



Perspectiva Educacional, Formación de  
Profesores

ISSN: 0716-0488

perspectiva.educacional@ucv.cl

Pontificia Universidad Católica de  
Valparaíso  
Chile

Corica, Ana Rosa; Otero, María Rita

ANÁLISIS DE UN DISPOSITIVO DIDÁCTICO FORMULADO POR ESTUDIANTES DE  
PROFESORADO EN MATEMÁTICA EN UN CURSO DE FORMACIÓN BASADO EN EL  
PARADIGMA DE LA INVESTIGACIÓN

Perspectiva Educacional, Formación de Profesores, vol. 55, núm. 2, junio-, 2016, pp. 21-  
37

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Viña del Mar, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333346580003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# ANÁLISIS DE UN DISPOSITIVO DIDÁCTICO FORMULADO POR ESTUDIANTES DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA EN UN CURSO DE FORMACIÓN BASADO EN EL PARADIGMA DE LA INVESTIGACIÓN

---

ANALYSIS OF A DIDACTIC DEVICE MADE BY MATHEMATICS TEACHER STUDENT IN A COURSE BASED ON THE RESEARCH PARADIGM

Ana Rosa Corica (\*)

María Rita Otero

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas  
Argentina*

## Resumen

---

En este trabajo reportamos resultados de una investigación exploratoria y descriptiva, con estudiantes de profesorado en matemática, que experimentaron un curso para su formación con el propósito de vincularlos con el paradigma de la investigación. Una de las fases del curso fue que los estudiantes de profesorado propongan dispositivos didácticos para enseñar matemática en la escuela secundaria, en correspondencia con el curso realizado. En este trabajo se analiza el diseño de un dispositivo. Los principales resultados indican que los estudiantes formulan una cuestión generatriz apropiada para realizar una enseñanza basada en el paradigma de la investigación, pero tienen dificultades para explorar y ampliar la pregunta, y la reducen en sus alcances y generatividad.

**Palabras clave:** Formación docente, Matemática, Enseñanza, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

## Abstract

---

In this paper, we present results of exploratory and descriptive research carried out with mathematics teacher students, who undertook a training course. This course has the aim of partially introducing the students into the paradigm of research. One phase included in the methodology of the course requires the mathematics teacher students to make didactic devices for the study of mathematics that fit into the current high school curriculum. Here we discuss the design of one didactic device proposed by the mathematics teacher students. The main results indicate that the students formulate a relatively generative question appropriate for teaching based on the research paradigm. However, they find it difficult to explore and expand on the question, thus, they reduce the scope of the proposal.

**Keywords:** Teachers' training; Mathematics; Teaching; Anthropological Theory of the Didactic (ATD).

---

(\*)Autor para correspondencia:

Ana Rosa Corica  
Doctora en Ciencias de la Educación  
Consejo Nacional de Investigaciones  
Científicas y Técnicas  
Universidad Nacional del Centro de la  
Provincia de Buenos Aires  
Pinto 399 (7000) Tandil – Buenos Aires-  
Argentina.  
Correo de contacto:  
acorica@exa.unicen.edu.ar

---

©2010, Perspectiva Educacional  
<http://www.perspectivaeducacional.cl>

---

RECIBIDO: 30 de diciembre de 2015  
ACEPTADO: 17 de mayo de 2016  
DOI: 10.4151/07189729-Vol.55-Iss.2-Art.421

## 1. INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemática es una de las problemáticas fundamentales de la didáctica de la matemática. Según Chevallard (2011) la profesión de profesor de matemática está en construcción. Es decir, es preciso desarrollar instrumentos de naturaleza matemático-didáctica, que permitan afrontar los problemas que surgen en la profesión. Asumir este punto de vista sobre la profesión, permite liberar al docente individual del peso y de la culpa de resolver en solitario y aisladamente problemas que lo exceden.

Tal como señala Godino (2009) numerosos investigadores se ocuparon de la formación del profesor de matemática, sin que haya acuerdo en la literatura, para designar y establecer el conjunto de conocimientos, competencias, disposiciones, etc., que el profesor de matemática debería utilizar para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Algunos investigadores coinciden en la necesidad de concebir a las nociones matemáticas como objetos a enseñar y no solo como objetos matemáticos (Ball, Thames & Phelps, 2008; Davis & Simmt, 2006; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Shulman, 2006). El conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar la competencia profesional, porque los profesores tienen que poder organizar la enseñanza, diseñar tareas para propiciar el aprendizaje de las nociones, emplear diferentes recursos, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. Además, la manera en que el profesor comprende las nociones matemáticas y las relaciones entre ellas, influye en cómo se propone su estudio en el aula y en las tareas que se adoptan para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (Thompson, Carlson & Silverman, 2007).

En este trabajo se reportan resultados sobre el diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática cuyas características han sido descritas en Corica & Otero (2015a). En una de las etapas del curso los estudiantes tienen que proponer dispositivos didácticos para enseñar matemática en la escuela secundaria, a partir de la formación didáctico-matemática que están recibiendo. Se discute aquí el diseño de uno de esos dispositivos didácticos considerando ¿qué gestos del paradigma de la investigación realizan los estudiantes cuando conciben la enseñanza para la escuela secundaria en la cual ellos se desempeñarán? Es importante tomar en cuenta que, se trata de estudiantes de tercer año del profesorado que carecen de toda experiencia docente, y que conocen solo por su experiencia como alumnos de escuela secundaria y por lo que han estudiado en su proceso formativo, las características de dicha institución. Algunas de estas características restringirán su actividad docente, es decir, les impondrán condiciones que no pueden modificar, tales como el papel de la disciplina matemática en el currículo, o la inflexibilidad con la que se adoptan en las instituciones escolares los documentos ministeriales que definen la matemática escolar a estudiar.

## 2. MARCO TEÓRICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2007, 2013a, 2013b) propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, característicos de un paradigma emergente y opuesto al tradicional, donde en lugar de estudiar saberes inmotivados, como respuesta a preguntas cuyo origen se desconoce o se oculta, se formulen preguntas umbilicales que requieran

del estudio de herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y responder preguntas, siempre de manera inacabada. Los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) son dispositivos que permitirían afrontar el fenómeno de monumentalización del saber a partir de una nueva epistemología escolar basada en la investigación y el cuestionamiento del mundo (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda, Parra, 2013). Además, los REI son una metodología que refleja lo que ocurre en cualquier actividad científica de investigación. Llevar adelante la metodología propia del nuevo paradigma que encarnan los REI, requiere incorporar un conjunto de gestos didácticos, que implican modificaciones radicales con respecto a la enseñanza tradicional.

Un sistema didáctico propio del paradigma de la investigación  $S(X; Y; Q)$  se caracteriza por un conjunto de alumnos  $X$  que estudia una pregunta  $Q$  con la ayuda de un profesor o un conjunto de profesores  $Y$  con el propósito de aportar una posible respuesta  $R^\heartsuit$  a  $Q$ . La producción de  $R^\heartsuit$  requiere que el sistema didáctico  $S$  disponga de instrumentos, recursos, obras, es decir, el sistema necesita generar un medio didáctico  $M$ , para producir  $R^\heartsuit$ . Un REI comienza con una pregunta  $Q$ , propuesta por el profesor, cuyo estudio conducirá al encuentro o reencuentro con varias organizaciones matemáticas y/o de otras disciplinas. De esta manera, se establece una cadena de preguntas y respuestas que son el corazón del proceso de estudio  $P = (Q_i; R_i)_{1 \leq i \leq n}$ , siendo  $Q_i$  todas las preguntas que habitan el corazón  $\heartsuit$  y  $R_i$  las respectivas respuestas a ellas (Chevallard, 2007).

Implementar un REI requiere ejecutar gestos didácticos, propios del estudio y la investigación, llamados dialécticas (Chevallard, 2007, 2013a, 2013b). Mencionamos, brevemente, a continuación tres dialécticas que surgen en los datos que se analizan en este trabajo y que son esenciales en un REI:

*La dialéctica del estudio y de la investigación.* Una investigación supone la combinación del estudio de preguntas y respuestas preestablecidas. Esta dialéctica constituye el motor de una enseñanza por REI. No es posible investigar sin estudiar y a su vez un estudio genuino es productor de preguntas a ser investigadas.

*La dialéctica de los media y los medios.* La elaboración de las sucesivas respuestas provisionales requiere de respuestas preestablecidas, accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los media (libros, artículos de investigación, apuntes de clase, etc.). Estas respuestas son el producto de conjeturas, y como tal, debe ponerse a prueba, resultando ser transformadas e incorporadas al medio.

*La dialéctica del individuo y el colectivo.* Los estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno.

Una enseñanza por REI presupone el estudio de preguntas que son acordadas por todos los integrantes de la comunidad de estudio. Esto demanda repartir responsabilidades y asignar tareas individuales, para luego retornar el proceso grupal de elaboración de una respuesta. Las obras encontradas o reencontradas para elaborar la respuesta, serán estudiadas con cierto nivel de

profundidad, para establecer su pertinencia. Así, también, surgirán nuevas preguntas, que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo va a responder. Por lo que, la responsabilidad del estudio no recae en el individuo, sino en la comunidad productora, que sostiene y valida las respuestas que genera colectivamente.

### **3. METODOLOGÍA**

Se adopta una metodología propia de las ciencias sociales, de naturaleza cualitativa, de corte exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández & Baptista, 2010). Se trata de un estudio de caso clínico que es la metodología que caracteriza a la TAD (Chevallard, 2016). Buscamos comprender las características esenciales del proceso de diseño de un dispositivo didáctico propuesto por estudiantes de profesorado en matemática (EPM) que realizan un curso fundamentado en la TAD (Corica & Otero, 2015a).

En la primera fase del curso, se proponen dos situaciones que son gestionadas de manera simultánea, en las que se busca integrar la formación matemática de los EPM con la formación didáctica. Se propone a los estudiantes abordar una cuestión generatriz inicial vinculada con una de las problemáticas fundamentales de la profesión de profesor que es cómo enseñar el saber matemático. Además, en paralelo los EPM viven un REI codisciplinar en primera persona para establecer vinculaciones entre la matemática y otras disciplinas. De esta manera, se estudian de manera simultánea dispositivos didácticos junto con el entorno tecnológico que justifica el hacer de las organizaciones didácticas involucradas. Así, el entorno tecnológico emerge como respuesta al interés y necesidades de la comunidad de estudio en relación a la profesión de profesor de matemática.

La segunda fase consiste en que los EPM adapten o propongan dispositivos didácticos para enseñar matemática con el propósito de que permitan vivir algunos gestos propios de la pedagogía de la investigación. Así mismo, en esta propuesta se procura que los EPM den indicios de cómo gestionarían el estudio.

#### **3.1. Descripción institucional del curso en el que se desarrolló la investigación**

La investigación se realizó en un curso de tercer año de la carrera de profesor en matemática de la UNICEN. El curso dura 4 meses con dos encuentros semanales: uno de 4 horas y otro de 3 horas. El programa tiene como objetivo esencial estudiar la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), sus últimos desarrollos e investigaciones realizadas en función a la misma.

El plan de estudio del profesorado en matemática se compone de 14 materias donde se estudia matemática pura y 11 materias corresponden a la formación pedagógica. Toda la formación de los EPM es compatible con el fenómeno de monumentalización del saber. El curso tenía 12 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre 20 y 28 años. En todas las sesiones los EPM formaron los mismos grupos de trabajo, compuestos por 2 o 3 estudiantes.

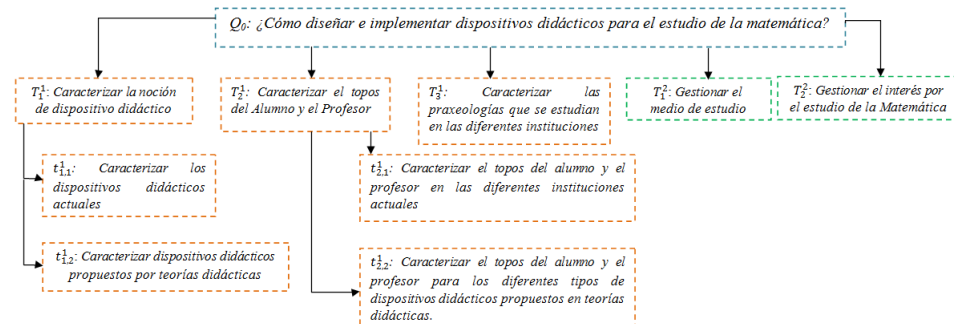
Durante los encuentros de 3 horas, los EPM estudiaron un REI codisciplinar dirigido por un profesor

( $P_1$ ) (Corica & Otero, 2015a, 2015b). Los encuentros de 4 horas fueron dirigidos por otro profesor ( $P_2$ ), y aquí los EPM profundizaron en el estudio de la tarea que se inició con el análisis de  $Q_0$ : *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la Matemática?* En esta tarea los EPM formularon pares de preguntas y respuestas relacionadas con la profesión de profesor de Matemática. Este estudio tuvo lugar durante 12 sesiones y derivó en la exploración de posibles propuestas de clase para el estudio de la matemática en la escuela secundaria, atendiendo a la formación didáctica y matemática a la que fueron expuestos. En todas las sesiones  $P_2$  fue observador participante. Se registró un audio general de cada sesión y se tomaron notas de campo antes y durante la implementación de cada sesión. También, se recogieron todas las producciones de los estudiantes. En la primera sesión,  $P_2$  propuso la cuestión generatriz inicial y en las sucesivas clases, cuando las circunstancias lo requirieron proporcionó material para su estudio. Luego de cada sesión los EPM completaron un diario de clase on-line que era compartido con la comunidad de estudio, lo cual ha permitido recoger las expresiones de las experiencias manifestadas por escrito por los EPM.

#### 4. RESULTADOS DE LA GESTIÓN DEL CURSO

En esta sección presentamos resultados del estudio de la tarea que se inició con  $Q_0$ : *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la Matemática?* En la primera sesión, se propuso la cuestión generatriz  $Q_0$  y como síntesis de las aportaciones de los diferentes grupos, la comunidad de estudio elaboró una propuesta global del medio para el estudio durante el curso. En las sucesivas sesiones, los grupos aportaron pares de preguntas y respuestas según sus intereses y necesidades. El estudio de esas preguntas se extendió hasta la sesión siete, cuyos principales resultados indicamos a continuación. Para el análisis se consideraron el conjunto de preguntas propuestas por los EPM y se identificaron los tipos de tareas ( $T_j^D$ ) que requiere el estudio de cada pregunta. En el Esquema 1 sintetizamos las características del medio de estudio propuesto por los EPM.

**Esquema 1** - Medio de estudio gestado por los EPM



**Fuente:** Elaboración propia.

Durante las primeras 7 sesiones, los EPM dieron curso a su necesidad de formular preguntas relacionadas a la profesión de profesor. El medio que gestaron contiene una gran proporción de preguntas centradas en caracterizar los atributos de los actores del sistema didáctico (Alumno y Profesor) y las maneras de difundir el saber. Mayoritariamente, son preguntas genéricas sobre la

profesión, formuladas con independencia de las nociones de enseñanza.

Los EPM lograron que ante una pregunta, se generaran más preguntas en lugar de respuestas, y que el producto del estudio sea compartido y defendido por todos los EPM, incorporando algunos gestos incipientes del paradigma de la investigación. Sin embargo, fue difícil contener la ansiedad por la búsqueda de respuestas inmediatas y acabadas, cuando el producto relativamente final del estudio se obtuvo luego de dos meses de iniciado el curso.

En lo relativo a  $t_{1,2}^1$ : *Caracterizar dispositivos didácticos propuestos por teorías didácticas*, los EPM caracterizaron dispositivos didácticos propuestos por diferentes teorías didácticas estudiadas en este curso y en otros previos. En esta caracterización los EPM profundizaron en la descripción de REI y Actividades de Estudio e Investigación. En particular, los estudiantes del Grupo 1 propusieron abordar qué implica estudiar situaciones del mundo en la escuela (término obtenido del texto Chevallard (2007) y que se encuentra relacionado con la descripción de los REI). Así, se inició un estudio en cada grupo que tuvo lugar durante 5 sesiones y como resultado, cada pequeño grupo, buscó y analizó distintas investigaciones que involucran una enseñanza por REI (Barquero, Bosch & Gascón, 2011; Fonseca, 2011; Llanos y Otero, 2012; Serrano, Bosch y Gascón, 2007). A continuación, cada pequeño grupo diseñó dispositivos didácticos, que a su entender eran propios del paradigma de la investigación. En general, en las propuestas encontramos la explicitación de una cuestión generatriz inicial y sus derivadas, junto a algunas indicaciones de su posible gestión en el aula. Las cuestiones iniciales formuladas por cada grupo son las siguientes:

*Grupo 1: ¿Cómo analizar el crecimiento demográfico?*

*Grupo 2: Existen diversas maneras para trasladarse desde la casa de cada uno de ustedes al colegio, ¿Cuál consideran que es la más conveniente?*

*Grupo 3: ¿Cómo describir el movimiento de un péndulo simple?*

*Grupo 4: ¿Cómo se puede describir la trayectoria de una pelota?*

*Grupo 5: ¿Qué comportamiento tiene el crecimiento bacteriano?*

A continuación, describimos la propuesta del Grupo 1 que se refiere a describir dinámicas de poblaciones.

## 5. ANÁLISIS DEL DISPOSITIVO DIDÁCTICO PROPUESTO POR EL GRUPO 1

La propuesta se estructura en 5 sesiones, para ser desarrollado en quinto año de la escuela secundaria (estudiantes de 15- 16 años). A continuación, presentamos las preguntas propuestas.

$Q_0$ : *¿Cómo analizar el crecimiento demográfico?*

$Q_{0,1}$ : *¿Qué es el crecimiento demográfico?*

$Q_{0,1,1}$ : *¿Qué es la tasa de crecimiento?*

$Q_{0,1,2}$ : *¿Cómo calcularla?*

$Q_{0,1,3}$ : ¿Qué tipos de demografía existen?

$Q_1$ : Cierta ciudad en 1998 tenía una población de 1.000.000 habitantes, en la cual el crecimiento de la población es a una tasa del 10 % anual.

i) ¿Cuántos habitantes tendrá esta ciudad en el año 1999, 2000 y 2001?

ii) ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2048?

iii) Realizar una interpretación gráfica del crecimiento de la población desde 1998 hasta 2003

$Q_2$ : ¿La población humana siempre se puede describir a partir del modelo exponencial?

$Q_{2,1}$ : ¿Qué representa  $P(t) = e^{-kt}$  o  $P(t) = e^{kt}$ ?

$Q_{2,1,1}$ : La ley de enfriamiento de Newton se utiliza, en criminalística, para determinar la hora de muerte, en investigaciones de homicidio. La temperatura normal de una persona es de  $36,7^{\circ}\text{C}$  y se ha determinado experimentalmente que la constante es  $K = 0,19468$ , para estos casos. Si en una ciudad donde la temperatura promedio es de  $18^{\circ}\text{C}$  se halla un cuerpo con  $23^{\circ}\text{C}$ .

Determine la hora de muerte del occiso. Realizar la gráfica de la función establecida.

$Q_{2,1,2}$ : ¿Cómo resolver una ecuación exponencial con base  $e$ ?

$Q_{2,1,1,1}$ : ¿Qué relaciones se pueden establecer entre las dos funciones que contienen a  $e^{kx}$ ?

$Q_{2,1,1,2}$ : ¿Qué ocurre con  $e^{kx}$  si queremos obtener un corrimiento vertical?

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1

La propuesta se articula alrededor de  $Q_0$ : ¿Cómo analizar el crecimiento demográfico? La pregunta tiene gran relevancia social. Pues, los estudios demográficos se centran en conocer la dimensión, estructura, características y evolución de las poblaciones, principalmente, desde un punto de vista cuantitativo. Esto es indispensable para el conocimiento de la realidad social en la que viven las diferentes poblaciones y así realizar planificaciones gubernamentales y empresariales (Torres-Degró, 2011).

Del estudio de  $Q_0$  los estudiantes derivaron dos conjuntos de preguntas. Uno de ellos es de conocimiento en relación al crecimiento demográfico. Y el otro, reúne a dos situaciones:  $Q_1$  y  $Q_{2,1,1}$ , que tienen como propósito iniciar el estudio de funciones exponenciales.

Para el análisis, se consideraron el conjunto de preguntas propuestas por los EPM y se clasificaron según el género de tarea al que remite su estudio. La noción de género de tarea se refiere a un determinativo y existe bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido se encuentra especificado. Por lo que a continuación, se identificaron los tipos de tareas ( $T_j^{\square}$ ) que requiere el estudio de cada pregunta. Identificamos preguntas que se vinculan con tres géneros de tarea:  $G_1^1$ : Definir, que conglomerata tareas que implican elaborar un glosario de términos propios de la demografía.  $G_2^1$ : Calcular, que agrupa tareas que implican realizar procedimientos, basados en reglas



que son tomadas como verdaderas, para obtener un resultado que permita predecir acontecimientos.

$G_3^1$  Analizar, reúne tipo de tareas que se refieren a estudiar funciones. Identificamos un solo tipo de tarea para cada género, que describimos a continuación.

### $T_0^1$ : Definir nociones sobre crecimiento demográfico

$Q_0$ : ¿Cómo analizar el crecimiento demográfico?

$Q_{0,1}$ : ¿Qué es el crecimiento demográfico?

$Q_{0,1,1}$ : ¿Qué es la tasa de crecimiento?

$Q_{0,1,3}$ : ¿Qué tipos de demografía existen?

Según los EPM, el estudio de estas preguntas fortalecería la gestión de dialéctica del estudio e investigación. Sin embargo, las respuestas aportadas por los EPM resultan ser *débiles*, pues no ponen en evidencia la relevancia y complejidad de los estudios demográficos. Se exploran vastas zonas, desde lo alto que no permiten percibir profundos detalles de los estudios demográficos.

A continuación, describimos las cuestiones que se reúnen bajo  $T_1^1$  y que buscan hacer operativas las respuestas a las preguntas que se reúnen en  $T_0^1$ .

### $T_1^1$ : Calcular el crecimiento demográfico

$Q_{0,1,2}$ : ¿Cómo calcularla [la tasa de crecimiento demográfico]?

$Q_1$ : Cierta ciudad en 1998 tenía una población de 1.000.000 habitantes, en la cual el crecimiento de la población es a una tasa del 10 % anual.

i) ¿Cuántos habitantes tendrá esta ciudad en el año 1999, 2000 y 2001?

ii) ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2048?

iii) Realizar una interpretación gráfica del crecimiento de la población desde 1998 hasta 2003

$Q_2$ : ¿La población humana siempre se puede describir a partir del modelo exponencial?

$Q_{2,1}$ : ¿Qué representa  $P(t) = e^{-kt}$  o  $P(t) = e^{kt}$ ?

El estudio de las preguntas se focaliza en poder describir modelos matemáticos que permitan calcular y realizar inferencias sobre el crecimiento poblacional. Para el estudio de  $Q_{0,1,2}$ : ¿Cómo calcularla? los EPM clasificaron las tasas de crecimiento de la siguiente manera:

*Tasa de Crecimiento Aritmético:*

(...) supone que la población tiene un comportamiento lineal (...) Esta tasa solo es aconsejable para períodos cortos de tiempo (menor de dos años). La fórmula para la tasa de crecimiento bajo el supuesto modelo aritmético es:

$$r = \frac{(P^{(t-n)} - P^t)}{aP^t}$$

Donde:

$r$ : Tasa de crecimiento anual aritmético

$P^{(t-n)}$ : Población al momento actual

$P^t$ : Población al momento inicial o población base o población inicial.

$a$ : La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

Tasa de Crecimiento Geométrico

(...) esta tasa supone un crecimiento porcentual constante en el tiempo. A diferencia del modelo anterior, dicha tasa mantiene constante el porcentaje de crecimiento por unidad de tiempo y no el monto (cantidad) por unidad de tiempo, por tanto, se puede usar para periodos largos. La fórmula para la tasa de crecimiento poblacional bajo el supuesto geométrico puede ser:

$$r = \sqrt[a]{\frac{P^{(t-n)}}{P^t}} - 1$$

Donde:

$r$ : Tasa de crecimiento anual geométrico

$P^{(t-n)}$ : Población al momento actual

$P^t$ : Población al momento inicial o población base o población inicial.

$a$ : La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

Tasa de crecimiento exponencial

Supongamos que el tamaño inicial de una población es  $P_0$ , y la población aumenta a una tasa por periodo de  $r$ , al finalizar un periodo de tiempo la población habrá aumentado  $P_0 \cdot r$  y el tamaño total de la población al final de este periodo será de: 1)  $P_0 + r \cdot P_0 = P_0 \cdot (1 + r)$ . Más generalmente, al finalizar el periodo  $t$ , el tamaño de la población  $P(t)$  será:

$$P(t) = P_0(1 + r)^t$$

Donde  $P_0$  es el tamaño inicial de la población.

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

En esta propuesta los EPM realizan transcripciones textuales de modelos sin cuestionar su pertinencia y composición. Así, de esta presentación quedan excluidas preguntas como: ¿Qué tipo de predicción permite realizar cada modelo? ¿Qué relación hay entre los modelos matemáticos propuestos? ¿Qué propiedades se destaca de cada uno? ¿Qué factores o parámetros tienen mayor influencia en la posible dinámica de determinada población? ¿Cómo se interpretan esos factores? ¿Cómo se pueden aproximar? ¿Cómo se ajustan las predicciones que se pueden realizar sobre determinadas poblaciones con los modelos a los datos que se pueden obtener de la evolución de poblaciones reales? ¿Qué modelo se ajusta mejor a las situaciones reales?

El estudio de lo que los EPM denominan  $Q_1$  se compone de dos tareas: *Calcular la población prediciendo su tamaño años posteriores y Representar gráficamente el crecimiento poblacional en un lapso de tiempo*. El objetivo es que los estudiantes empleen la tasa de crecimiento exponencial, para efectuar los cálculos correspondientes, pues los EPM indicaron:

*...se propondrá un problema para orientar el recorrido hacia la noción de Función exponencial. Este problema no hace explícito el modelo que se debe utilizar de los ya encontrados, y es por esto, que los alumnos deberán establecer qué conocimiento es pertinente y merece ser analizado (...)*

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

Los EPM asumen que la función del profesor es orientar la actividad de los estudiantes hacia el objetivo: estudiar la función exponencial. Del análisis del modelo para el crecimiento poblacional humano, los EPM indicaron:

*Este modelo de crecimiento poblacional, está sujeto a la condición que el porcentaje de crecimiento sea constante a través de los años. Sabemos que a veces esto no es así, existen factores que inhiben el crecimiento indefinido como el hacinamiento, la falta de alimentos y otros factores sociológicos en el caso de la población humana: crisis en la familia, crisis económica, guerras, etc. Así que un modelo de crecimiento exponencial es recomendable por periodos pequeños o en poblaciones recién establecidas donde aparentemente no hay limitantes de crecimiento.*

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

Esto pone en evidencia la necesidad de cuestionar el modelo que estudia la dinámica poblacional. El análisis se efectúa en un solo sentido, en correspondencia con el interés de los EPM. Se cuestionó solo el modelo exponencial, aun cuando en respuesta a  $Q_{0,1,2}$  se ofrecieron otros modelos para el estudio de la dinámica de poblaciones. Profundizar en el estudio de modelos de dinámica poblacional requiere recorrer diversas organizaciones matemáticas que no contemplaron los EPM, tales como: sucesiones, matrices, ecuaciones diferenciales. Algunas de estas nociones corresponden al diseño curricular del último año de la escuela secundaria y otras exceden a las nociones matemáticas que se proponen estudiar en la escuela secundaria.

Finalizado el estudio de  $Q_1$  los EPM suponen que el profesor deberá proponer la cuestión:  $Q_2$ : ¿La población humana siempre se puede describir a partir del modelo exponencial? El objetivo es continuar indagando en diferentes medias acerca de cómo estudiar el crecimiento poblacional. Los EPM proponen el estudio de funciones logísticas, sin embargo, explicitaron una restricción en la hipotética implementación del dispositivo didáctico: el estudio requiere abordar nociones de cálculo, que corresponden al último año de la escuela secundaria. En particular, los EPM proponen el estudio

del siguiente modelo:

*Pierre Francois Verhulst (1804 1849).*

*Donde*

$$P(t) = \frac{a}{(1+Ce^{(-kt)})}$$

*en el cual  $a$ ,  $k$ , y  $C$  son constantes y  $a$  representa el valor límite de la población.*

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

Debido a las limitaciones que mencionan los EPM para el estudio del modelo, proponen lo siguiente:

*(...) para poder trabajar con este modelo, la única manera sería ofreciendo como dato las constantes involucradas en el modelo, reduciéndose el problema solo a reemplazar valores. Por esta razón, consideramos dejar abierto este REI para poder continuarlo en el año siguiente, donde sí se ven las nociones de derivada y límite.*

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

El estudio se orientaría al análisis de funciones exponenciales, por lo que los EPM proponen la siguiente cuestión:  $Q_{2.1}$ : ¿Qué representa  $P(t) = e^{(-kt)}$  o  $P(t) = e^{kt}$ ?

Según los EPM los modelos de dinámica poblacional no permitirían realizar un estudio relativo a las transformaciones de funciones exponenciales a razón de la variación de sus parámetros. Esto hace que pierda sentido el estudio de  $Q_0$  y se salga totalmente del tema de demografía para ingresar a otro, donde el propósito es el estudio de funciones exponenciales. Lo indicado se pone de manifiesto en el siguiente protocolo:

*En una segunda etapa de la sesión cuatro, luego de ser analizada la función exponencial natural, podemos plantear un problema en el cual los alumnos puedan analizar los corrimientos tanto horizontales como verticales incluidos dentro del currículum de 5to año. Pero, no existe ningún modelo de crecimiento poblacional que nos permita analizar estos corrimientos (...) Proponemos (...) un nuevo problema que se aleja del estudio demográfico. Nuestro nuevo problema está relacionado con la ley de enfriamiento de Newton.*

**Fuente:** Protocolo de los EPM del Grupo 1.

A continuación, se describen las preguntas reunidas bajo  $T_2^1$ , que procuran estudiar funciones exponenciales.

### **$T_2^1$ : Analizar funciones exponenciales**

*$Q_{2,1,1}$ : La ley de enfriamiento de Newton se utiliza, en criminalística, para determinar la hora de muerte, en investigaciones de homicidio. La temperatura normal de una persona es de  $36,7^\circ\text{C}$  y se ha determinado, experimentalmente, que la constante es  $K = 0,19468$ , para estos casos. Si en una ciudad donde la temperatura promedio es de  $18^\circ\text{C}$  se halla un cuerpo con  $23^\circ\text{C}$ . Determine la hora de muerte del occiso. Realizar la gráfica de la función establecida.*

*$Q_{2,1,2}$ : ¿Cómo resolver una ecuación exponencial con base  $e$ ?*

*$Q_{2,1,1,1}$ : ¿Qué relaciones se pueden establecer entre las dos funciones que contienen a  $\exp(kx)$ ?*

*$Q_{2,1,1,2}$ : ¿Qué ocurre con  $\exp(kx)$  si queremos obtener un corrimiento vertical?*

En general, las técnicas que proponen los EPM para el estudio de  $f(x) = e^{kx}$  se reducen a sugerir diferentes funciones, variar sus parámetros y así estudiar el desplazamiento de la función en relación al sistema de ejes coordenadas. El estudio es propuesto para ser realizado únicamente de manera gráfica.

Es decir, lo que surgió inicialmente como un REI, buscando una cuestión generatriz que involucre varias disciplinas, que resultara de interés y problemática, pierde sentido a medida que se desarrolla el estudio. El objetivo esencial de los EPM es estudiar funciones exponenciales, donde el profesor controlaría el medio de estudio y regularía la actividad de los estudiantes.

## **6. REFLEXIÓN DE LOS ESTUDIANTES SOBRE EL CURSO**

A continuación, se reseñan dos opiniones de los estudiantes en relación al curso realizado, que se recogieron mediante un diario de clase on-line que era compartido por toda la comunidad de estudio y completado al finalizar cada sesión. Aquí, se refieren elementos del último diario de clase, donde los EPM expresan sus vivencias durante todo el curso (qué les gustó, qué no les gustó, si tuvieron dificultades para realizar la tarea propuesta y por qué, cómo se sintieron trabajando en grupo, en el trabajo individual). Con relación al tipo de estudio al que fueron expuestos los estudiantes durante el curso, recogimos propuestas de todos los EPM. En particular, hacemos mención a la propuesta de los dos EPM que diseñaron el dispositivo didáctico que reportamos ( $EMP_1$  y  $EMP_2$ ):

*"Si bien al comenzar esta cursada me sentía un poco desorientada, hoy que puedo ver todo el avance que tuvimos, estoy muy conforme. Creo que es muy provechoso el trabajo en grupo y el posterior debate o puesta en común.*

*En un principio me parecía que hacer dos REI (uno para la clase de  $P_1$  y otro para la de  $P_2$ ) era demasiado. Pero tanto a  $EMP_2$  como a mí, nos sirvió mucho exponer el primer REI para así en el segundo poder utilizar todas las sugerencias tanto de las profesoras como de los compañeros y estar así más afianzadas en la propuesta de un recorrido."*

**Fuente:** Protocolo del estudiante *EPM*<sub>1</sub>.

*"Cuando comenzamos la cursada de didáctica, estaba muy desorientada porque suponía encontrarme una cursada parecida a la de didáctica I, pero no fue así. No sabía por qué teníamos que estudiar economía, sino lo necesitábamos para poder construir conocimiento matemático en la escuela. La primera pregunta me desorientó tanto que creo que la primera hora no hicimos nada con *EMP*<sub>1</sub> solo buscábamos en Internet. Pero a medida que fuimos leyendo los artículos propuestos por la cátedra fui entendiendo lo que estábamos haciendo y la importancia de articular los conocimientos con otra área y no que solo sea matemática. También, ahora que ya estamos terminando, considero que es importante que nosotros, como futuros docentes, conozcamos las investigaciones que se hacen actualmente sobre la educación; más allá del paradigma que decidamos tomar cada uno en nuestra práctica docente."*

*"También considero pertinente el hecho de vivir un REI, dado que si el día de mañana lo queremos implementar tendremos un indicio de qué es lo que pueden sentir nuestros alumnos. Me pareció una experiencia muy buena y muy provechosa para nuestra formación."*

**Fuente:** Protocolo del estudiante *EPM*<sub>1</sub>.

Los estudiantes ponen de manifiesto la sorpresa y la frustración inicial ante la dinámica de estudio propuesta en el curso. Esta es una actitud natural frente a lo desconocido, pues ellos nunca habían experimentado una enseñanza por investigación o similar en toda su formación. Por otro lado, los EPM valorizan la relevancia de haberse involucrado en esta experiencia e intentar estudiar una matemática mixta, funcional a otras disciplinas. Esta predisposición de los EPM es destacable, pues encuentran interesante estudiar otras disciplinas que utilizan la matemática, considerando que toda la formación que han recibido ha sido en matemática pura.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se describen resultados de un curso diseñado para formar EPM de matemática, cuyo propósito es introducirlos en el paradigma de enseñanza basado en la investigación y el cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2012), que además recupera el sentido de las matemáticas escolares a partir de las matemáticas mixtas, es decir funcionales a otras disciplinas. En este curso, los EPM pudieron realizar algunos gestos esenciales del paradigma de la investigación (Corica & Otero, 2015a). Los EPM lograron proponer dispositivos didácticos para la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, que permitirían realizar algunos gestos de una enseñanza basada en el paradigma de la investigación. Las propuestas se inician con preguntas relativamente abiertas, cuyo estudio encuentra sentido en algunas necesidades sociales, y que podrían engendrar el estudio de nuevas preguntas, cuyas respuestas involucran el estudio de organizaciones matemáticas y de otras disciplinas. Esto resulta ser positivo porque las propuestas se involucran con la dialéctica del estudio y la investigación, que resulta ser fundamental en una enseñanza por investigación y permite distanciarse del paradigma de la enseñanza tradicional.

El dispositivo didáctico que propuso el Grupo 1 se compone de pares de preguntas y respuestas. Los EPM las formulan con el objetivo de vincular la propuesta con organizaciones matemáticas propias del Diseño Curricular. Su principal preocupación, reside en reducir las preguntas para estudiar solo las organizaciones matemáticas que se encuentran en el currículo, y se cuestionan acerca de cómo diseñar situaciones para recorrerlas. Este hecho supone una cierta declinación hacia el paradigma tradicional, no porque los EPM insistan en que los estudiantes se apropien de un saber específico, sino porque ellos pretenden que esto se alcance a partir de una situación dominada por la perspectiva del profesor.

La propuesta de los EPM permitiría realizar los gestos propios de la dialéctica del estudio e investigación, pero se va diluyendo durante el desarrollo. Así mismo, esto afecta a la dialéctica del individuo y el colectivo y a la dialéctica de los media y los medios. Pues, la elaboración del medio es condicionada por los EPM quienes solo están dispuestos a estudiar lo establecido en el diseño curricular, en lugar de ser el producto del estudio y acuerdo de toda la comunidad de estudio. La razón de esta dificultad que consiste en reducir el estudio de las preguntas en función de lo establecido en el currículo podría deberse a:

- Una concepción epistemológica de la matemática de los EPM, que implícitamente consideran a la matemática como pura. Es decir, los EPM aún no comprenden plenamente que la enseñanza de la matemática trata con las transformaciones del saber matemático. Por el contrario, como es predominante en casi toda la institución que los ha formado, el saber es considerado incuestionable, transparente. En correspondencia con lo anterior, el desconocimiento de la matemática escolar y no escolar, que deja a los EPM *presos* del currículo de matemática al que no conciben como necesario cuestionar, y que a su vez acota sus problemas de desconocimiento del saber dándoles una relatividad y previsibilidad.
- Debido a su situación formativa, y a su inexperiencia, los EPM enfrentan serias dificultades para concebir cómo construir el medio, habida cuenta de que en el paradigma propuesto por la TAD se trata de una construcción colectiva y no solo, una responsabilidad y un *privilegio* del profesor.

El curso en que participaron los EPM fue el primero de su formación, que los involucró en el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo, y fue receptado de manera positiva. Sin embargo, esta única experiencia es insuficiente para cuestionar su vasta experiencia en una formación gobernada por el paradigma tradicional. En consecuencia, es evidente la relevancia de tratar de involucrar a los EPM en experiencias que los aproximen al paradigma de investigación en todo su proceso formativo matemático y didáctico-matemático. Esto les permitiría adquirir una concepción epistemológica diferente del saber matemático y de las ciencias exactas en general, y los equiparía mejor para elaborar, readaptar y gestionar dispositivos didácticos acordes con la enseñanza por investigación. Aun así, es importante no perder de vista que las posibles respuestas a la pregunta ¿cómo tendría que ser la formación profesional de los profesores de matemática? está lejos de ser respondida -siempre de manera incompleta, e inacabada- por la comunidad que tiene la mayor responsabilidad en estudiarla, que es la comunidad de los didactas.

A partir de los resultados de esta investigación parece importante que los EPM exploren la importancia de la matemática para resolver cuestiones de interés social, evidenciando su utilidad e interés. También sería deseable que la formación profesional empodere a los EPM para dirigir procesos de estudio que se organicen en función a los problemas que emergen durante el mismo, evitando seguir exclusivamente la lógica de los diseños curriculares y cuestionando la matemática que estos proponen y la forma en que la organizan.



## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339-352.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado desde <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) *Un panorama de la TAD* (pp. 23-32). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica. Documents.
- Chevallard, Y. (2012). *Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm*. Recuperado desde <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2013a). *Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement*. Recuperado desde <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2013b). *Éléments de didactique du développement durable. Leçon 3*. Recuperado desde <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (Ed.). (2016, enero). Praxeological issues in the development, reception and use of ATD. 5° Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Congreso llevado a cabo en la conferencia de Universidad Complutense de Madrid, Madrid.
- Corica, A. & Otero, M. (2015a). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *BOLEMA*. En prensa.
- Corica, A. & Otero, M. (2015b). The mathematics teacher's profession: the perspective of future, for that you consider submitting to assessment. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(2), 145-158.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teacher (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.
- Fonseca, C. (2011). Los recorridos de estudio e investigación en las escuelas de ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 547-580.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION*, 20, 13-31.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Llanos, V. & Otero, M. (2012). Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones. *UNIÓN*, 31, 45-63.
- Otero, M., Fanaro, M., Corica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P. & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Dunken.
- Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. Recuperado desde <http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>

- Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.) *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. (2006). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. profesorado. *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9(2), 1-30.
- Thompson, P. W., Carlson, M. P. & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 415-432.
- Torres-Degró, A. (2011). Tasas de crecimiento poblacional (r): una mirada desde el modelo lineal, geométrico y exponencial. *CIDE digital*, 2(1), 142-160.