_p = C_p x_p \quad (7)$$

$$\bullet \quad x_m = A_m x_m + B_m u_m \quad y_m = C_m x_m \quad (8)$$

donde una elección adecuada del modelo de referencia sería tal que  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_p \in \mathbb{R}^p$ ,  $u_m \in \mathbb{R}^p$ ,  $y_p \in \mathbb{R}^q$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^q$

La entrada de control se propone como:

$$u_p = K_x x_m + K_u x_u + K_e e_0 \quad (9)$$

donde  $e_0$  es el error de salida, el cual es descrito por:

$$e_0 = y_m - y_p = C_p (x_m - x_p) = C_p e \quad (10)$$

Los vectores de ganancia se proponen como:

$$K_x = K_{xo}, \quad K_u = K_{u0}, \quad K_e = K_{e0} + \Delta K_e(v, t) \quad (11)$$

$$v = D e_0 = D C_p e \quad (12)$$

donde  $D$  es una matriz de ganancia,  $K_{xo}$ ,  $K_{u0}$  y  $K_{e0}$  denotan las ganancias de la parte lineal del control de seguimiento y  $\Delta K_e(v, t)$  es la ganancia de adaptación aumentada para reducir el efecto de la variación de los parámetros. Para ganar en facilidad de implementación se propone una ley de adaptación del tipo PI:

$$\Delta K_e(v, t) = \int_0^t M_1 v (R_1 e_0)^T d\tau + M_2 v (R_2 e_0)^T + \Delta K_e(v(0), 0) \quad (13)$$

donde  $M_i$  y  $R_i$ ,  $i=1, 2$  son matrices de ponderación con dimensiones adecuadas.  $M_1$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son matrices definidas positivas y  $M_2$  es una matriz definida positiva o no negativa. En la figura 3, se muestra un diagrama de bloques del sistema hasta aquí descrito.

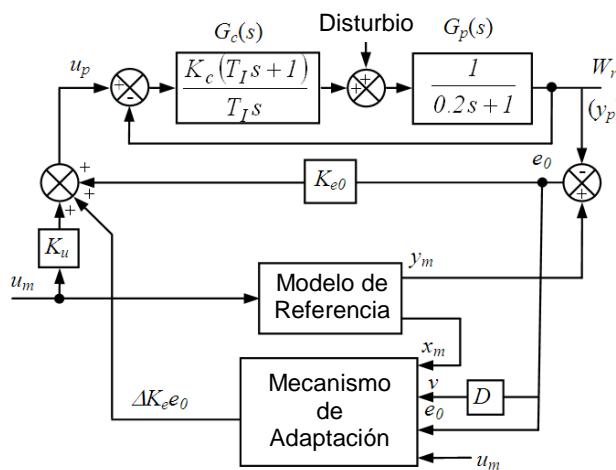


Fig. 3. Diagrama de bloques del S.C.A.M.R.

Despreciando el vector de ganancia de adaptación  $\Delta K_e(v, t)$  en (13), se puede demostrar que es posible encontrar el control de seguimiento de modelo perfecto eligiendo  $K_e$  tal que  $(A_p - B_p K_e C_p)$  sea una matriz de Hurwitz [9-10]. Además se debe hacer:

$$K_x = B_p^+ (A_m - A_p) \quad (14)$$

$$K_u = B_p^+ B_m \quad (15)$$

donde  $B_p^+ = (B_p^T B_p)^{-1} B_p^T$ , la que es conocida como pseudoinversa de la matriz  $B_p$ . Debido a las variaciones de las condiciones de operación, los verdaderos parámetros del sistema pueden diferir de los usados en el diseño del sistema adaptable, efecto que será contrarrestado a través de la ley de adaptación.

En este caso, un sistema realimentado equivalente para el sistema de control adaptable con modelo de referencia puede construirse de las ecuaciones (7) a la (15) como:

$$\dot{e} = (A_p - B_p K_e C_p) e + B_p \omega_l \quad (16)$$

$$v = D C_p e = D_c e \quad (17)$$

$$\omega = -\omega_l = f(v, t, \tau) = \{ K_x - B_p^+ (A_m - A_p) \} x_m + \{ K_u - B_p^+ B_m \} u_m + \Delta K_e (v, t) e_0 \quad (18)$$

donde (16) y (17) son bloques lineales de control de adelanto, y (18) denota realimentación variable con el tiempo y no lineal. La estabilidad de este sistema se estudia usando el teorema de Popov [6].

Obsérvese que debido a la parte integral que inherentemente existe en el mecanismo de adaptación de (13), se puede contrarrestar el efecto de cualquier disturbio que aparezca.

El modelo de referencia que se propone emplear es tal que se iguale a la función transferencial de la planta con el controlador PI calculado, o sea:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1m} \\ \dot{x}_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.77 & -35.4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_m$$

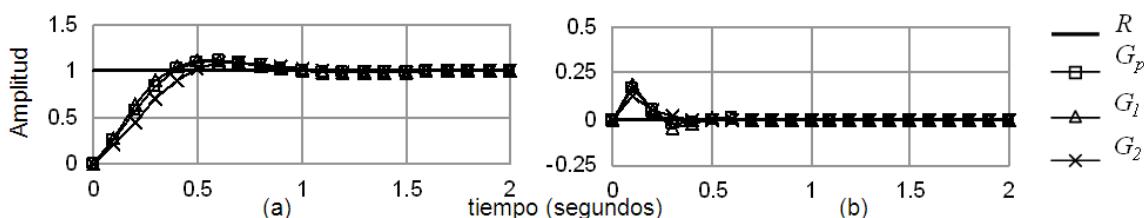
$$y_m = [1.77 \quad 35.4] \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix}$$

De esta forma en presencia de condiciones nominales tanto la planta como el modelo responderán idénticamente ante una misma excitación, por lo que el error será cero, no siendo necesaria la generación de la señal auxiliar de entrada. Por otro lado según se plantea en la ecuación (14),  $K_x$  tendrá valor cero con lo que según (9) no será necesario el cálculo de la parte de la señal de mando correspondiente a los estados del modelo, esto en definitiva disminuye la complejidad computacional del sistema propuesto. De la ecuación (15), se tiene que  $K_u = I$ , y para que  $(A_p - B_p K_e C_p)$  sea una matriz de Hurwitz, se hace  $K_e = I$ .

Las matrices de ponderación se han elegidos como sigue:  $D = 5$ ,  $M_i = 2$ ,  $i = 1, 2$ .

En la figura 4(a,b), se muestran las respuestas transitorias de los modelos nominal  $G_p(s)$  y de parámetros alterados  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ , dado por las ecuaciones (3), (4) y (5). Se evidencia la notable mejoría en la operación del sistema tanto ante cambios en la entrada de referencia como en los disturbios. Los resultados se deben comparar con los de la figura 2.

El efecto integral en la ganancia de adaptación  $K_x(v, t)$  depende del cuadrado del error por lo que tendrá característica de función monótona creciente a medida que transcurre el tiempo. Esto implica que aun cuando se alcance un valor tal que obligue a que el error tienda a cero, si se encuentra en una aplicación real no exenta de ruido en la medición, el valor de la integral continuará creciendo lo que en un momento u otro desestabilizará el sistema. De esta forma es necesario introducir un mecanismo de desconexión de la adaptación basado en algún criterio práctico. Esto implica un incremento en la cantidad de ecuaciones a solucionar y en las decisiones a tomar en tiempo real, lo que va en detrimento del costo computacional.



**Fig. 4. Respuesta de los modelos  $G_p(s)$ ,  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  con estrategia de control adaptable:**  
**(a) – ante un paso escalón en la referencia. (b) – ante un paso escalón en el disturbio.**

## Control Robusto

Las estrategias conocidas como "control moderno" no resultaron ser del todo satisfactorias, sin embargo dieron pie al surgimiento de la teoría de control robusto. Como su nombre lo indica, con ella se pretende obtener un diseño tal que el sistema sea insensible a las incertidumbres en la modelación y a los disturbios.

Esta parte de la teoría del control se encuentra en la actualidad en proceso de desarrollo, aunque ya se han obtenido resultados concretos como para su aplicación práctica. Tal es el caso de la variante de diseño de un controlador de dos grados de libertad por un método sistemático que no utiliza más que una simple parametrización del regulador [11]. Esta variante es evaluada aquí para su comparación con las estrategias antes presentadas, en cuanto a desempeño y sensitividad, así como en lo que respecta a costo computacional y complejidad de diseño.

Inicialmente se revisarán algunos conceptos. Sea el sistema de control mostrado en la figura 5(a,b).

Las distintas variables que aparecen en este diagrama de bloques se denotan como:

- $C_A(s)$  y  $C_B(s)$  : controladores (el caso más conocido es cuando  $C_B(s)=0$ ).
- $P(s)$  : planta.
- $r$  : entrada de comando (referencia).
- $y$  : salida controlada.
- $d$  : disturbios en el mando.
- $w$  : disturbios en la salida.
- $n$  : ruido en la medición.

Se definen:

$$S(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad \text{y} \quad T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{y(s)}{n(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

notándose que:

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (19)$$

La función de transferencia  $S(s)$  se conoce como función de sensitividad y  $T(s)$  como función de sensitividad complementaria. Según lo que se evidencia en la ecuación (19), si  $S(s)$  se minimiza en un rango de frecuencias, entonces  $T(s)$  debe tener módulo cercano a 1 en ese mismo intervalo de frecuencias, y viceversa. De ahí que el problema de control robusto sea lograr un regulador tal, que optimice las funciones de sensitividad y sensitividad complementaria en determinados rangos de frecuencias, de forma que el sistema sea insensible a las incertidumbres de la modelación y a la presencia de disturbios.

Debido a que los disturbios son por lo general de baja frecuencia, la función  $S(s)$  debe tener un módulo pequeño en las bajas frecuencias y como el ruido presente en la medición posee casi todas sus componentes ubicadas en las altas frecuencias, la función de sensitividad complementaria  $T(s)$  debe diseñarse de forma tal que sea pequeña en las altas frecuencias. Por el contrario  $|T(s)|$  debe ser lo más cercano a 1 en las bajas frecuencias para lograr buenas condiciones de seguimiento en estado estable (cero error ante una entrada constante por tramos). Por tanto,  $S(s)$  debe comportarse como un filtro paso alto mientras que  $T(s)$  ha de poseer características de filtro paso bajo.

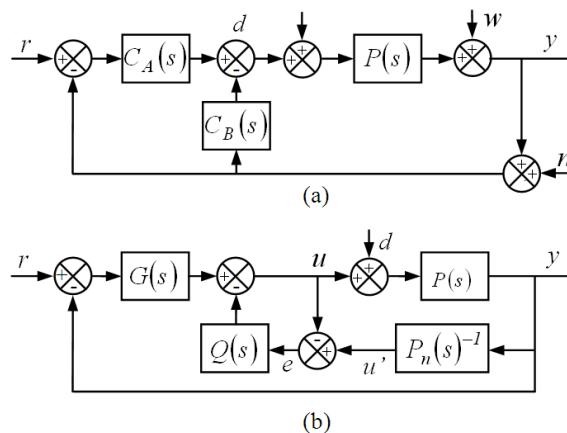


Fig. 5. (a) – Configuración del servosistema de dos grados de libertad.  
 (b) – Estructura equivalente del servosistema propuesto en (a).

Una de las posibles estructuras de un regulador de dos grados de libertad se muestra en la figura 5(a), se pueden encontrar otras combinaciones [9, 12]. Estos controladores obtienen la señal de mando  $u$  de la suma algebraica de dos componentes, en este caso particular a partir del error de seguimiento y de la salida. La fundamentación matemática de ellos ha sido ampliamente estudiada, sin embargo es difícil encontrar ejemplos de aplicación satisfactoria a sistemas prácticos [3].

El método estudiado aquí logra un diseño robusto con magníficas cualidades y facilidad de implementación en comparación con otros algoritmos de igual propósito [11].

Para comenzar el estudio de este controlador se introducen las siguientes definiciones:

- $R_{-}(s)$  : Anillo de funciones racionales propias y estables [13].
- $Rs_{-}(s)$  : Anillo de funciones racionales estrictamente propias y estables.
- $P(s)$  : Modelo real de la planta.
- $P_n(s)$  : Modelo nominal de la planta.
- $G_{ry}(s)$  : Modelo deseado de la entrada de referencia  $r(s)$  a la salida  $y(s)$ .

En este caso el sistema es de una entrada y una salida. Además, de forma general, se considera que tanto  $P(s)$  como  $P_n(s)$  son estrictamente propias, la entrada de referencia  $r(s)$  y los disturbios  $d(s)$  tienen los mismos polos inestables y que el orden relativo de las funciones racionales en  $Rs_{-}(s)$  es mayor que el de la planta.

Las factorizaciones coprimas de  $P_n(s)$ ,  $r(s)$  y  $d(s)$  son definidas como:  $P_n(s)=N_p/D_p$ ,  $r(s)=G_r/F$ , y  $d(s)=G_d/F$ , donde  $N_p \in Rs_{-}(s)$  y  $D_p, G_r, G_d, F \in Rs_{-}(s)$ .

Usando las definiciones de arriba se obtienen las siguientes expresiones para el controlador de dos grados de libertad [11]:

$$C_A = \frac{G_{ry}(s)}{I - G_{ry}(s)} \frac{1}{P_n(s)(I - Q(s))} \quad (20)$$

$$C_B = \frac{Q(s)}{P_n(s)(I - Q(s))} \quad (21)$$

Las condiciones de diseño están dadas por:

- A  $G_{ry}(s) \in Rs_{-}(s)$ ,  $G_{ry}(s)/N_p \in R_{-}(s)$ , y  $(1-G_{ry}(s))/F$  es una unidad en  $R_{-}(s)$ . Es decir, que el grado relativo del modelo sea mayor que el de la planta.
- B  $Q \in Rs_{-}(s)$  y  $Q(s)/N_p, (1-Q(s))/D_p \in R_{-}(s)$ . O sea, todos los ceros y polos inestables de la planta deben incluirse en  $Q(s)$  y  $1-Q(s)$  respectivamente, tal que se garantice estabilidad interna del sistema de control y que el grado relativo de  $Q(s)$  tiene que ser mayor o igual que el grado relativo de  $P(s)$  [13].

La parametrización del controlador posee dos elementos libres:  $G_{ry}(s)$  y  $Q(s)$ . Por su parte,  $G_{ry}(s)$  debe ser escogida tal que se cumpla la condición de diseño A, mientras que  $Q(s)$  es el más significativo, ya que es quien determina la robustez y el desempeño del sistema ante disturbios y se elige para que cumpla con B.

En la figura 5(b), se muestra la estructura equivalente del sistema de control derivado de (20) y (21), donde:

$$G(s) = \frac{G_{ry}(s)}{I - G_{ry}(s)} \frac{1}{P_n(s)} \quad (22)$$

Bajo condiciones nominales y en ausencia de disturbios, el error  $e=u'-u$  es igual a cero. La respuesta a la entrada de referencia coincide, por tanto, con la especificada por  $G_{ry}(s)$  independientemente del parámetro  $Q(s)$ . Si la planta difiere de su modelo nominal, o se añaden disturbios al sistema, entonces  $e \neq 0$  pero es forzado a converger a cero a través del lazo de realimentación formado por  $Q(s)$ , de aquí la importancia que reviste una adecuada elección de este parámetro.

Para el sistema de la figura 5(a), con  $C_A(s)$  y  $C_B(s)$  dados por las ecuaciones (20) y (21), la función de sensitividad  $S(s)$  y la función de respuesta a disturbios  $G_{dy}(s)$  están dadas por:

$$S(s) = (I - Q(s))(I - G_{ry}(s)) \quad (23)$$

$$G_{dy}(s) = S(s)P_n(s) \quad (24)$$

Es válido recordar que  $S(s)$  es la función transferencial entre el disturbio  $d(s)$  y la salida  $y(s)$  y representa la robustez contra variaciones en el sistema. Se supone que estas se describen mediante incertidumbre multiplicativa [13]. Entonces se tiene que la respuesta a la entrada de comando  $G_{ry}(s)$  y el desempeño en cuanto a eliminación de disturbios  $G_{dy}(s)$  serán cambiados por:

$$G_{ry}(s) = \frac{G_{ry}(s)}{I + S(s)\Delta p(s)} \quad (25)$$

Esto implica que la norma  $|S(j\omega)|$  debe ser suficientemente pequeña para alcanzar una elevada robustez ante variación de parámetros. Claro está, que según lo planteado en la igualdad (19) es imposible mantener dicha norma pequeña en todo el rango de frecuencias, por lo que, teniendo en cuenta que los disturbios son por lo general de baja frecuencia, se diseña  $Q(s)$  tal que  $S(s)$  posea características de filtro paso alto.

La otra característica a ser considerada es la función de sensitividad complementaria, la cual se obtiene a partir de (19) y toma la forma:

$$T(s) = I - S(s) \quad (26)$$

Esta tendría características de filtro paso bajo, lo cual es deseable para rechazar el ruido en la medición.

La pregunta sería: ¿Cómo elegir el parámetro  $Q(s)$ ?

Innumerables respuestas pudiese tener la misma. En [11] se demuestra, aplicando optimización de una norma  $H_\infty$ , que si el ancho de banda del parámetro  $Q(s)$  es mucho mayor que el correspondiente al comportamiento elegido para el sistema en lazo cerrado  $G_{ry}(s)$ , entonces se cumplen las siguientes expresiones:

$$|S(j\omega)| = |I - Q(j\omega)| \quad (27)$$

$$|T(j\omega)| = |Q(j\omega)| \quad (28)$$

Esto implica que las funciones de sensitividad y sensitividad complementaria pueden ser determinadas de una manera directa, diseñando el parámetro  $Q(s)$ .

A continuación se aplica esta metodología al caso bajo estudio, donde el modelo nominal de la planta es:

$$P_n(s) = \frac{I}{0.2s + I}$$

Se elige  $G_{ry}(s)$  como la función de transferencia del sistema en lazo cerrado formado por la planta y el controlador PI calculado inicialmente (igual al modelo de referencia del control adaptable), y se han escogido así intencionalmente para facilitar la comparación con las estrategias antes evaluadas. De esta forma:

$$G_{ry}(s) = \frac{0.0177s + 0.354}{0.01s^2 + 0.0677s + 0.354}$$

el cual cumple con la condición de diseño A.

El ancho de banda de este sistema es aproximadamente igual a 6 rad/s. Se escoge  $Q(s)$  tal que posea un ancho de banda diez veces mayor, con el objetivo de garantizar el cumplimiento de las expresiones (27) y (28). En la elección de  $Q(s)$  debe tenerse en cuenta además la condición de diseño B, o sea:

$$\text{grd rel}(Q(s)) \geq \text{grd}(D_p) - \text{grd}(N_p)$$

$$\text{grd rel}(Q(s)) \geq 1 - 0 \geq 1$$

Cumpliendo con lo anterior, se escoge:

$$Q(s) = \frac{I}{2.77 \cdot 10^{-4} s^2 + 2.36 \cdot 10^{-2} s + I}$$

la que no es más que un filtro paso bajo de Butterworth, con ancho de banda de 60 rad/s.

Con las expresiones (20) y (21) se calculan  $C_A(s)$  y  $C_B(s)$ , resultando:

$$C_A(s) = \frac{9.83 \cdot 10^{-5} s^3 + 1.03 \cdot 10^{-2} s^2 + 0.52s + 7.08}{s^2 (2.77 \cdot 10^{-4} s + 2.357 \cdot 10^{-2})}$$

$$C_B(s) = \frac{0.2s + 1}{s(2.77 \cdot 10^{-4}s + 2.357 \cdot 10^{-2})}$$

La figura 6(a,b), muestra los resultados de simulación. Se brinda la respuesta ante un paso en la entrada de referencia 6(a) y en los disturbios 6(b), de los modelos nominal  $G_p(s)$  y de parámetros alterados  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  dado por las ecuaciones (3), (4) y (5).

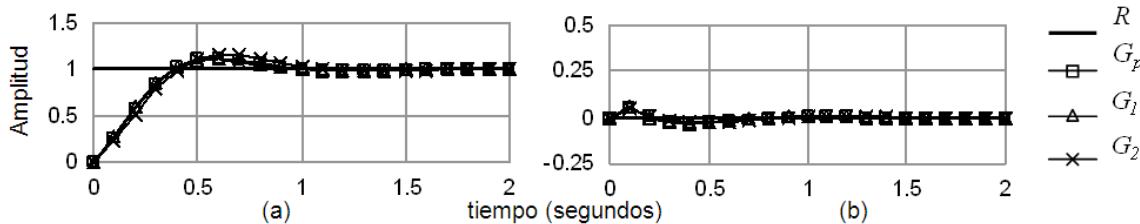


Fig. 6. Respuesta de los modelos  $G_p(s)$ ,  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  con estrategia de control robusto:  
(a) – ante un paso escalón en la referencia. (b) – ante un paso escalón en el disturbio.

Se evidencia la notable mejoría en la operación del sistema, si se compara con los resultados del control clásico, tanto ante cambios en la entrada de referencia como en los disturbios, los que son casi eliminados por completo. Los resultados se deben comparar con los de las figuras 2 y 4. Las escalas se han igualado intencionalmente a las de estas para facilitar la comparación.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se realizará una comparación de los resultados de simulación expuestos para cada estrategia, atendiendo a índices de comportamiento que permitan obtener criterios sobre su operación. Se ha elegido en el caso de la respuesta al paso en la entrada de comando, comparar en cuanto a sobreceso  $M_p$  y tiempo de establecimiento  $t_s$  (según el criterio de 2%), parámetros estos que se utilizaron como especificaciones indirectas en el diseño del control clásico. En el caso de la respuesta a disturbios se utilizan como criterio la desviación máxima que sufre la señal de salida, y el tiempo de recuperación (tiempo necesario para que el sistema entre en una gama del 2% luego de presentarse el disturbio). Los resultados se muestran en forma tabular (tablas 1,2,3), presentándose los correspondientes a los modelos nominal  $G_p(s)$  y de parámetros alterados  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ . También se incluye la cantidad de operaciones de suma algebraica, multiplicación, e integración, que fueron necesarios incluir en los modelos de simulación. Estos datos dan una idea de la complejidad de implementación, ya que independientemente de las características de la misma (electrónica analógica o programada), la cantidad de hardware o software a incluir será proporcional a la cantidad de operaciones matemáticas de la simulación. Por otro lado se dan criterios cualitativos de la operación en cuanto a robustez y desempeño del sistema.

Tabla 1. Control Clásico (ver figura 2).

$r(s)=1/s, d(s)=0$		$r(s)=0, d(s)=1/s$	
$M_p$	$t_s$	desviación máxima	tiempo de recuperación
$G_p(s)$	12 %	0.93 s	43 %
$G_1(s)$	40.6 %	2.25 s	57.1 %
$G_2(s)$	0 %	1.62 s	24 %

Integradores	1
Sumas	2
Multiplicaciones	2

Robustez	Mala
Desempeño	Malo

Tabla 2. Control Adaptable (ver figura 4).

$r(s)=1/s, d(s)=0$		$r(s)=0, d(s)=1/s$	
$M_p$	$t_s$	desviación máxima	tiempo de recuperación
$G_p(s)$	12 %	0.93 s	17 %
$G_1(s)$	12.3 %	0.91 s	19.6 %
$G_2(s)$	9.6 %	0.99 s	13.5 %

Integradores	4
Sumas	11
Multiplicaciones	17

Robustez	Se pierde con $t \rightarrow \infty$
Desempeño	Bueno

Tabla 3. Control Robusto (ver figura 6).				
$r(s)=1/s, d(s)=0$		$r(s)=0, d(s)=1/s$		
$M_p$	$t_s$	desviación máxima	tiempo de recuperación	
$G_p(s)$	12 %	0.93 s	5.5 %	0.38 s
$G_I(s)$	10 %	0.89 s	5.7 %	0.56 s
$G_2(s)$	16 %	1.02 s	5 %	0.62 s

Integradores	4	Robustez	Buena
Sumas	11	Desempeño	Bueno
Multiplicaciones	12		

Del análisis de las tablas anteriores se observa que:

- En presencia de condiciones nominales, las estrategias de control adaptable y robusto mejoran considerablemente la operación del sistema ante disturbios.
- Cuando los parámetros varían, las estrategias adaptable y robusta logran mantener los indicadores de desempeño dinámico  $M_p$  y  $t_s$  cercano al valor de condiciones nominales.
- Aun con variación de parámetros, es mejor la respuesta ante disturbios de los sistemas adaptable y robusto, que en el caso nominal del control clásico.

Como fue reflejado en los comentarios conclusivos de la evaluación de cada estrategia:

- El control adaptable garantiza buen desempeño, pero se puede perder en presencia de inestabilidad.
- El control robusto garantiza tanto robustez como excelente desempeño, sin riesgos de inestabilidad.

Cuál estrategia elegir, depende de la relación de compromiso entre los requerimientos que se planteen para el sistema, así como de las posibilidades de implementación. O sea, es la aplicación quien determina.

## CONCLUSIONES

Mediante el análisis de los resultados aquí expuestos, se concluye que la técnica de control clásico se vuelve incapaz de garantizar un elevado desempeño dinámico y robustez, en plantas con modelos de parámetros variables. Con la aplicación del control adaptable se consigue insensibilidad ante variaciones de parámetros de la planta, aunque con riesgos de estabilidad, que al tratar de ser evitados, elevan el costo computacional de la implementación. Por último, el control robusto permite un diseño de elevada calidad, garantizando por un lado la robustez a cambios en los parámetros del sistema, y por el otro un alto desempeño dinámico. Estas características se consiguen además con un costo computacional más bajo que con la aplicación del control adaptable.

## REFERENCIAS

- [1] Nelles, O., "Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models". Berlin: Springer-Verlag, 2001, ISBN 978-3-540-67369-9.
- [2] Sira, H., "Fast Adaptive Trajectory Tracking Control for a Completely Uncertain DC Motor via Output Feedback". Computación y Sistemas, 2009, vol.12, n.4, p. 397-408, ISSN 1405-5546, Disponible en: [http://www.cic.ipn.mx/sitioCIC/images/revista/vol12-04/v12no4\\_art02.pdf](http://www.cic.ipn.mx/sitioCIC/images/revista/vol12-04/v12no4_art02.pdf).
- [3] Ogata, K., "Ingeniería de Control Moderna". 4ta Edición, Madrid: Pearson Educación S. A., 2003, ISBN 84-205-3678-1.
- [4] Purwanto, E., et al., "Application of vector control method for developing ANFIS observer as speed sensor for induction motor speed control in electric vehicle". Academic Research International, 2012, vol.21, n.1, p. 22-29, ISSN 2223-9944.
- [5] Wang, H.P., et al., "Composed Adaptive Control for a second-order nonlinear model of a biotechnological process". En: 19th Mediterranean Conference on Control and Automation. Corfu, Greece, 2011. p. 1140-1143, ISBN 978-1-4577-0124-5.
- [6] Lin, F.; Liaw, C., "Reference Model and Adaptive Control for Induction Motors Drives". IEEE Transaction on Automatic Control, 1993, vol.38, n.10, p. 1594-1600, ISSN 0018-9286.

- [7] L. Wang, "Model predictive control system design and implementation using MATLAB". London: Springer-Verlag, 2009, ISBN 978-1-84882-330-3.
- [8] Angelov, P., "Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications". New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2010, ISBN 978-0-470-28719-4.
- [9] Tao, G., "Adaptive Control: Design and Analysis". New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2003, ISBN 0-471-27452-6.
- [10] Zhou, H., "State feedback sliding mode control without chattering constructing Hurwitz matrix for AUV movement". International Journal of Automation and Computing, 2011, vol.8. n.2, p. 262-268, ISSN 1476-8186.
- [11] Umeno, T., "Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and its Application to Novel Motion Control of Robot Manipulators". IEEE Transaction on Automatic Control, 1993, vol.40. n.5, p. 473-485, ISSN 0278-0046.
- [12] Kishimoto, Y., "Disturbance attenuation property for random disturbances in two-degree-of freedom optimal servo control systems". En: 2011 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS), Zhengzhou, China, 2011. p. 321-324, ISBN 978-1-4577-1698-0.
- [13] Lin, F., "Robust control design: an optimal approach". Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2007, ISBN 978-0-470-03191-9.

## AUTORES

### Orlando Regalón Anias

Ingeniero en Control Automático, Máster en Ingeniería en Control Automático, Profesor Asistente. Departamento Ing. Eléctrica de la Facultad Electromecánica. Universidad de Camagüey, Cuba.  
e-mail: [orlando.regalon@reduc.edu.cu](mailto:orlando.regalon@reduc.edu.cu)

### Milagros Diez Rodríguez

Ingeniera en Automática, Telemecánica y Comunicaciones, Doctora en Ciencias Técnicas, Profesora Titular. Departamento Ing. Eléctrica de la Facultad Electromecánica. Universidad de Camagüey, Cuba.  
e-mail: [milagros.diez@reduc.edu.cu](mailto:milagros.diez@reduc.edu.cu)

### Vladímir Rodríguez Diez

Ingeniero Electricista, Máster en Ingeniería Eléctrica, Profesor Asistente. Departamento Ing. Eléctrica de la Facultad Electromecánica. Universidad de Camagüey, Cuba.  
e-mail: [vladimir.rodriguez@reduc.edu.cu](mailto:vladimir.rodriguez@reduc.edu.cu)

### Raúl Báez Prieto

Ingeniero Electricista, Profesor Instructor. Departamento Ing. Eléctrica de la Facultad Electromecánica. Universidad de Camagüey, Cuba.  
e-mail: [raul.bprieto@reduc.edu.cu](mailto:raul.bprieto@reduc.edu.cu)