Análisis Filosófico
ISSN: 0326-1301
af@sadaf.org.ar
Sociedad Argentina de Análisis Filosófico
Argentina

BARRIO, EDUARDO ALEJANDRO
TEORÍAS DE LA VERDAD SIN MODELOS ESTÁNDAR: UN NUEVO ARGUMENTO PARA ADOPTAR JERARQUÍAS
Análisis Filosófico, vol. XXXI, núm. 1, mayo, 2011, pp. 7-32
Sociedad Argentina de Análisis Filosófico
Buenos Aires, Argentina

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=340030303001

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

TEORÍAS DE LA VERDAD SIN MODELOS ESTÁNDAR: UN NUEVO ARGUMENTO PARA ADOPTAR JERARQUÍAS[1]

EDUARDO ALEJANDRO BARRIO
Universidad de Buenos Aires - CONICET - GAF

Resumen

En este artículo, tengo dos objetivos distintos. En primer lugar, mostrar que no es una buena idea tener una teoría de la verdad que, aunque consistente, sea omega-inconsistente. Para discutir este punto, considero un caso particular: la teoría de Friedman-Sheard FS. Argumento que en los lenguajes de primer orden omega inconsistencia implica que la teoría de la verdad no tiene modelo estándar. Esto es, no hay un modelo cuyo dominio sea el conjunto de los números naturales en el cual esta teoría de la verdad pueda tener una interpretación consistente. En ese sentido, la introducción del predicado veritativo no mantiene la ontología estándar. Además, cuando se considera un lenguaje de orden superior, la situación es aún peor. En teorías de segundo orden con semántica estándar, la misma introducción produce una teoría que no tiene modelo. Por eso, si la omega-inconsistencia es un mal síntoma, la insatisfacibilidad de una teoría es aún peor. En segundo lugar, propongo abandonar el principio de unión de teorías FS_n y aceptar una extensibilidad indefinida de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, … . De acuerdo a mi punto de vista, la secuencia de teorías tiene las mismas virtudes que FS sin sus desagradables consecuencias.

PALABRAS CLAVE: Verdad; Omega-inconsistencia; Modelos no-estandar.

Abstract

In this paper, I have two different purposes. Firstly, I want to show that it's not a good idea to have a theory of truth that is consistent but omega-inconsistent. In order to bring out this point, it is useful to consider a particular case: FS (Friedman-Sheard). I argue that in *First-order languages* omega-inconsistency implies that a theory of truth has

[1] Este artículo fue escrito durante mi estadía como profesor visitante del MIT, luego de haber obtenido la *Beca Thalmann* de la UBA. Quiero expresar mi agradecimiento tanto a Vann McGee como a Agustín Rayo con quienes compartí no sólo las ideas que aquí se presentan, sino las innumerables estimulantes reuniones en el Departamento de Lingüística y Filosofía. Distintas versiones fueron presentadas en la UAM, México, en la Universidad de Valparaíso, Chile, en el primer encuentro de *Alfan*, Mérida, México, en la USP, Sao Paulo y en el *seminario* TEP, de la UBA. Quiero agradecer a los integrantes de esas audiencias. Por último, quiero expresar un especial agradecimiento a Jose Díez, Volker Halbach, Oystein Linnebo, Ignacio Ojea, Lavinia Picollo, Graham Priest y al réferi anónimo de *Análisis Filosófico*. Este trabajo obtuvo el "Premio Eduardo Rabossi 2010", en la categoría de "Investigadores Formados", otorgado por SADAF.

not standard model. Then, there is no model whose domain is the set of natural numbers in which this theory of truth could acquire a consistent interpretation. So, in theories of truth without standard models, the introduction of the truth-predicate to a first order theory does not maintain the standard ontology. I add that in *Higher-order languages* the situation is even worst. In second order theories with standard semantic the same introduction produces a theory that doesn't have a model. So, if an omega-inconsistent theory of truth is bad, an unsatisfiable theory is really bad. Secondly, I propose to give up the union principle of theories FS_n and accept an indefinite extensibility of theories FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, … According to my view, the sequence of theories has the same virtues of FS without its disgusting consequences.

KEY WORDS: Truth; Omega-Inconsistency; Non-Standard Models.

En este artículo, tengo un doble objetivo. Por un lado, muestro serias dificultades vinculadas con la adopción de una teoría de la verdad ω-inconsistente. En este sentido, analizo la teoría Friedman-Sheard conocida como *FS*.[2] Una característica central de *FS* es explicar el comportamiento del predicado veritativo respecto de los conectivos lógicos y los cuantificadores aún para fórmulas que contienen el mencionado predicado. Y su principal virtud es hacerlo sin abrir un hiato entre lo que se afirma dentro de la teoría y lo que se muestra desde afuera. Por eso, *FS* es una teoría clásica de la verdad.[3] Sin embargo, dado que se puede probar que es una teoría ω-inconsistente, *FS* carece de modelos estándar. Basado en este resultado, argumento que a pesar de sus virtudes, no es una buena idea adoptar *FS* como una representación adecuada de la verdad aritmética.[4] En esta dirección, muestro que agregar los axiomas característicos de *FS* a *PA*[1] produce una *drástica*

[2] Friedman y Sheard fueron los primeros en axiomatizar un sistema axiomático que prueba exactamente los mismos teoremas que *FS*. Sin embargo, ellos usan diferentes axiomas a los empleados en este artículo. Halbach presenta la axiomatización que uso en mi texto y prueba que ambas presentaciones son equivalentes. Friedman y Sheard (1987) y Halbach (1994).

[3] Esta característica diferencia crucialmente a *FS* de otras axiomatizaciones que al igual que ella permiten iteraciones del predicado veritativo. Teorías como *KF* (Kripke y Feferman) o *VF* (Cantini) son propuestas como axiomatizaciones de la teoría de puntos fijos de Kripke. En ambos casos, las interacciones entre el predicado de verdad, el de falsedad y la negación producen una disociación entre lo que se afirma como teorema dentro de la teoría y lo que su semántica expresa por fuera de la teoría.

[4] En la misma dirección, en otro trabajo he argumentado que la formalización de la serie de oraciones de Yablo a través de bicondicionales propuesta por Ketland, produce desórdenes expresivos como para desconfiar acerca de que el presunto predicado veritativo exprese legítimamente el predicado veritativo de la aritmética. *Cf.* Barrio (2010).

desviación en los modelos de la aritmética.[5] Más aún, sostengo que cuando ese movimiento se hace respecto de PA^2 con semántica estándar, dado el resultado de categoricidad de sus modelos, la teoría resultante es insatisfacible. Parte de mis motivaciones aquí son mostrar que si bien los axiomas de característicos *FS* no producen inconsistencias, el resultado de trabajar en orden superior, provoca cierta "inconsistencia" semántica. Por otro lado, defiendo una concepción tarskiano-jerárquica sobre la verdad. Esto es, ya que *FS* es la superteoría $\cup$ FS_n, n $\in \omega$, sostengo el abandono del *principio de unión* de teorías $\mathrm{FS_n}$ y la adopción de una suerte de *extensibilidad indefinida* de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, . La serie completa de teorías tiene las virtudes de *FS* sin sus desalentadoras consecuencias. Muestro que mi propuesta es compatible con cierta versión del optimismo semántico: dada una teoría arbitraria FS_n, siempre es posible disponer de otra teoría FS_{n+1} capaz de probar como teoremas la verdad de fórmulas que FS_n ha declarado teoremas (incluso aquellas que tienen n apariciones del predicado veritativo). De esta manera, mi propuesta obtiene el efecto de generalidad que tiene FS evitando su ω-inconsistencia.

I. Axiomatizando la verdad aritmética

Sea L_{PA} el lenguaje de primer orden de la aritmética con símbolos suficientes como para expresar todas las funciones recursivas primitivas. Sea L_T una expansión de L_{PA} resultante de agregar un nuevo predicado primitivo *Tr*. L_T puede ser completamente gödelizado, es decir, todas sus expresiones se pueden representar por medio de un número de Gödel. Sea $\ulcorner\alpha\urcorner$ el número de Gödel de α. Consideremos a un lenguaje como un conjunto de fórmulas. En este sentido, L_T será un conjunto de números naturales. Sea PA^1 la aritmética de Peano expresada en L_{PA}. Para formular los axiomas necesarios para caracterizar el comportamiento del predicado *Tr*, necesitamos algunos predicados en L_{PA} que hablen (que representen fuertemente) de ciertas propiedades de expresiones de L_{PA}. Sea $\mathrm{Sent_{LPA}}(x)$ una fórmula que expresa en L_{PA} la propiedad de ser una oración de L_{PA}. Similarmente, $\mathrm{At_{LPA}}(x)$ significa que x es una oración

[5] Por supuesto, mi punto intentará enfatizar que agregar axiomas característicos para el predicado veritativo de PA^1 no debería alterar el tipo de modelo que satisface los axiomas de la aritmética. Esto es, tratándose de axiomatizar el comportamiento del predicado veritativo, el agregado de los mencionados axiomas a una teoría que tenía tanto modelos estándar como no estándar produce una nueva teoría que sólo tiene modelos no estándar.

atómica de L_{PA} y Ver(x) que x es una oración atómica verdadera de L. Si a es una fórmula con una variable libre, el término ⌈a(dot(x))⌉ se construye a partir de las expresiones que permiten expresar las funciones recursivas primitivas. ⌈α(dot(x))⌉ es un término de función, con la variable x libre, cuyo significado es 'el resultado de sustituir el numeral del número x por todas las variables libres en la fórmula α'. Más precisamente, ⌈α(dot(x))⌉ puede ser definido como *sub(num(x)*, ⌈*α(x)*⌉, donde el término de función *sub(x, y)* significa 'el resultado de sustituir x por todas las variables libres en *y*' y *num(x)* significa 'el numeral de *x*'. La notación *dot* ha sido desarrollada por Feferman [6] como un recurso para cuantificar desde afuera en contextos donde aparece ⌈…⌉.

La manera más natural de obtener una axiomatización del predicado veritativo de L_{PA}, consiste en agregar a PA^1 todas las instancias del esquema T sin restricción alguna. Esto es, considerar la teoría

$$PA^1 \cup \{\mathrm{Tr}\ \ulcorner\alpha\urcorner \leftrightarrow \alpha,\ \alpha \in \mathrm{L_T}\}$$

Tarski probó[7] que una teoría cualquiera que incluya entre sus consecuencias todas las instancias del esquema T (full T-schema) e implique ciertas verdades básicas de la aritmética (en particular, cumpla el lema de diagonalización), debe ser inconsistente. Por este motivo, el modo más natural de proceder es inaceptable.

Un resultado sorprendente vinculado con la búsqueda de una axiomatización consistente del predicado veritativo de la aritmética que a la vez preserve algún vínculo con el esquema T fue desarrollado por McGee.[8] Él demostró que hay una cantidad infinita de diferentes conjuntos maximales de instancias de bicondicionales T que pueden ser agregados consistentemente a PA^1. Esto es, aunque ninguna teoría consistente puede cumplir las condiciones de Tarski, hay infinitas axiomatizaciones de la verdad todas ellas consistentes con la aritmética de Peano. La cuestión, entonces es ¿cómo elegir entre todas ellas? Necesitamos *criterios* para seleccionar axiomatizaciones consistentes del predicado veritativo que reflejen adecuadamente las principales características del predicado veritativo de la aritmética.[9] ¿Qué es lo que quisiéramos afirmar acerca de la verdad? Es decir, ¿qué teoremas debemos demostrar dentro de una teoría que involucre el predicado

[6] Feferman (1991, p. 13).
[7] Tarski (1956).
[8] McGee (1992).
[9] Para una discusión sobre posibles criterios, véase Sheard (1994) y Leitgeb (2007).

veritativo (de la aritmética o de la lógica)? El lema de diagonalización es usado de manera crucial en la demostración del resultado de Tarski. Por supuesto, el teorema se puede demostrar en PA^1 . Por esta razón, es obvio que hay que limitar las aplicaciones de este resultado sobre el predicado veritativo. Esto es, hay que restringir las instancias de T, de manera tal que no se las tenga a todas. Una alternativa es que el predicado veritativo, no siendo un predicado aritmético, deje de cumplir diagonalización. Esto se logra adoptando una teoría que posea axiomas que permitan probar la verdad de oraciones que no contengan ellas mismas el predicado veritativo. Otra alternativa es permitir que el predicado veritativo cumpla diagonalización, pero restringir las instancias del bicondicional T. Las axiomatizaciones autoreferenciales de la verdad siguen esta estrategia. La idea, en ambos casos y con recursos completamente diferentes es evitar que la teoría resultante genere, como parte de sus teoremas, mentirosos aritméticos.

La opción más débil, que sigue la primera de las estrategias, es la teoría conocida como TD. Esta teoría comparte todos los axiomas de PA^1 a los que se agrega un conjunto limitado de instancias de bicondionales T.

$$PA^1 \cup \{\mathrm{Tr}\ \ulcorner\alpha\urcorner \leftrightarrow \alpha, \text{ para toda } \alpha \in L_{PA}\}^{10}$$

Ese conjunto está integrado por aquellas instancias que no cuentan con apariciones iteradas del predicado veritativo. Por esa razón, este predicado no está sujeto a diagonalización: no es un predicado para el que vale el lema de diagonalización (deductivamente, no somos capaces de probar mentirosos). Sin embargo, *TD* es fuertemente incompleta.[11] Adoptando esta axiomatización, no son capaces de probar teoremas que involucren apariciones anidadas de predicados veritativos. Y mucho peor, esa teoría no es capaz de demostrar teoremas que reflejen verdades acerca de las interacciones entre los operadores lógicos y el predicado veritativo.

Por supuesto, el *Primer Teorema de Gödel* impide que tengamos una axiomatización completa expresada en una teoría de primer orden. A pesar de lo cual lo que se espera de una teoría de la verdad es que la misma sea capaz de demostrar como teorema *todos los principios* que

[10] Algunos deflacionistas podrían sentirse tentados a adoptar *TD*. Ya que ella asigna a la verdad el único rol de predicado desentrecomillador y presumiblemente esto es suficiente para expresar discurso indirecto y hacer generalizaciones acerca de oraciones. Horwich (1990).

[11] Véase Tarski (1956) y Halbach (1999).

involucran al predicado veritativo. Y claro, la discusión es acerca de cuáles son estos principios. La intuición es que hay que agregar a *TD* ciertos axiomas que permitan demostrar teoremas que hablen de la interacción entre el predicado veritativo y los operadores lógicos. Tomemos nuevamente PA^1 y agreguemos a la misma no sólo las instancias restringidas de bicondicionales T aplicados a las fórmulas de L_{PA}, sino también ciertos axiomas sobre tal interacción. Sean estos axiomas los siguientes:

T(PA)1 $\forall x_1, \ldots, \forall x_n\, (At_{LPA}(x) \rightarrow (Ver(\ulcorner(dot(x_1),\ldots, dot(x_n)\urcorner) \leftrightarrow Tr\,(x)))$
T(PA)2 $\forall x\, (Sent_{LPA}(x) \rightarrow (Tr(\neg\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner\phi\urcorner))$
T(PA)3 $\forall x\, \forall y\, (Sent_{LPA}(x) \wedge (Sent_{LPA}(y) \rightarrow (Tr\,(\ulcorner x \wedge y\urcorner\,) \leftrightarrow (Tr(\ulcorner x\urcorner) \wedge Tr(\ulcorner y\urcorner)))$
T(PA)4 $\forall x\, (Sent_{LPA}(x) \wedge Sent_{LPA}(y) \rightarrow (Tr\,(\ulcorner x \rightarrow y\urcorner) \rightarrow (Tr\,(\ulcorner x\urcorner) \rightarrow Tr\,(\ulcorner y\urcorner))$
T(PA)5 $\forall x\, (Sent_{LPA}(x) \rightarrow (Tr\,(\ulcorner \forall x\, \phi(x)\,\urcorner) \leftrightarrow \forall x Tr\,(\ulcorner\phi(dot(x))\urcorner]))$

El primer axioma asegura que nuestro predicado veritativo para las oraciones atómicas de L_T todas las instancias del esquema T aplicables a las oraciones de L_{PA}. Los axiomas restantes aseguran que el predicado veritativo conmute de manera clásica con los operadores lógicos. En particular, el axioma 5 dice que una oración universalmente cuantificada perteneciente a L_{PA} es verdadera si y sólo si todas sus instancias numéricas son verdaderas.[12] Al igual que lo que hicimos en el caso de *TD*, podemos permitir también que la inducción matemática se aplique a fórmulas del lenguaje L_T. La teoría axiomática resultante es conocida como *T(PA)*. La misma tiene ciertas virtudes que TD no tiene. En primer lugar, prueba un primer *Principio de Reflexión global* para PA^1 : si una fórmula es demostrable en PA^1, es declarada verdadera dentro de *T(PA)*.

Principio de Reflexión $\forall x\, (Sent_{LPA}(x)\ \&\ Bew_{PA}{}^1(x) \rightarrow Tr(x))$

Los principios de reflexión son llamados de esta manera porque no se obtienen directamente de PA^1, sino reflexionando acerca del hecho de que estamos dispuestos a reconocer como verdadera a la mencionada teoría. Nuestra disposición conciente a aceptar una teoría, nos conduce a afirmar que si una fórmula es demostrable dentro de la misma, es verdadera. La aritmética no tiene capacidad probatoria para su propio principio de reflexión. Pero, parece razonable admitir que una

[12] Nótese la semejanza entre este axioma y la fórmula de Barcan de la lógica modal de primer orden.

axiomatización adecuada de la verdad aritmética debería incluirlo como parte de lo que se afirma dentro de la teoría.[13]

Por el Primer Teorema de Incompletitud de Gödel, si PA^1 es consistente, no puede probar la oración de Gödel.

$$G: \quad \exists y \, \mathrm{Bew}_{(PA^1)}(\ulcorner G \urcorner, y)$$

Pero, *G* es verdadera. Entonces *G* verdadera, pero no probable. Por eso, PA^1 es incompleta. Y ya que se puede demostrar en PA^1 que *G* es equivalente a *Con*.

$$Con: \quad \neg \exists y \, \mathrm{Bew}_{(PA^1)}(\ulcorner 0=1 \urcorner, y)$$

dado que *G* no es probable, *Con* tampoco lo es, aún siendo verdadera, tal como establece el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. *T(PA)* tiene la virtud de demostrar como teorema la oración de Gödel de PA^1 y por lo tanto, su consistencia. Ambos teoremas parecen deseables de ser obtenidos dentro de una axiomatización de la verdad aritmética. No obstante, el incremento en la capacidad de demostrar teoremas respecto de la aritmética, puede tener un costo. Es claro que *T(PA)* no es una extensión conservativa respecto de PA^1. Que una teoría de la verdad sea conservativa respecto de PA^1 está vinculado con la intuición según la cual la verdad aritmética superviene en la aritmética.[14] Es interesante notar que la no conservatividad de *T(PA)* es el resultado de haber permitido aplicar inducción matemática a fórmulas que contengan el predicado veritativo. Si este recurso es eliminado, la teoría resultante (conocida como *T(PA)I*) es conservativa respecto de PA^1.[15] De esta manera, se asegura que los principios de la verdad que se han agregado sean inocuos, es decir, que no tengan poder explicativo acerca de la teoría a la cual se aplican.

[13] Por supuesto, limitaciones vinculadas al *Teorema de Löb* impiden que el mismo requerimiento se itere sobre *T(PA)*. Esta teoría no puede probar su propio *principio de reflexión*. De esta manera, el camino parece ser jerárquico: adoptar una jerarquía de teorías capaces de probar principios de reflexión para los niveles inferiores.

[14] Shapiro y Ketland sostienen que los deflacionistas sólo deberían adoptar axiomatizaciones conservativas: si la verdad no tiene poder explicativo, no debería permitirnos probar más teoremas que los que ya pueden probarse en la teoría a la que se agregan los axiomas que regulan al predicado veritativo. Field, en cambio, sostiene que la conservatividad o no de una teoría nada tiene que ver con el deflacionismo. Probar teoremas no es una propiedad substancial. Por eso, es perfectamente admisible adoptar *T(PA)* y ser deflacionista. Para apreciar los puntos salientes de esta discusión, Véase Shapiro (1983), Shapiro (1998). Ketland (1999), Field (1999) y Field (2006).

[15] Este resultado es probado en Halbach (1999).

A pesar de todo lo anterior, ni *T(PA)* ni *T(PA)I* pueden expresar la verdad de sus propios teoremas. Esto es, son teorías que al no poseer axiomas que regulen el funcionamiento de las iteraciones del predicado veritativo, no son capaces de representar como verdaderas, las fórmulas que ellas prueban. En este sentido, podríamos explorar la posibilidad de liberarnos de la restricción de no permitir iteraciones del predicado verdad y adoptar la segunda estrategia. Un intento natural para "completar" estas teorías podría consistir en agregar a las mismas el siguiente axioma de iteración:

$$\forall x\, (\mathrm{Sent}_{LPA}(x) \rightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(x)) \rightarrow \mathrm{Tr}(x)))$$

Desafortunadamente, este axioma es incompatible con los de *T(PA),* ya que conduce a inconsistencia. Esta puede demostrarse fácilmente aplicando el Lema diagonal de Gödel a un término cerrado de L_{PA1} de manera tal que $\lambda \leftrightarrow \neg\ \mathrm{Tr}\ (\lambda)$. Empleando el axioma 2 de *T(PA)* se obtiene una contradicción dentro de la teoría extendida con el axioma iterativo.[16] Por eso, si se desea tener una teoría axiomática de la verdad que demuestre teoremas que regulen el comportamiento iterativo del predicado veritativo de la aritmética el camino tiene que ser otro.

Otro intento para producir una teoría con teoremas que permitan iteraciones del predicado veritativo consiste en agregar reglas de inferencia que permitan introducir o eliminar el predicado veritativo a fórmulas que han sido demostradas como teoremas. Por ejemplo, agregar a la base axiomática *T(PA),* una regla como *Nec*,

$$\frac{\alpha}{\mathrm{Tr}\ulcorner a \urcorner}$$

Sin embargo, hay que comportarse con cuidado. El resultado limitativo de Tarski ha sido fortalecido años más tarde por Montague.[17] Él mostró que hace falta adoptar menos recursos que aceptar todas las instancias del esquema T para obtener una teoría inconsistente. Esto es, dada una teoría cualquiera, Montague estableció que si esa teoría es cerrada bajo la relación de consecuencia lógica clásica, y contiene la regla *Nec*, entonces si tiene la dirección izquierda derecha irrestricta del esquema T:

[16] Para una prueba rigurosa, véase Halbach (1994).
[17] Montague (1966).

$$\mathrm{Tr}(\ulcorner\alpha\urcorner) \to \mathrm{a},$$

la teoría es inconsistente. De esta manera, si queremos agregar a *T(PA)* una regla como *Nec*, estamos obligados a rechazar la aplicación irrestricta de la dirección izquierda derecha del esquema T.

Sea *FS* la teoría que comparte todos los axiomas con *T(PA)*, liberalizando el predicado Sent_{LPA} a Sent_{T} (lo cual permite aplicar los axiomas esquemas a oraciones que contengan apariciones iteradas de Tr) y las dos reglas de inferencia adicionales:

Nec	CoNec
ϕ	$\mathrm{Tr}(\ulcorner\phi\urcorner)$
——	——
$\mathrm{Tr}(\ulcorner\phi\urcorner)$	ϕ

La regla Nec recuerda la regla de necesitación de la lógica modal. Por supuesto, *FS* no cuenta como axioma la dirección izquierda derecha del esquema T.[18] FS describe la noción *clásica de verdad*, ya que toda oración de L_T es verdadera o su negación lo es.

Completitud $\forall x\, (\mathrm{Sent}_T(x) \to (\mathrm{Tr}(\ulcorner x\urcorner) \vee \mathrm{Tr}(\ulcorner\neg x\urcorner))$

Además, es capaz de probar que una oración no puede ser verdadera junto con su negación (gaps y gluts están excluidos).

Consistencia $\forall x\, (\mathrm{Sent}_T(x) \to \neg\, (\mathrm{Tr}(\ulcorner x\urcorner) \wedge \mathrm{Tr}(\ulcorner\neg x\urcorner))$

Y lo que es aún más importante su lógica interna y externa coinciden. Esto es para toda oración del lenguaje L_T, todo lo que es demostrable dentro de *FS* es declarado verdadero. *FS* permite probar largas iteraciones de predicaciones de verdad. De hecho, permite iterar el predicado de verdad hasta niveles transfinitos.

Nótese, además, que *FS* incluye a *T(PA),* esto es, todo lo que esta última teoría puede demostrar como teorema también puede ser demostrado en *FS*. En particular, *FS* puede demostrar como teorema la

[18] Nótese que aceptar las reglas *Nec* y *CoNec* no tiene las mismas consecuencias que aceptar todas las instancias irrestrictas del esquema T. En particular, si bien *FS* acepta *CoNec*, rechaza la dirección de izquierda a derecha del mencionado bicondicional. Esto es determinante para evitar la generación de inconsistencias dentro de *FS*.

oración de Gödel de *PA*[1]. Y por supuesto, la capacidad de prueba de *FS* es enorme. También puede demostrar como teorema la oración de Gödel de *T(PA)*. Claro que esto no significa que pueda demostrar su propia oración de Gödel, ya que en este caso se estaría violando el primer teorema de Gödel. Es decir, obviamente, *FS* no es una teoría completa, ya que no puede demostrar como teorema todas las verdades acerca de las oraciones de la aritmética. En particular, no puede demostrar como teorema su propia oración de Gödel. Y como hemos visto, esto es equivalente a no poder demostrar su propia consistencia.

Ahora bien, los resultados limitativos de Tarski y Montague nos han marcado una dirección en la búsqueda de una teoría axiomática de la verdad que al menos respete el esquema T para las oraciones de L_{PA}, permita demostrar teoremas acerca de la interacción del predicado veritativo y los operadores lógicos, su lógica interna y externa coincidan y sea capaz de expresar a través de sus teoremas iteraciones del predicado veritativo. *FS* es capaz de hacer todo lo anterior. Por lo cual, podríamos estar tentados a evaluarla como una teoría adecuada del predicado veritativo de la aritmética. No obstante, mi propósito es argumentar lo contrario. Desde mi perspectiva, tal axiomatización de la verdad posee serios problemas que le impiden ser reconocida como una buena teoría acerca de la verdad.

II. Teorías de la verdad que son ω-inconsistentes

McGee[19] ha continuado la dirección trazada por Tarski y Montague. Él ha probado que una teoría Γ que cumpla diagonalización, la regla de Nec, y todas las instancias de los siguientes axiomas,

(i) Distribución de Tr respecto del condicional:

$$\forall x\, (\mathrm{Sent_T}(x) \wedge \mathrm{Sent_T}(y) \rightarrow (\mathrm{Tr}\,(\ulcorner x \rightarrow y \urcorner) \rightarrow (\mathrm{Tr}\,(\ulcorner x \urcorner) \rightarrow \mathrm{Tr}\,(\ulcorner y \urcorner))$$

(ii) Barcan:

$$\forall x\, (\mathrm{Sent_T}(x) \rightarrow (Tr\,(\ulcorner \forall x\, \phi(x)\ \urcorner) \leftrightarrow \forall x Tr\,(\ulcorner \phi(\mathrm{dot}(x)) \urcorner])$$

(iii) $\forall x\, (\mathrm{Sent_T}(x) \rightarrow (\mathrm{Tr}\,(\ulcorner \neg x \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Tr}\,(\ulcorner x \urcorner)))$

es ω-inconsistente. Sea ϕ una condición cualquiera. Recordemos que una teoría es ω-inconsistente si y sólo si es capaz de generar la lista infinita

[19] McGee (1985).

de teoremas de la forma 0 es ϕ, 1 es ϕ, 2 es ϕ, ..., pero también puede demostrar que $\exists x \neg \phi x$.

No es difícil advertir que *FS* es una teoría de la verdad cuyos axiomas cumplen las condiciones del *Teorema de McGee*.[20] Sin entrar en los detalles formales que muestren que *FS* es ω-inconsistente,[21] para nuestros propósitos es suficiente decir que dicha teoría es capaz de generar como teorema un mentiroso "infinito" s (conocida como la oración de McGee) que intuitivamente dice de sí misma: "No toda aplicación iterada del predicado veritativo a mi nombre es verdadera":

Oración de McGee $\sigma \leftrightarrow \neg \forall x\, Tr(f(x,\ulcorner\sigma\urcorner))$

donde *f* denota la función F en la cual F(n, código (α)) es el número de Gödel de la oración que aplica n-veces el predicado veritativo al número de Gödel de α. La existencia de esta oración está garantizada por el *Lema Diagonal*. Restringiendo el número de aplicaciones de las reglas NEC y CoNec, se pueden obtener subsistemas de *FS*: FS_0 no admite ninguna aplicación y por lo tanto, coincide con PA^1, FS_1 queda definida como el subsistema de *FS* tal que contiene todos los axiomas de PA^1 y los axiomas de *T(PA)* que regulan el comportamiento del predicado veritativo respecto de los operadores lógicos y el siguiente axioma:

$$\forall x\, (Sent_{LPA}(x) \rightarrow (Bew_{(PA^1)}(x) \rightarrow Tr(x)))$$

Esto es, FS_1 es *T(PA)*.[22] FS_2 se obtiene agregando las reglas Nec y CoNec pero restringiendo su uso a una aplicación. En general, para n > 1, los sistemas FS_n son como *FS* con la excepción de que en FS_n la regla NEC puede ser aplicada a lo sumo n – 1 oraciones distintas.[23] Obviamente, una

[20] Hay dos maneras de demostrar este resultado. Originalmente, McGee usó recursos de teoría de la prueba para hacer una demostración formal del mismo. Más adelante, Halbach usó recursos de la teoría de modelos para obtener un resultado similar. *Cf*. McGee (1985) y Halbach (1994).

[21] Los mismos pueden verse en Halbach (1994) y en Friedman y Sheard (1987).

[22] Este principio de reflexión garantiza que los teoremas de PA^1 sean declarados verdaderos en FS_1. Lo cual, sumados a los axiomas que explican el comportamiento del predicado veritativo respecto de los operadores lógicos, garantiza que exista una única manera de construir el tipo de serie cuya unión es *FS*. Agradezco al réferi de *Análisis Filosófico* el pedido de aclaración.

[23] Es conveniente adoptar un cálculo axiomático lineal para tales sistemas. De esa manera, las pruebas no tienen que ser repetidas. Si en cambio se adoptara un sistema de deducción natural, NEC podría haber tenido que ser aplicada más de una vez en la misma oración. Por supuesto, lo mismo vale para CONEC.

fórmula es demostrable en *FS* si y sólo si hay un número n tal que n es el número de veces que se aplican las mencionadas reglas y esa fórmula es demostrable en FS_n. Ahora bien, como hemos visto, el *lema diagonal*, permite obtener en *FS* la oración de McGee

$$\sigma \leftrightarrow \neg \forall x\, Tr(f(x,\ulcorner\sigma\urcorner))$$

Pero FS_1 prueba como teorema

$$\neg\ \sigma \rightarrow Tr(\ulcorner\sigma\urcorner)$$

y por una aplicación de Nec, tenemos que es un teorema de FS_2

$$Tr(\ulcorner\sigma\urcorner) \rightarrow \sigma$$

Y por eso tenemos que es un teorema *en* FS_2

$$\sigma$$

Por iteradas aplicaciones de NEC obtenemos en FS_3 que es un teorema

$$Tr(f(0,\ulcorner\sigma\urcorner))$$

Y en FS_4 , que es un teorema

$$Tr(f(1,\ulcorner\sigma\urcorner))$$

Y en FS_5 que es un teorema

$$Tr(f(2,\ulcorner\sigma\urcorner))$$

Etc. Esta lista de teoremas junto con la oración de McGee muestran que *FS* es ω-inconsistente.[24]

Este resultado implica que *FS* carece de cierto tipo de modelo. Por los trabajos de Skolem, y como consecuencia directa de que las teorías de primer orden son compactas, sabemos que PA^1 tiene modelos no estándar. Un modelo no estándar de PA^1 es un modelo cuyo dominio contiene números no estándar. El modelo estándar de la aritmética tiene como

[24] Para una prueba alternativa que usa modelos de revisión véase Halbach (2011, p. 169-173).

dominio el conjunto de los números naturales {0, 1, 2, …}. Los elementos de cualquier modelo de PA^1 están linealmente ordenados y poseen un segmento isomórfico a los números naturales estándar. Un modelo no estándar es uno que tiene elementos adicionales fuera de este segmento inicial. Por supuesto, PA^1 no tiene capacidad expresiva suficiente como para señalar o aún garantizar la existencia de estos elementos adicionales. Es sólo visto "desde afuera", asumiendo la teoría de conjuntos, que podemos mostrar la existencia de estos elementos "ajenos" en el dominio. Nada hay de "malo" en estos modelos. Incluso, han tenido muchísimas aplicaciones útiles dentro de la matemática. Más aún, dado un modelo no estándar de PA^1, usando aritmetización, es posible generar oraciones de un lenguaje no estándar.[25] Sea una clase de satisfacción *[satisfaction class]* un conjunto de oraciones no estándar que respeta la definición tarskiana de verdad. Kotlarski, Krajewski and Lachlan, trabajando sobre lenguajes no estándar, probaron que un modelo contable de PA^1 admite una *clase de satisfacción* si y sólo si es *recursivamente saturado*.[26] Por supuesto, este resultado indica cómo dar una explicación del comportamiento del predicado veritativo incluso en lenguajes generados a partir de los mencionados modelos. Y claro, no sólo PA^1 tiene modelos no estándar, la teoría de conjuntos axiomatizada en primer orden y toda teoría consistente que cumpla compacidad los tendrá. En este sentido, se sigue lo mismo para FS. No obstante, el problema que voy a señalar respecto de FS no radica en que tenga modelos no estándar. Es un resultado conocido que las teorías ω-inconsistentes de primer orden no tienen *modelos estándar*. Así, a diferencia de lo que ocurre con otras teorías de primer orden y en particular con PA^1, la teoría que resulta de expandir los axiomas de la aritmética con los axiomas de FS, con el objetivo de axiomatizar el concepto de *verdad aritmética*, no se vuelve verdadera cuando el dominio del modelo es el conjunto de los números naturales estándar. Esto es, el hecho de que FS sea ω-inconsistente limita los modelos: todos sus modelos son modelos no estándar. Y por ello, si bien es satisfacible, a diferencia de lo que ocurre con PA^1, no lo es cuando la interpretación elegida es el modelo estándar de la aritmética.

III. Teorías de la verdad sin modelos estándar

Hemos visto que el Teorema de McGee limita los modelos de FS: no hay una estructura cuyo dominio sea el conjunto de los números naturales

[25] *Cf.* Robinson (1966).
[26] *Cf.* Kotlarski, Krajewski, y Lachlan (1981).

estándar capaz de satisfacer sus axiomas. La teoría es satisfacible por estructuras cuyos dominios están compuestos por números no estándar. Este resultado muestra que, al ser una teoría de primer orden, *FS* es consistente. No obstante, yo encuentro fuertes motivos para rechazar *FS*.

En primer lugar, recuérdese que *FS* se obtiene agregando axiomas a PA^1. Adoptando un punto de vista externo a la aritmética, podemos decir, usando teoría de modelos, que de acuerdo a la interpretación estándar, los axiomas de PA^1 hablan de los números naturales.[27] Esto es, si L_{PA} tiene recursos para nombrar números, los numerales 0, 1, 2, 3 refieren en la interpretación estándar a los números 0, 1, 2, 3 respectivamente. Y consideraciones similares se aplican a los predicados y términos de función que expresan conceptos aritméticos. Los cuantificadores de L_{PA} tienen como dominio de interpretación el conjunto de los números naturales. De este modo, la interpretación estándar garantiza que las fórmulas de la aritmética como '3 + 0 = 3' o '∀x (x + 0 = x)' hablen de números naturales. No obstante, como hemos visto en el punto anterior, ya que la teoría está formulada en un lenguaje de primer orden y los modelos de PA^1 no son categóricos, esa teoría tiene modelos no estándar. Pero, lo que es importante para mi punto es que PA^1 tiene modelos estándar. Ahora bien, parte de las razones acerca de la introducción de un predicado veritativo aplicable a los axiomas y teoremas de PA^1 es que los mismos resulten verdaderos en estructuras cuyos dominios están compuestos *exactamente* por los números naturales. Esto es, queremos que ciertos principios tales como '∀x (x + 0 = x)' sean verdaderos precisamente *de* los números naturales estándar.[28] Sin embargo, mientras que la parte de *FS* libre de

[27] Podría objetarse la idea según la cual existe una ontología privilegiada de la aritmética. En esta dirección, Quine, Putnam y algunos otros han sostenido que no se puede decir que la aritmética *hable* sobre los números naturales. Más aún, el hecho de que existan modelos no estándar de PA^1 mostraría que la referencia de sus términos está indeterminada, de lo que se seguiría que el *realismo semántico* es inadmisible. Más allá de si el realismo semántico es falso y de cuestiones emparentadas con la referencia, el punto alcanza para mostrar que *desde adentro de la aritmética* no podemos asegurar que sus términos refieran a lo que *pretendemos* que refieran. Sin embargo, considero que el punto no alcanza para mostrar que no es posible distinguir entre modelos estándar y no estándar. El hecho de que tengamos que adoptar más recursos expresivos que los correspondientes a los lenguajes de primer orden no me parece un obstáculo. Agradezco al réferi de *Análisis Filosófico* por haberme llamado la atención sobre este punto.

[28] Por supuesto, este deseo es compatible con la existencia de modelos no estándar para *FS* en donde sus términos tengan referencia no estándar. Mi queja con *FS* es que producto de su ω-inconsistencia no haya un modelo en donde los términos puedan tener una referencia estándar.

apariciones del predicado veritativo es satisfacible por estructuras cuyo dominio *es* el conjunto de los números naturales estándar, *FS* en su totalidad no puede serlo. Lo cual quiere decir, desde mi perspectiva, que teorías como *FS* producen una *drástica desviación de la ontología pretendida* de la aritmética. Esto es, el agregado a PA^1 de los axiomas específicos de *FS* produce una teoría cuyos modelos sólo pueden tener una ontología de números no estándar. Más aún, al limitar la familia de modelos originales capaces de satisfacer los axiomas de PA^1 resulta dudoso que *FS* pueda expresar el legítimo predicado de verdad de PA^1: por agregar los axiomas característicos de *FS* a los axiomas de PA^1 producimos una teoría que no mantiene la ontología original.[29]

Es posible pensar que una manera efectiva de bloquear mi argumentación ha sido desarrollada por Halbach y Horsten.[30] De acuerdo a sus puntos de vista, la idea de que una teoría formal como *FS* tenga que tener modelos con ciertas características es cuestionable. En esta dirección, ellos sostienen:

> We accept set theory although we cannot prove that there is any nice model for set theory. Because of Gödel's second incompleteness theorem we cannot even prove that set theory has any model.

No obstante, parece haber una enorme diferencia entre la imposibilidad de garantizar la existencia de un modelo (como sucede en el caso de la teoría de conjuntos), y la posibilidad de probar la no existencia de un tipo de modelo (como sucede en el caso de *FS* y su carencia de modelos estándar). Este punto muestra, a diferencia de lo que sucede en el caso de la teoría de conjuntos, que tenemos una prueba que limita los modelos a unos, cuyos dominios correspondientes, no pueden ser el conjunto de los números estándar de la aritmética. Enfatizando, mi argumento no es que *FS* tenga modelos raros (PA^1 también tiene modelos no estándar), sino más bien que la inclusión de sus axiomas y reglas de inferencia característicos dentro de una teoría que contiene diversos modelos, produce una limitación en estos que justamente evita que la teoría pueda hablar, a menos en una interpretación, acerca de la ontología pretendida de la teoría sobre la cual se agrega.

Nótese, de paso, que mi argumento no depende de la adopción de ningún enfoque particular acerca de la verdad.[31] Por supuesto, si hubiera

[29] Barrio (2010).
[30] Halbach y Horsten (2005).
[31] Debo esta preocupación a Ignacio Ojea Quintana.

buenos motivos para adoptar un enfoque deflacionista respecto de la verdad, estaremos tentados a sostener que el agregado de axiomas veritativos a una teoría que se tome como base (en este caso PA^1), no provocará desórdenes ontológicos de ningún tipo. Pero, en cambio, si hubieran buenos motivos para sostener un enfoque robusto acerca de la verdad, tampoco debería agradarnos el resultado. Dado que PA^1 puede hablar acerca de los números naturales, esperaríamos que los teoremas de *FS* también puedan hacerlo. Esto es, si fuesen verdaderos los teoremas de *FS*, y adoptáramos un punto de vista correspondentista respecto de la verdad, esperaríamos que los teoremas fuesen verdaderos en virtud de los números naturales estándar. Sin embargo, mi argumento muestra que tal cosa no es posible. O de otra manera, aún cuando se admita que la inclusión del predicado veritativo en una teoría pudiera producir cambios en la ontología de la teoría de base, el tipo de cambio que la adición de los axiomas de *FS* a PA^1 produce no es el que podría aceptar un defensor del enfoque correspondentista. Por lo cual, mi argumento no requiere la adopción de un punto de vista no substantivo respecto de la verdad.

En segundo lugar, la consideración de recursos de orden superior produce resultados aún peores que la carencia de modelo estándar. En este caso, el agregado a la aritmética de segundo orden PA^2 con semántica estándar [*Full-Models*][32] de los axiomas específicos de *FS* produce una teoría insatisfacible, aunque sin capacidad deductiva como para probar una inconsistencia.[33] La aritmética, formulada como una teoría de segundo orden, es categórica: dado dos modelos cualesquiera de PA^2 ellos son isomórficos.[34] El resultados de categoricidad de PA^2 nos da buenas razones para sostener que PA^2 con semántica estándar es una buena opción para representar nuestros conceptos aritméticos.[35] Sin embargo, si tomáramos PA^2 como base y agregáramos los axiomas específicos de *FS*,

[32] PA^2 es la teoría más fuerte que puede formularse en un lenguaje de segundo orden: puede cuantificar sobre cualquier conjunto numérico. Todos los modelos de PA^2 son ω-modelos. Diferentes versiones de la aritmética de segundo orden que abandonan este requisito –teorías que son construidas en lenguajes de primer orden multivariados– no son categóricos. En este sentido, PA^2 es más fuerte que ACA_0 [*arithmetical comprehension axiom with restricted induction*]. Véase Simpson (2009).

[33] Un resultado interesante vinculado a las teorías de orden superior es el siguiente: hay teorías de este tipo que son insatisfacibles, pero consistentes. Véase Picollo (2011).

[34] Para ver una prueba de este resultado, véase Shapiro (1991, pp. 82-83).

[35] Dado un dominio, en la semántica estándar, las variables de orden superior tienen como valores el conjunto potencia de ese dominio. Un modelo estándar para un lenguaje de segundo orden tiene la misma estructura que un modelo para un lenguaje de primer orden. Por eso, cuando se especifica un dominio, se especifica tanto el rango de valores de las variables de primer orden como el valor de las variables de orden superior.

obtendríamos una teoría insatisfacible. En este sentido, *FS* formulada sobre los axiomas de PA^2 no tiene modelo. Obviamente, este es un resultado realmente malo para los defensores de *FS*. Si una teoría ω-inconsistente carente de modelo estándar era una muy mala noticia, una teoría insatisfacible es una noticia aún peor.

Por supuesto, el defensor de *FS* podría impugnar el recurso a teorías de orden superior. Sin embargo, existen diversos motivos como para considerar que tal intento de bloquear mi argumento produciría inconvenientes. El más fundamental es que resulta problemático circunscribir los límites de la lógica a primer orden, e incluso delimitar claramente los bordes entre matemática y lógica. Esto es así, dado que hay diversos ejemplos que intuitivamente son considerados casos de consecuencia que no pueden ser reconstruidos como tales dentro de una teoría de primer orden. Es claro que no toda inferencia válida dentro de la matemática puede ser reconstruida como tal dentro de una teoría lógica de primer orden.[36] Más aún, por un lado, para ciertos propósitos, esta impugnación produce más daños que reparaciones. Cabe recordar que el recurso a lenguajes de orden superior parece ser una alternativa inevitable si estamos interesados en desarrollar una teoría semántica que exprese *todos los modos posibles de interpretar* un lenguaje de primer orden.[37] Asumiendo que uno de esos modos de interpretar consiste en hacer que los cuantificadores abarquen absolutamente todos los individuos, un lenguaje de primer orden admite interpretaciones que no se corresponden con ningún modelo que pueda ser expresado en un lenguaje de primer orden. La cuantificación absolutamente irrestricta requiere de un dominio que incluya todo lo que hay. Pero, ya que de acuerdo a la teoría de conjuntos no hay un conjunto universal, ningún modelo que se describa en un lenguaje de primer orden será capaz de capturar una interpretación absolutamente general del mismo. Por eso, la adopción de recursos de orden superior parece tener motivación independiente a la discusión acerca de en qué lenguaje debemos expresar una teoría adecuada de la verdad aritmética. Pero, por otro lado, el propio resultado de categoricidad de Dedekind ya puede ser considerado en sí mismo un motivo para la adopción de recursos de orden superior. El mismo brinda una razón para pensar que al adoptar recursos de orden superior encontramos una expresión más adecuada de los conceptos matemáticos. Hay oraciones formuladas en segundo orden que separan los modelos estándar de los no estándar (tienen un valor determinado para los primeros

[36] Basta recordar que Tarski utiliza la regla ω como contraejemplo a la concepción sintáctica de la noción de *consecuencia lógica*.

[37] Rayo (2006).

y el contrario para los segundos). Y no hay ninguna oración de formulada en primer orden que pueda hacer lo mismo. Recordemos que para mostrar la irreductibilidad expresiva de los lenguajes de orden superior a los de primer orden, basta encontrar oraciones formuladas en segundo orden que describan características propias de los modelos de segundo orden. Como las fórmulas de primer orden no pueden evitar ser satisfechas por modelos no estándar, la clave está en encontrar fórmulas que o bien son falsas en todos los modelos no estándar y verdaderas en los estándar o bien son verdaderas en todos los modelos no estándar y falsas en los estándar. La oración Geach-Kaplan es uno de los tantos ejemplos que podemos encontrar en esta dirección.[38]

En suma, a causa de la ω-inconsistencia, considero que *FS* tiene serios problemas: es una teoría que si bien tiene modelo, usando más recursos expresivos que los que dispondríamos desde dentro de la aritmética podemos advertir que produce dramáticas alteraciones en la ontología pretendida de la teoría para la cual se axiomatiza la verdad. Pero, si la situación en primer orden es mala, la cosa es aún peor en segundo orden: agregando los axiomas específicos de *FS* a PA^2 logramos tener una teoría insatisfacible. Esto debe hacernos dudar acerca de que *FS* pueda ser una aceptable teoría de la verdad aritmética.

IV. Extendiendo la verdad desde la aritmética

FS es una teoría que cumple con una buena parte de nuestras intuiciones acerca de la verdad. A pasar de ello, en el punto anterior, he argumentado que a causa de su ω-inconsistencia, produce consecuencias inaceptables vinculadas a la alteración de la ontología de los axiomatizaciones de la aritmética. En el caso de los lenguajes de primer orden, limita la clase de sus modelos a los compuestos por números no estándar. En el caso de los lenguajes de segundo orden, directamente elimina los modelos, convirtiendo a la teoría resultante en insatisfacible.

Por otra parte, como hemos visto, *FS* es una superteoría. Ella es la unión de los miembros de la serie FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,... tal que es:

$$\cup FS_n,\ n \in \omega$$

Si bien *FS* es capaz de probar teoremas acerca de fórmulas que poseen iteraciones transfinitas del predicado veritativo, ninguno de los

[38] La oración dice “Some critics admire only one another” y su formalización en Segundo orden es: $(\exists X)\ (\exists x)\ Xx \wedge (\forall x)\ (\forall y)\ ((Xx \wedge Axy\ ) \rightarrow (x \neq y \wedge Xy)))$.

miembros de la serie FS_n puede hacerlo. Por eso, ninguno de los integrantes de la serie es capaz de generar la oración de McGee. Ya que si bien hay un número indefinido de teorías FS_n, para cada n es particular, sólo hay un número finito de aplicaciones de la regla Nec y no hay en ningún punto de la serie, recursos suficientes como para expresar una oración que hable de toda la serie ω de teorías.

Ahora bien, si se trata de elaborar un modelo del funcionamiento del predicado veritativo de la aritmética, parece arbitrario limitar la atención a un miembro de la serie o a un subconjunto de ella. Por este motivo, dada una teoría FS_n arbitraria, siempre debe ser posible generar una teoría FS_{n+1} que defina el funcionamiento axiomático del predicado veritativo de la teoría de nivel inferior. Este tipo de *Principio de Optimismo Semántico*[39] resume una de las condiciones plausibles que deberíamos satisfacer en nuestro intento de dar una correcta axiomatización del predicado veritativo de la aritmética. Al mismo tiempo, debemos llamar la atención que *FS* es capaz de tener en cuenta *todos* los miembros de la serie. Y no hay una razón obvia para cuestionar la legitimidad de reunir en una única superteoría a todos los miembros de la serie. A fin de cuentas, la teoría resultante de esa unión no genera inconsistencias. Más aún, deberíamos estar preparados para poder hablar, desde algún lado, de *todos los miembros de la secuencia* y para hacer esto necesitamos una teoría que esté por encima de todos los miembros de la secuencia FS_0, FS_1, FS_2,…, FS_4. De esta manera, resulta plausible aceptar una suerte de *Principio de Unión*

> Para el ordinal límite ω, debemos estar preparados para reunir en una teoría toda la secuencia FS_n tal que n ∈ ω.

Claro que si un modelo matemático del funcionamiento del predicado veritativo tiene extrañas propiedades, eso es una fuerte evidencia para sostener que el modelo no trabaja propiamente. El cumplimiento del *Principio de Unión* de teorías es por una parte un elemento distintivo de *FS*. No obstante, como hemos visto, es a la vez responsable de su ω-inconsistencia. Por eso, si se quieren preservar las ventajas de *FS* y al mismo tiempo evitar su ω-inconsistencia, propongo abandonar el mencionado principio, cumplir con el de optimismo semántico y adoptar una suerte de *extensibilidad indefinida* de teorías de la verdad FS_0, FS_1,

[39] El principio de Optimismo Semántico es defendido, aunque en un contexto distinto, por Rayo y Linnebo. *Cf.* Rayo (2006) y Rayo y Linnebo (inédito).

FS_2, FS_3, FS_4,…,.[40] O de otra manera, desde mi punto de vista, lo que muestra el *Teorema de McGee* es que la adopción de *FS* es problemática. Sin embargo, puede pensarse que hay un núcleo central en el funcionamiento del predicado veritativo que la serie de teorías de la verdad FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, puede preservar.

De acuerdo con mi perspectiva extensibilista, dada una teoría FS_n arbitraria, siempre es posible generar una teoría FS_{n+1} que defina el funcionamiento axiomático del predicado veritativo de la teoría de nivel inferior. Esto puede hacerse, respetando la coincidencia entre la lógica interna y externa (una de las virtudes centrales de *FS*). Además, la teoría FS_{n+1} será capaz de demostrar como teoremas tanto la verdad de la oración de Gödel como un *principio de reflexión* para FS_n. Por eso, la imagen que surge es la de una serie que se extiende indefinidamente. Cada vez que sea necesario, es posible agregar una teoría de tipo FS_n que posea las virtudes de *FS* sin sus dificultades.

El cumplimiento del principio de optimismo semántico brinda plausibilidad a mi propuesta: no hay ninguna teoría de la serie FS_n tal que no sea posible demostrar como teoremas, la verdad de los teoremas que ella puede demostrar. Esa tarea siempre puede hacerse desde una FS_{n+1}. Así, mi propuesta logra parte del efecto de generalidad que tiene *FS*: la serie habla de la verdad de todas las oraciones que pueden demostrarse en algún punto de la serie como teoremas, sin que ningún punto de la serie sea una superteoría *FS* que hable de toda la serie.[41] Nótese, por otra parte, que *FS* también tiene carencias expresivas. Por el *Primer Teorema de Gödel*, *FS* tiene su propia oración de Gödel que aunque verdadera, no puede ser demostrada en *FS*. Y lo que es aún más dramático, por el *Segundo Teorema de Gödel*, *FS* no es capaz de demostrar como teorema su propia consistencia. Por eso, la ilusión de haber terminado con la serie de teorías al haber adoptado la axiomatización *FS* se desvanece. En cualquier caso, habrá que adoptar una *FS** capaz de generar como teoremas esas oraciones que son verdaderas.

[40] La idea de *extensibilidad indefinida* es originariamente presentada por Dummett y tiene múltiples aplicaciones. A veces se ha utilizado para hablar de la extensión de ciertos conceptos (como conjunto), otras para dominios de cuantificación en el contexto de la discusión sobre cuantificación irrestricta, e incluso para hablar de la extensión del predicado veritativo en la jerarquía tarskinana.

[41] Obviamente ninguna de las teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, es expresivamente equivalente a *FS*. Recuérdese que esta última es la unión de toda la serie y como tal puede probar teoremas acerca de toda la serie, cosa que ningún miembro de la misma puede hacer. Este es justamente el precio a pagar si se quiere evitar la ω-inconsistencia.

Los defensores del enfoque tarskiano jerárquico acerca de la verdad seguramente ven mi defensa de la secuencia indefinida de teorías de la verdad FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, y mi correspondiente abandono del principio de unión, con el propósito de evitar la generación de una superteoría ω-inconsistente, con cierto agrado. A fin de cuentas, al igual que Tarski, estoy sosteniendo que dado cualquier nivel n de una jerarquía que pretenda expresar el concepto de *verdad* de los niveles menores a n, habrá un nivel más alto n + 1 en esa jerarquía como resultado de expresar el predicado veritativo del nivel n.[42]

Por supuesto, este enfoque está sujeto a diversas críticas. Sus objetores podrían argumentar que parte de lo que se requiere de una teoría de la verdad es probar todo tipo de teoremas, incluso probar teoremas que involucren el predicado veritativo y que recorran toda la jerarquía. Por ejemplo, si la oración de McGee no puede ser teorema de una teoría satisfactoria de la verdad, nuestra axiomatización de la verdad debería probar un teorema que no declare verdadera a dicha oración. Pero, ninguna teoría FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, puede hacer tal cosa. Esto mostraría una limitación expresiva inaceptable, resultado del abandono del principio de unión. No obstante, este argumento presupone que el defensor de la secuencia de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, sólo cuenta con recursos expresivos vinculados a lo que se puede demostrar como teorema en cada uno de los niveles de la secuencia. Mi punto de vista, en cambio, acepta recursos provenientes de las reflexiones externas a la secuencia de teorías producto de los estudios de las estructuras que satisfacen tales instrumentos. Concluimos que la oración de McGee no debe ser parte de lo que una teoría de la verdad debe probar como teorema porque de hacerlo sus únicos modelos carecerían de ciertas características deseadas. Esto es, el defensor del enfoque jerárquico no sólo cuenta con

[42] Por supuesto, no estoy sosteniendo que mi propuesta es idéntica a la tarskiana. En primer lugar, Tarski adopta una estrategia definicional del predicado veritativo mientras que yo estoy adoptando una estrategia axiomática. En segundo lugar, y como consecuencia de su estrategia definicional, Tarski distingue niveles de lenguajes. Esto genera una jerarquía de lenguajes. En el segmento inicial, están los lenguajes de tipo finito. Cada punto de la jerarquía, cada lenguaje, nos permite hablar del funcionamiento del predicado veritativo de los niveles inferiores. Yo estoy adoptando una jerarquía de teorías de la verdad. Finalmente, Tarski explora la semántica de los lenguajes de tipo infinito en su famoso "Postcript" (Tarski 1956) y aplica su *Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad*. En nuestros términos, adoptando optimismo semántico, concluye que es posible dar una definición de verdad para un lenguaje de tipo ω desde un lenguaje de tipo ω+1. Yo, en cambio, abandonando el *Principio de Unión*, sólo estoy alcanzando el segmento inicial de la jerarquía. Agradezco al réferi de *Análisis Filosófico* por sugerirme esta aclaración.

recursos que provienen de teoría de la prueba para expresar las afirmaciones correctas vinculadas al predicado veritativo, sino también los que se obtienen aplicando teoría de modelos a tales instrumentos. El primero de los medios permite "desde dentro de la jerarquía" probar teoremas vinculados al predicado veritativo; el segundo posibilita "desde afuera de la jerarquía" probar resultados que afectan los principios y reglas de inferencia que deberían ser adoptados, si se quiere obtener una teoría que exprese correctamente nuestro predicado de verdad.

Es claro que debo admitir que el abandono del *principio de unión* y el correspondiente rechazo de *FS*, así como la adopción de la secuencia de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,..., es un tipo de *debilitamiento* respecto de lo que se podría probar, si usáramos los recursos de prueba de una superteoría como *FS*. Y más aún, podría objetarse que la adopción de una secuencia infinita de teorías no es algo que pueda entenderse con facilidad.[43] Entendemos que es adoptar *una* teoría, no una *infinidad* de teorías. Nótese, sin embargo, que cada nivel de la jerarquía de teorías FS_n no posee diferencias significativas entre sí. Básicamente, cada nivel extiende al anterior permitiendo una "nueva" aplicación de las reglas NEC y CONEC. Esto es, tal como pasa en toda secuencia que se extiende indefinidamente, lo que importa no es tanto la jerarquía total de teorías, sino los principios de funcionamiento que permiten extender sin límite la misma. Es decir, una vez que se entiende qué es adoptar la primera teoría y cómo extenderla, se ha captado todo lo que hay que captar para adoptar la secuencia de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,..., . Es cierto que nunca tendremos *una* teoría de la verdad. Pero, aquello que todos los miembros de la secuencia comparten, los axiomas de FS_1 y nuestra capacidad de extender las aplicaciones de las reglas NEC y CONEC más allá de cualquier nivel, nos dan una idea precisa de qué es lo que quiere decir adoptar una secuencia infinita FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,...,

Adviértase que una manera alternativa de obtener los mismos teoremas que *FS* consiste en tomar *T(PA)* y agregarle el siguiente principio de reflexión global:

$$\forall x\, (\mathrm{Sent}_T(x) \rightarrow (\mathrm{Bew}_{(T(PA))}\,(x) \rightarrow \mathrm{Tr}(x)))$$

Llamemos a esta teoría, FSR_2 Luego, esta adición del principio de reflexión global se itera. FSR_{n+1} se define como FSR_n junto con el axioma

[43] Esta objeción me ha sido formulada por Jose Díez.

$$\forall x\,(\mathrm{Sent}_T(x) \rightarrow (\mathrm{Bew}_{(FSRn)}\,(x) \rightarrow \mathrm{Tr}(x)))$$

FSR es una superteoría. Ella es la unión de los miembros de la serie FSR_0, FSR_1, FSR_2, FSR_3, FSR_4,… tal que:

$$\cup\, FSR_n,\ n \in \omega$$

A diferencia de *FS*, *FSR* no necesita adoptar las reglas NEC y CONEC. Puede probarse usando inducción sobre n que las teorías *FS* y *FSR* prueban los mismos teoremas.[44] Lo anterior permite concluir que FS es capaz de probar todos los principios de reflexión

$$\forall x\,(\mathrm{Sent}_T(x) \rightarrow (\mathrm{Bew}_{(FSRn)}\,(x) \rightarrow \mathrm{Tr}(x)))\ ,\ \text{para todo } n \in \omega$$

Pero, al mismo tiempo, la equivalencia muestra que todo lo que hay que ir agregando para objetar cada uno de los miembros de la secuencia de teorías FSR_0, FSR_1, FSR_2, FSR_3, FSR_4,… son principios de reflexión. Ya que por el *Segundo Teorema de Gödel* ningún miembro de la secuencia puede probar su propio *principio de reflexión*, la secuencia deberá extenderse siempre.

Mi punto puede enfatizarse recurriendo a la conocida analogía entre la concepción iterativa del universo conjuntista y la concepción jerárquica de la verdad. Los conjuntos y las verdades de un lenguaje crecen indefinidamente. En el primer caso, la suposición de que ese crecimiento concluye en algún punto puede conducir a inconsistencias. En el segundo, aunque no conduce a inconsistencias, conduce a ω-inconsistencia. En el caso de las teorías de primer orden, el resultado de ω-inconsistencia produce indeseables alteraciones en los modelos, mientras en el caso de las teorías de segundo orden, provoca teorías insatisfacibles. Esto nos conduce a abandonar la suposición de que este crecimiento puede terminar en algún punto. Y esto se refleja en la imagen de la adopción de una secuencia infinita de teorías de la verdad.

Un punto adicional a favor de la adopción de la secuencia. Nótese, que utilizando ideas vinculadas a la semántica de revisión, es posible desarrollar modelos naturales para los subsistemas de *FS* con un número limitado de aplicaciones de NEC y CONEC. La semántica de revisión fue creada por Gupta y Herzberger. Fue defendida e investigada por Belnap y Gupta[45] y es el enfoque rival de la teoría de puntos fijos de Kripke. La idea del enfoque

[44] Halbach (2011, p. 189).
[45] Belnap y Gupta (1993).

de revisión aplicado a niveles finitos es simple: se comienza con un clásico modelo estándar para un lenguaje que además de vocabulario de la aritmética incluya un predicado veritativo que permita un número finito de iteraciones. En este modelo clásico, el vocabulario aritmético es interpretado de manera estándar y el predicado veritativo recibe algún conjunto como extensión. Sea el modelo <N, S> donde "*N*" es el conjunto de los números naturales y "*S*" la extensión del predicado veritativo. La interpretación del mencionado predicado puede ser cualquiera, es decir, no necesita ser la interpretación natural del mismo. De hecho, podría ser el conjunto vacío, por ejemplo. Este modelo hará a algunas oraciones verdaderas y a otras falsas. El conjunto de todas las oraciones verdaderas en <N, S> (en el sentido clásico usual del término) puede ser ahora usado como la nueva extensión S' del predicado veritativo. De esta manera, se obtiene un nuevo modelo <N, S'>. El paso de <N, S> a <N, S'> puede ser repetido. A través de este proceso de revisión, se pueden obtener modelos cada vez más ajustados. Dependiendo de la extensión de partida *S*, se obtendrá efectivamente la extensión del predicado veritativo de nuestro lenguaje de partida. Una opción plausible es comenzar con la clase $D(\omega)$ de todos los conjuntos de números naturales como posible extensión para el predicado de verdad, cuando el vocabulario aritmético es interpretado de manera estándar. Halbach ha demostrado que[46] bajo esta asignación, en cada uno de los miembros de la secuencia de teorías FS_0, FS_1, FS_2, FS_3, FS_4,…, el predicado veritativo obtiene una extensión arbitraria no vacía. Sin embargo, su extensión *no existe* cuando la asignación en el modelo inicial es la clase $D(\omega)$. Esto dificulta ver a *FS* como una axiomatización apropiada de los niveles transfinitos del proceso de revisión del predicado veritativo. Elegir cualquier otra extensión inicial para el mencionado predicado parece tan arbitrario como la adopción de alguno de los puntos de la secuencia. Este resultado contrasta con el hecho de que en cada punto de la secuencia, el predicado veritativo adquiere una extensión no vacía, dada la clase $D(w)$ como asignación inicial. Por supuesto, mi propuesta extensibilista implica aceptar que nunca tendremos una extensión completamente definida del mencionado predicado. Pero, este resultado parece mejor que tener que sostener que en el primer ordinal transfinito su extensión no existe.

En suma, mi propuesta recupera lo mejor de *FS* sin generar una teoría ω-inconsistente. El precio es adoptar una serie de teorías que se extienden indefinidamente, abandonando la pretensión de unificar en una única teoría la axiomatización del predicado veritativo de la aritmética. Ninguna de las

[46] *Cf.* Halbach (2011, p. 165).

teorías de la serie es capaz de hablar de toda la serie transfinita. Sin embargo, hay motivos independientes para pagar este precio. Los resultados de Gödel muestran que no hay *una* teoría completa acerca de la verdad aritmética. Por eso, no hay manera de encontrar un último punto en la serie. Esto es así, aún para el caso de *FS*: ella no tiene capacidad para demostrar su propia consistencia, por ejemplo. Las virtudes que la serie comparte con *FS* sin su desagradable ω-inconsistencia son un elemento a favor de mi posición. Como hemos visto, como resultado de la ω-inconsistencia, en el caso de primer orden se producen cambios en los modelos mientras que en el de orden superior, resultados de insatisfacibilidad. Una teoría de la verdad aritmética que altere los modelos de la aritmética no es una buena teoría. Pero una teoría de la verdad insatisfacible es aún peor. La analogía con la jerarquía tarskiana de lenguajes también brinda plausibilidad a mi punto de vista. A fin de cuenta, de manera semejante a la extensión del predicado veritativo, la adopción de mi perspectiva puede interpretarse conceptualmente como que el conjunto de teoremas demostrables acerca de la verdad se extiende indefinidamente. Además, como hemos visto, el uso de la semántica de revisión que asigna extensión inexistente en el nivel omega al predicado veritativo brinda un elemento adicional como para no dar el "salto" al nivel infinitario. Por último, la presentación de FSR_n, y la jerarquía de principios de reflexión nos da una herramienta más para comprender mejor mi jerarquía.

Bibliografía

Barrio, E. (2010), "Theories of Truth without Standard Models and Yablo's Sequences", *Studia Logica,* 96, pp. 377-393.

Belnap, N. y Gupta, A. (1993), *The Revision Theory of Truth*, Cambridge, Mass., The MIT Press.

Feferman, S. (1991), "Reflecting on Incompleteness", *The Journal of Symbolic Logic*, 56 (1), pp. 1-49.

Field, H. (1999), "Deflating the Conservativeness Argument", *The Journal of Philosophy*, 96, pp. 533-540.

—— (2006), "Truth and the Unprovability of Consistency", *Mind,* 115, pp. 567-605.

Friedman, H. y Sheard, M. (1987), "An Axiomatic Approach to Self-Referencial Truth", *Annals of Pure and Applied Logic,* 33, pp. 1-21.

Halbach, V. (1994), "A System of Complete and Consistent Truth", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 35 (3), pp. 311-327.

—— (1999), "Conservative Theories of Classical Truth", *Studia Logica,* 62, pp. 353-370.

Halbach, V. (2011), *Axiomatic Theories of Truth,* Cambridge, Cambridge University Press.

Halbach, V. y Horsten, L. (2005), "The Deflationist's Axioms for Truth", en Beall, J. C. y Armour-Garb, B. (2005), *Deflationism and Paradox,* Oxford, Oxford University Press, pp. 203-217.

Horwich, P. (1990), *Truth*, Oxford, Blackwell.

Ketland, J. (1999), "Deflationism and Tarski's Paradise", *Mind,* 108, pp. 69-94.

Kotlarski, H., Krajewski, S y Lachlan, A. (1981), "Construction of satisfaction classes for nonstandard models", *Canadian Mathematical Bulletin*, 24 (3), pp. 283-293.

Leitgeb, H. (2007), "What Theories of Truth Should Be Like (But Cannot Be)", *Blackwell Philosophy Compass,* 2/2, pp. 276-290.

McGee, V. (1985), "How Truthlike Can a Predicate Be? A Negative Result", *Journal of Philosophical Logic* 14, pp. 399-410.

—— (1992), "Maximal Consistent Sets of Instances of Tarski's Schema (T)", *Journal of Philosophical Logic,* 21, pp. 235-241.

Montague, R. (1966), "Syntactic Treatments of Modality, with Corollaries on Reflexion Principles and Finite Axiomatizability", *Acta Philosophica Fennica,* 16, pp. 154-167, reimpreso en Montague, R. (1974), *Formal Philosophy*, New Haven, Yale University Press, pp. 286-302.

Picollo, L. (2011), "La Paradojicidad de la Paradoja de Yablo", Tesis de Licenciatura en Filosofía, UBA.

Rayo, A. (2006), "Beyond Plurals", en Rayo, A. y Uzquiano, G. (2006), *Absolute generality,* Oxford, Oxford University Press.

Rayo, A. y Linnebo, O. (inédito), "Hierarchies ontological and ideological".

Robinson, A. (1963), "On Languages which are based on nonstandard arithmetic", *Nagoya Mathematical Journal*, 22, pp. 83-117.

Shapiro, S. (1983), "Conservativeness and Incompleteness", *Journal of Philosophy,* 80, pp. 521-531.

—— (1991), *Foundations without Foundationalism. A case for Second-Order Logic,* Oxford, Clarendon Press.

—— (1998), "Proof and Truth: Through Thick and Thin", *Journal of Philosophy,* 95, pp. 493-521.

Simpson, S. (2009), *Subsystems of Second Order Arithmetic,* Cambridge, Cambridge University Press.

Sheard, M. (1994), "A Guide to Truth Predicates in Modern Era", *The Journal of Symbolic Logic,* 59, pp. 1032-1054.

Tarski, A. (1956), "The Concept of Truth in Formalized Languages", en Tarski, A. (1956), *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, Clarendon Press, pp. 152-278.