Análisis Filosófico
ISSN: 0326-1301
af@sadaf.org.ar
Sociedad Argentina de Análisis Filosófico
Argentina

HERRERA GONZÁLEZ, JOSÉ RAFAEL; VÁZQUEZ CAMPOS, MARGARITA
HACIA UNA LÓGICA TEMPORAL-EPISTÉMICA BASADA EN LENGUAJES HÍBRIDOS
Análisis Filosófico, vol. XXXI, núm. 1, mayo, 2011, pp. 33-46
Sociedad Argentina de Análisis Filosófico
Buenos Aires, Argentina

HACIA UNA LÓGICA TEMPORAL-EPISTÉMICA BASADA EN LENGUAJES HÍBRIDOS

José Rafael Herrera González
Universidad de La Laguna - Grupo LEMA*
rahego@ull.es

Margarita Vázquez Campos
Universidad de La Laguna - Grupo LEMA*
mvazquez@ull.es

Resumen

Nuestro principal objetivo en este trabajo es el de analizar si es posible construir sistemas lógicos temporales-epistémicos lo suficientemente satisfactorios. Sin embargo, las principales dificultades para lograr este propósito provienen del hecho de tener que combinar una perspectiva temporal *absoluta* con una perspectiva epistémica *relativa* a cada agente; es decir, por un lado, los instantes de tiempo vienen determinados desde el punto de vista de un observador situado fuera del mundo, y, por otro lado, las alternativas epistémicas de cada agente (en cada instante) son relativas a dicho agente. Pensamos que algunas de estas dificultades podrían ser superadas con la ayuda de las lógicas híbridas, puesto que este tipo de lógicas simplifica la combinación de sistemas temporales y epistémicos, y así podemos evitar tener que construir modelos excesivamente complicados.

PALABRAS CLAVE: Lógica epistémica; Lógica temporal; Lógica híbrida; Combinación de lógicas.

Abstract

Our main goal in this paper is to analyse if it is possible to build some suitable Temporal-Epistemic Systems. However, the main difficulties in order to aim this goal come from the fact of having to combine an *absolute* temporal perspective with a *relative* (to each agent) epistemic perspective; that is, on one hand, temporal points (instants) are determined from the point of view of an observer placed outside the world, and, on the other hand, the epistemic alternatives of each agent (in each instant) are relative to that agent. We think that some of these difficulties could be solved with the help of

* *Grupo de Investigación en Lógica, Epistemología, Mente y Acción*, de la Universidad de La Laguna (dirigido por Manuel Liz). Los autores agradecen a los miembros del grupo sus valiosos comentarios a versiones previas de este trabajo.

Este trabajo se ha llevado a cabo dentro del Proyecto de Investigación FFI2008-01205 ("Puntos de vista. Una investigación filosófica"), financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia del Gobierno de España.

hybrid logics, because this kind of logics simplifies the combination of temporal and epistemic systems, and so we can avoid building highly complicated models.

KEY WORDS: Epistemic Logic; Temporal logic; Hybrid logic; Combining logics.

I. Introducción

La lógica modal epistémica, tal y como se ha desarrollado desde mediados del siglo pasado, proporciona un aparato formal muy útil para el análisis de las nociones de conocimiento y creencia, pero gran parte de los sistemas propuestos se limitan a dar cuenta del conocimiento y las creencias de un agente, o de un grupo de agentes, en un momento determinado, es decir, sin tomar en consideración las modificaciones que pueden experimentar a lo largo del tiempo.

En este trabajo nos proponemos enriquecer la capacidad expresiva de la lógica de las modalidades epistémicas, de tal forma que podamos expresar los cambios producidos a lo largo del tiempo en el sistema de conocimientos y creencias de los sujetos. De este modo, podremos hablar, entre otras cosas, de aumento o pérdida de conocimiento, o de abandono de creencias (y de su sustitución por otras). No en vano, uno de los rasgos más sobresalientes del conocimiento y las creencias es su variabilidad en el tiempo, ya sea porque se disponga de nueva información o porque se reestructure la que ya se tenía.

Nos interesa también poder expresar los conocimientos y las creencias que los sujetos albergan en un momento determinado en relación al pasado y al futuro. En el primer caso podremos hacer afirmaciones del tipo "En el futuro el sujeto x sabrá que φ" o "En el pasado el sujeto x creía que ψ"; en el segundo caso podremos decir, por ejemplo, que "El sujeto x sabe que en el pasado φ" o que "El sujeto x cree que en el futuro ψ".

Para conseguir nuestro objetivo, primero analizaremos algunos de los desarrollos más interesantes, a nuestro juicio, que se han llevado a cabo en la combinación de la lógica temporal y la epistémica, y a continuación presentaremos una propuesta encaminada a configurar una lógica temporal-epistémica basada en la lógica híbrida, pues, como veremos, los lenguajes híbridos pueden superar en gran medida algunas de las principales dificultades con las que tropezamos al tratar de combinar una dimensión temporal y una dimensión epistémica en un mismo sistema lógico.

II. Sistemas temporales-epistémicos

En esta sección estudiaremos tres de los sistemas que se han propuesto para la combinación de la lógica temporal y la epistémica, a saber: el Sistema mínimo S5T (Engelfriet 1996), la extensión temporal del Sistema KL (Kraus y Lehmann 1988) y el Sistema temporal-epistémico FH (Fagin y Halpern 1988). En nuestro análisis abordaremos las principales ventajas que presentan estos sistemas lógicos, así como sus limitaciones más relevantes.

II. 1. El Sistema temporal-epistémico mínimo S5T

Engelfriet (1996) propone un sistema mínimo de lógica temporal-epistémica, S5T, mediante el que podemos expresar los cambios que se producen en el conocimiento de un agente en función del tiempo. Para ello, toma como base el Sistema S5 de la lógica epistémica proposicional (Engelfriet 1996, p. 235) y un Sistema de tiempo lineal transitivo[1] (Engelfriet 1996, p. 237).

En el Sistema S5T encontraremos los siguientes tipos de operadores lógicos:

a) Los operadores epistémicos K y M, de tal modo que $K_x\varphi$ expresa que "el sujeto x sabe que φ es el caso"[2] y $M_x\varphi$ indica que "el sujeto x considera posible que φ es el caso", estableciéndose la siguiente definición: $M_x\varphi =_{df} \neg K_x\neg\varphi$

b) Los operadores temporales habituales P, F, H, G, donde $P\varphi$ expresa que "al menos una vez en el pasado φ fue el caso", $F\varphi$ que "al menos una vez en el futuro φ será el caso", $H\varphi$ que "siempre en el pasado φ fue el caso" y $G\varphi$ que "siempre en el futuro φ será el caso". Definiéndose: $P\varphi =_{df} \neg H\neg\varphi$ y $F\varphi =_{df} \neg G\neg\varphi$.

El Sistema temporal-epistémico mínimo S5T de Engelfriet consta de los siguientes elementos:

[1] Para una presentación y análisis detallados de los principales elementos formales que configuran la lógica modal epistémica, *cf.* Meyer y van der Hoek (1995). Asimismo, en Meyer (2001) y Lenzen (2004) podemos encontrar exposiciones de conjunto breves e interesantes de esta rama de las lógicas no clásicas. Por otra parte, para una visión general de la lógica temporal y sus principales sistemas, *cf.*, por ejemplo, Gabbay, Hodkinson y Reynolds (1994) y Gabbay, Finger y Reynolds (2000).

[2] Cuando en la lógica modal epistémica afirmamos $K_x\varphi$ ("el sujeto x sabe que φ"), significa que φ se da en todos los mundos posibles (o alternativas epistémicas) compatibles con el conocimiento de x. De modo similar, $B_x\varphi$ ("el sujeto x cree que φ") nos indica que φ se da en todos los mundos posibles (alternativas doxásticas) que son compatibles con las creencias de x. Finalmente, $M_x\varphi$ ("el sujeto x considera posible que φ") implica que φ es el caso en, al menos, uno de los mundos posibles compatibles con el conocimiento (o las creencias) de x.

A) *Lenguaje formal*. El lenguaje del Sistema S5T de Engelfriet se configura de acuerdo con las siguientes cláusulas (Engelfriet 1996, p. 236):

i) Si φ es una fórmula bien formada (en adelante, fbf) del lenguaje para la lógica clásica de proposiciones, entonces φ es una fbf respecto al lenguaje del Sistema S5T.

ii) Si φ es una fbf del lenguaje de la lógica epistémica proposicional (en lo que sigue, LEP), y en particular del Sistema S5, entonces φ es una fbf respecto al lenguaje del Sistema S5T.

iii) Si φ es una fbf de acuerdo con i) y ii), también lo son $P\varphi$, $F\varphi$, $H\varphi$ y $G\varphi$.

B) *Semántica*. Para la semántica del Sistema S5T, Engelfriet emplea la misma estructura que para una lógica de tiempo lineal, añadiendo a las cláusulas de la función de evaluación que:

Si φ *es una fbf del lenguaje de la LEP (en particular, del Sistema S5), entonces* $v(\varphi,t)=1$ *syss* $v_{S5}(\varphi,t)=1$[3] (Engelfriet 1996, p. 236).

C) *Sistema axiomático*. El Sistema axiomático S5T consta de los axiomas del Sistema de lógica temporal para tiempo lineal, con sus correspondientes reglas de derivación (Modus Ponens y Generalización de H y G), introduciendo únicamente la siguiente cláusula:

Para toda fbf φ *del lenguaje de la LEP (en particular, del Sistema S5), si* $\Box_{S5}\varphi$, *entonces* $\Box_{S5T}\varphi$ (Engelfriet 1996, p. 237).

Asimismo, Engelfriet muestra que el Sistema S5T es consistente y completo (Engelfriet 1996, pp. 237-238).

Como puede comprobarse, las cláusulas para la constitución del lenguaje formal del Sistema S5T permiten la ocurrencia de operadores epistémicos bajo el alcance de operadores temporales, pero no así la ocurrencia de operadores temporales bajo el alcance de operadores epistémicos. Y es esta, a nuestro juicio, la principal limitación que presenta este Sistema lógico, pues si bien puede expresar los cambios que experimenta el conocimiento de los agentes en función del tiempo, no puede, sin embargo, formalizar el conocimiento del que disponen los agentes acerca del futuro o el pasado. Es decir, con la lógica de Engelfriet podemos expresar, por ejemplo, que "En el futuro el sujeto x sabrá que φ", pero no que "El sujeto x sabe que en el futuro φ será el caso". Por esto podemos afirmar que el sistema S5T no constituye una auténtica

[3] La expresión $v_{S5}(\varphi,t)=1$ se lee "el valor de verdad de φ en t es 1 de acuerdo con las cláusulas de la función de evaluación del Sistema S5".

combinación de lógica temporal y epistémica, en el pleno sentido de la expresión, sino, más bien, una temporalización de la lógica epistémica.

II. 2. La extensión temporal del Sistema KL

Kraus y Lehmann (1988) desarrollan un sistema axiomático, al que nos referiremos como Sistema KL, que nos permite considerar conjuntamente diversas nociones epistémicas y doxásticas, así como las interrelaciones formales que se establecen entre ellas. Este sistema incluye los operadores monarios K ("conocimiento"), B ("creencia"), $\mathcal{E}$ ("conocimiento conjunto"), $\mathcal{F}$ ("creencia conjunta"), $\mathcal{K}$ ("conocimiento común"), $\mathcal{B}$ ("creencia común")[4].

Kraus y Lehmann enriquecen su lenguaje formal incluyendo operadores temporales para poder expresar los cambios que se producen en el conocimiento y las creencias de los agentes a lo largo del tiempo, así como también los diversos tipos de creencias que los agentes pueden albergar acerca del futuro (Kraus y Lehmann 1988, pp. 166-168). Entre los operadores temporales que introducen podemos destacar $\circ$ ("*momento siguiente*"), de modo que si φ es una fbf, también lo es $\circ\varphi$ ("*en el momento siguiente* φ *será el caso*").

Partiendo de estas ideas, Kraus y Lehmann distinguen entre dos tipos básicos de creencia, en función de su carácter más o menos central para los agentes, es decir, dependiendo de si pueden ser modificadas o abandonadas por estos con mayor o menor dificultad (Kraus y Lehmann 1988, pp. 166-167):

1. *Creencia en sentido débil* ("*creencia como hipótesis*"). Es un tipo de creencia que un agente mantiene en un momento determinado, pero que estaría dispuesto a abandonar tan pronto como esta se viera contradicha por nueva información. Para este tipo de creencia se cumple la siguiente expresión: $B_x\circ\varphi \rightarrow \circ B_x\varphi \vee \circ K_x\neg\varphi$ (*Para* x= *1, ..., h,* siendo h el número total de agentes que estemos considerando); es decir, si un agente x cree algo, entonces mantendrá su creencia hasta que sepa que efectivamente es falsa. Una versión débil de este axioma es la siguiente:

[4] Se dice que en un grupo de agentes se da el conocimiento conjunto de φ ($\mathcal{E}\varphi$) si todos los miembros del grupo saben que φ es el caso; igualmente, se dice que se da la creencia conjunta en φ ($\mathcal{F}\varphi$) si todos los componentes del grupo creen que φ . A su vez, el conocimiento común de φ ($\mathcal{K}\varphi$) significa que en el grupo de agentes en cuestión todos saben que φ, todos saben que todos saben que φ, todos saben que todos saben que todos saben que φ ... Por su parte, la creencia común en φ ($\mathcal{B}\varphi$) implica que todos los componentes del grupo creen que φ, todos creen que todos creen que φ, todos creen que todos creen que φ ... (Kraus y Lehmann 1988, pp. 155-156).

$B_x \bigcirc \varphi \rightarrow \bigcirc B_x \varphi \vee \bigcirc B_x \neg \varphi$ *(Para x= 1, ..., h)*, lo cual indica que un sujeto deja de creer en algo cuando cree que es falso.

2. *Creencia "seria"*. Es un tipo de creencia de carácter central, por lo que los agentes no están dispuestos a abandonarla. Son, como señalan Kraus y Lehmann, creencias acerca de cosas que sabemos que son verdaderas o que no pueden ser probadas como falsas (Kraus y Lehmann 1988, p. 166). Un ejemplo de esta clase de creencias lo constituyen las creencias de carácter religioso. Si un agente cree, en este sentido "serio" de creencia, que algo será el caso en el futuro, sabe que en el futuro no descubrirá que tal cosa no es el caso. El axioma siguiente refleja esta propiedad de este segundo tipo de creencia: $B_x \varphi \rightarrow K_x \bigcirc \neg K_x \neg \varphi$ *(Para x= 1, ..., h)*. De acuerdo con esto, si el agente x cree que en el futuro será el caso que φ, puesto que su creencia no puede ser contradicha, en el futuro también mantendrá su creencia. Esto nos da el siguiente axioma: $B_x \varphi \rightarrow \bigcirc B_x \varphi$ *(Para x= 1, ..., h)*. Ahora bien, Kraus y Lehmann (1988, p. 167) sugieren que este último axioma recoge una noción poco realista de creencia, y concluyen que el tipo de creencia al que usualmente hacemos referencia está más próximo a la creencia en sentido débil ("creencia como hipótesis") (Kraus y Lehmann 1988, p. 167).

Así pues, la extensión temporal del Sistema KL nos permite expresar distintas propiedades acerca de nociones epistémicas y doxásticas en relación al tiempo. Sin embargo, el principal inconveniente que presenta esta lógica es que no dispone de una semántica adecuada respecto a la cual sean válidos los anteriores axiomas que combinan conocimiento, creencia y tiempo.

II. 3. El Sistema temporal-epistémico FH

Fagin y Halpern (1988) presentan una lógica del "conocimiento consciente"[5] de marcado carácter sintáctico. El término "conocimiento consciente" (representado por el operador monario A) hace referencia aquí a aquellas fórmulas de las que puede percatarse un sujeto en un estado determinado: así $A_x \varphi$ indica que el sujeto x es consciente del hecho (de la fórmula) φ. Fagin y Halpern no dan una interpretación precisa de este concepto, aunque señalan una serie de condiciones que podemos imponer a esta noción, de tal modo que pueda presentar diferentes propiedades en función del contexto en que nos encontremos (Fagin y Halpern 1988, pp. 54-55). Pero lo que aquí nos interesa es la extensión temporal de esta lógica epistémica. El sistema temporal-epistémico resultante (que aquí

[5] Traducimos por "conocimiento consciente" el término inglés "awareness".

denominaremos Sistema FH) podemos encontrarlo en Fagin y Halpern (1988, pp. 61-63), y en él se introducen dos nuevos operadores modales monarios, a saber: $\bigcirc$ (*"momento siguiente"*) y $\Diamond$ (*"eventualmente"*, o *"ahora o alguna vez en el futuro"*). De este modo, si φ es una fbf, también lo son $\bigcirc\varphi$ (*"en el momento siguiente φ"*) y $\Diamond\varphi$ (*"eventualmente φ"*, o también *"ahora o alguna vez en el futuro φ"*).

En el Sistema FH se concibe el tiempo como *lineal*, *discreto e infinito hacia el futuro*, contemplándose, además, la siguiente definición metalingüística: $\Box\varphi =_{df} \neg\Diamond\neg\varphi$; es decir, que $\Box\varphi$ es verdadero si φ es verdadero ahora y por siempre en el futuro.

Este sistema de lógica temporal-epistémica nos permite, por ejemplo, hacer que en cada instante el sujeto recuerde los conocimientos que en el pasado había establecido en relación a ese instante. Es decir, podemos hacer válida la expresión $K_x(\bigcirc\varphi)\rightarrow\bigcirc K_x\varphi$, que nos dice que si el agente x sabe (ahora) que φ será el caso en el momento siguiente, entonces en el momento siguiente también sabrá que φ es el caso. Fagin y Halpern reconocen que esta propiedad es, en muchos casos, poco realista, como ocurriría, por ejemplo, si estuviéramos refiriéndonos al conocimiento de agentes humanos; pero podría resultar interesante, sin embargo, para modelar el comportamiento epistémico en inteligencia artificial (Fagin y Halpern 1988, p. 62). En cualquier caso, está claro que esta propiedad no es adecuada para las creencias, pues estas frecuentemente se ven contradichas y son abandonadas por los sujetos.

En el Sistema FH también podemos conseguir, de una forma relativamente sencilla, que el conocimiento consciente de un sujeto x (A_x) nunca disminuya a lo largo del tiempo, así como que dicho agente x sea, eventualmente, consciente de toda fbf. Podemos, asimismo, hacer que el conocimiento consciente de un sujeto aumente con el tiempo (o al menos no disminuya), sin que por ello dicho agente haya de ser eventualmente consciente de toda fórmula. Finalmente, podemos formalizar situaciones más complejas en las que se combine el conocimiento consciente, el razonamiento local (racimos de creencias) y el tiempo. Así, podríamos lograr que un agente x modifique sus creencias siempre que llegue a ser consciente de que son incoherentes, lo cual se expresaría mediante el axioma: $[(B_x\varphi\wedge B_x\neg\varphi)\wedge A_x(B_x\varphi\wedge B_x\neg\varphi)] \rightarrow \bigcirc[\neg(B_x\varphi\wedge B_x\neg\varphi)]$ (Fagin y Halpern 1988, pp. 62-63).

Todo esto pone de manifiesto que el Sistema FH de Fagin y Halpern permite modelar interesantes propiedades relativas a la adquisición, pérdida o modificación de conocimientos (y de creencias) por parte de los sujetos epistémicos; y todo ello estableciendo condiciones relativamente simples en los modelos semánticos de su lógica epistémica.

III. Lógicas híbridas

Las lógicas híbridas son un tipo de lógicas modales que permiten referirse a los puntos (mundos) del modelo. En el caso de la lógica temporal, permiten referirse a un instante particular.

El introductor de las primeras ideas relacionadas con la lógica híbrida fue Arthur Prior al final de los años sesenta del pasado siglo (Prior 1967). En los años noventa, se incrementó el número de publicaciones sobre el tema, especialmente entre un grupo de investigadores relacionados con la Universidad de Amsterdam[6].

La lógica híbrida introduce los "nominales" como una herramienta para nombrar los puntos del conjunto de los mundos posibles semánticos. Esos nominales aparecen en la sintaxis y podemos tener fbfs en las que estos aparezcan (como algo distinto de las variables proposiciones). Hacen el papel de los términos en lógica clásica de primer orden, pero sin ser términos. Los nominales son verdaderos solamente en un punto de cada modelo; "nombran" este único punto, siendo verdaderos allí y en ningún sitio más. Este punto se suele llamar la "denotación" del nominal; sin embargo, un solo punto puede ser la denotación de distintos nominales.

Hay dos operadores normalmente asociados con los nominales. Estos son el anclaje (en inglés, "binder"), ↓, y el operador de satisfacción, @. El anclaje ↓vincula un nominal con un punto concreto, nombrando sólo este punto, el punto de la evaluación actual, como la denotación del nominal. El operador de satisfacción @ traslada el punto de evaluación hasta la denotación del nominal. Algunas veces, al definir fbfs hay una diferencia entre los nominales y las variables de mundo: los nominales no pueden ser ligados por ↓, mientras que las variables de mundo sí. En este caso, se suele emplear *i, j, k* para los nominales y *x, y*, *z* para las variables de mundo.

En lógica temporal, los nominales se han usado como un mecanismo para referirse a momentos, resolviendo así una limitación de estas lógicas (Blackburn 1994). Cuando decimos algo como "Juan cantó" es importante tener un único punto de referencia, donde sea verdad que Juan cante, antes del punto actual. La representación de "Juan cantó" sería P(i ^ Juan canta), donde P es el operador temporal de pasado habitual, mientras que *i* es un nominal. En este ejemplo, podemos referirnos al punto exacto donde Juan cantó. Como *i* es un nominal, sabemos que *i* es

[6] *Cf.*, por ejemplo, Blackburn y Seligman (1998), Blackburn (2000) y Areces, Blackburn y Marx (2001).

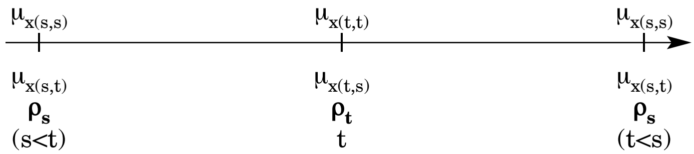
verdadero en un único punto del modelo y que en ese punto es verdad que Juan canta.

Se pueden definir sintácticamente algunas propiedades de los marcos no definibles en la lógica temporal corriente. Así tenemos la irreflexibidad ($\downarrow x.\Box\neg x$), la asimetría ($\downarrow x.\Box\Box\neg x$), la antisimetría ($\downarrow x.\Box(\Diamond x\rightarrow x)$), la densidad ($\downarrow x.\Box\downarrow.@_x\Diamond\Diamond y$), la transitividad ($\downarrow x.\Box\Box\downarrow y.@_x\Diamond y$), etc. La irreflexividad es especialmente importante en la lógica temporal y su ausencia se suele subsanar con el uso de la denominada Regla de Gabbay.

IV. Un sistema temporal-epistémico basado en las lógicas híbridas

Nuestro objetivo en esta sección es el de presentar una serie de desarrollos formales encaminados a configurar un sistema temporal-epistémico que combine el Sistema S5 de la lógica modal epistémica con un sistema temporal para tiempo lineal. Al tratar de articular la semántica de este sistema temporal-epistémico, encontramos que es fácil evaluar las fórmulas puramente temporales y las puramente epistémicas. Tampoco presenta mayores dificultades el tratar de evaluar fórmulas en las que operadores epistémicos se encuentran bajo el alcance de operadores temporales (de hecho, esto es lo que ocurre en el Sistema S5T de Engelfriet, presentado en la sección II.1). Donde surgen los problemas es al intentar evaluar las fórmulas en las que operadores temporales aparecen bajo el alcance de operadores epistémicos, es decir, aquellas fórmulas que expresan el conocimiento (o las creencias) que los agentes albergan acerca del pasado o el futuro.

Para salvar estos inconvenientes distinguimos, a nivel semántico, los diferentes "estados actuales" correspondientes a cada instante del tiempo, siendo ρ_s el "estado actual" en el instante s, ρ_t el "estado actual" en el instante t, y así sucesivamente. Y también tenemos en cuenta el conjunto de estados que un sujeto x considera posibles, no sólo en relación al momento en que se encuentra, sino también en relación a cualquier otro instante del pasado o del futuro: así $\mu_{x(t,t)}$ representa el conjunto de estados que el sujeto x considera posibles en el instante t en relación a dicho instante t; $\mu_{x(t,s)}$ representa el conjunto de estados que x considera posibles en el instante t en relación a otro instante anterior o posterior s ($s<t$ o $t<s$). De acuerdo con lo que venimos comentando, s y t representan distintos instantes de tiempo, y $<$ es una *relación antes/después* o *relación de ulterioridad*. Gráficamente podríamos representarlo así:



Desde nuestro punto de vista, las lógicas híbridas pueden ayudarnos a salvar muchas de las dificultades con las que tropezamos al tratar de combinar sistemas de lógica temporal y epistémica. Aunque ha habido combinaciones de lógica temporal e híbrida, tanto para sistemas de tiempo lineal como ramificado[7], es menos habitual incorporar operadores híbridos a una lógica temporal-epistémica[8]. En cualquier caso, el recurso a lenguajes híbridos simplifica significativamente este tipo de combinaciones, y nos permite articular sistemas temporales-epistémicos de gran capacidad expresiva. Para mostrar esto, comenzaremos definiendo $KF\varphi$ como $K^{\rightarrow i}\varphi$, $KP\varphi$ como $K^{\leftarrow i}\varphi$, $MF\varphi$ como $M^{\rightarrow i}\varphi$ y $MP\varphi$ como $M^{\leftarrow i}\varphi$ [9].

Así, el lenguaje de nuestro sistema temporal-epistémico incluirá los siguientes operadores:

a) Los operadores proposicionales clásicos $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
b) Los operadores temporales *P* (“al menos una vez en el pasado”), *F* (“al menos una vez en el futuro”), *H* (“siempre en el pasado”), *G* (“siempre en el futuro”).
c) Los operadores epistémicos *K* (“saber que”), *M* (“considerar posible que”).
d) Los nuevos operadores temporales-epistémicos $K^{\rightarrow i}$ ($\equiv$KF), $K^{\leftarrow i}$ ($\equiv$KP), $M^{\rightarrow i}$ ($\equiv$MF), $M^{\leftarrow i}$ ($\equiv$MP).

Por otra parte, distinguiremos entre dos tipos de *fórmulas bien formadas* (fbf): *fórmulas bien formadas de tipo 1* (fbf1) y *fórmulas bien formadas de tipo 2* (fbf2), teniendo en cuenta que fbfs son aquellas (y sólo aquellas) que se construyen de acuerdo con las siguientes reglas de formación:

[7] Véase, en el caso de lógicas temporales ramificadas computacionales, Goranko (2000).

[8] Sack (2007) añade nominales a la lógica temporal-dinámica-epistémica.

[9] Como es habitual, $KF\varphi$ expresa que “el sujeto sabe que (al menos una vez) en el futuro φ será el caso”; $KP\varphi$ “el sujeto sabe que (al menos una vez) en el pasado φ fue el caso”; $MF\varphi$ “el sujeto considera posible que (al menos una vez) en el futuro φ será el caso”; y $MP\varphi$ “el sujeto considera posible que (al menos una vez) en el pasado φ fue el caso”.

(a) Toda variable proposicional (p, q, r ...) es una fbf1.
(b) Si φ es una fbf1, también lo son $K\varphi$, $K^{\rightarrow i}\varphi$, $K^{\leftarrow i}\varphi$, $\neg\varphi$, $M^{\rightarrow i}\varphi$, $M^{\leftarrow i}\varphi$.
(c) Si φ y ψ son fbf1, también lo son $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$.
(d) Si φ es una fbf1, φ es una fbf2.
(e) Si φ es una fbf2, también lo son $\neg\varphi$, $P\varphi$, $H\varphi$, $F\varphi$, $G\varphi$.
(f) Si φ y ψ son fbf2, también lo son $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$

Los paréntesis externos de las fórmulas pueden ser eliminados.

Definimos un modelo de la lógica temporal-epistémica como una estructura $M=\langle M, R, <, v\rangle$, donde:

1. $M\neq\varnothing$ es un conjunto de "estados". Un "estado" es un mundo posible "situado" en un instante determinado.
2. $R\subseteq M^2$, es una relación de accesibilidad entre estados, la cual es reflexiva, simétrica y transitiva (relación de equivalencia).
3. $<\subseteq M^2$ es una relación de ulterioridad (o relación antes/después) entre estados, la cual es irreflexiva.
4. v es una función de evaluación que asigna el valor verdadero o falso a cada fbf en un determinado estado. Escribiremos $v(\varphi,m)=1$ si v asigna el valor de verdad 1 a la fórmula φ en el estado m, y $v(\varphi,m)=0$ si le asigna el valor 0. Para cualquier nominal i hay un subconjunto unitario de M, $\{m\}\subseteq M$, tal que $v(i,m)=1$; para cualquier otro $m'\in M$, $v(i,m')=0$. La función de evaluación v cumple las siguientes condiciones, para cualesquiera estado m, nominal i, variable proposicional p y fbfs φ y ψ:

i) $v(p,m)=1$ o $v(p,m)=0$
ii) $v(\neg\varphi,m)=1$ syss $v(\varphi,m)=0$
iii) $v(\varphi\rightarrow\psi)=1$ syss $v(\varphi,m)=0$ o $v(\psi,m)=1$
iv) $v(K\varphi,m)=1$ syss $\forall n\in M/mRn$, $v(\varphi,n)=1$
v) $v(F\varphi,m)=1$ syss $\exists n\in M/m<n$ y $v(\varphi,n)=1$
vi) $v(P\varphi,m)=1$ syss $\exists n\in M/n<m$ y $v(\varphi,n)=1$
vii) $v(M^{\rightarrow i}\varphi,m)=1$ syss $\exists n\in M/mRn$ y $\exists o/n<o$ y $v(i\wedge\varphi,o)=1$[10]
viii) $v(M^{\leftarrow i}\varphi,m)=1$ syss $\exists n\in M/mRn$ y $\exists o/o<n$ y $v(i\wedge\varphi,o)=1$
ix) $v(K^{\rightarrow i}\varphi,m)=1$ syss $\forall n\in M/mRn$, $\exists o/n<o$ y $v(i\wedge\varphi,o)=1$
x) $v(K^{\leftarrow i}\varphi,m)=1$ syss $\forall n\in M/mRn$, $\exists o/o<n$ y $v(i\wedge\varphi,o)=1$

Una fórmula φ es válida ($\models\varphi$) si, para todo modelo M y todo estado $m\in M$, $v(\varphi,m)=1$.

[10] $V(i\wedge\varphi,o)=1$ expresa que o es la denotación de i, es decir, que $v(i,o)=1$.

Las cláusulas vii-x anteriores nos permiten evaluar las fórmulas que reflejan los conocimientos de los sujetos acerca del futuro o el pasado. Así, por ejemplo, si un sujeto sabe (en el "estado actual") que en el futuro i será el caso que φ, la cláusula ix nos permite comprobar que cualquier estado considerado posible por el sujeto (desde el estado actual) tiene un estado ulterior, que es la denotación de i, y en el cual φ es verdadero.

V. Consideraciones finales

En la sección anterior hemos pretendido mostrar que los lenguajes híbridos simplifican las combinaciones de lógica temporal y epistémica. Y es que los nominales, al permitirnos hacer referencia a puntos determinados, propician que podamos referirnos, de forma sencilla, a instantes concretos, o mejor aún, a determinados estados "situados" en el presente, pasado o futuro. Gracias a esto, podemos evitar tener que recurrir a modelos semánticos excesivamente complejos, pues articulamos nuestros modelos basándonos en la noción de "estado" (entendiendo por tal un mundo posible localizado en un instante concreto del tiempo). Contamos, además, con dos tipos de relaciones de accesibilidad entre estados: una relación de equivalencia (R) y una relación de orden parcial irreflexivo (<). La evaluación de fórmulas es similar a la del Sistema S5T de Engelfriet, aunque ampliada para los nuevos operadores $K^{\rightarrow i}$, $K^{\leftarrow i}$, $M^{\rightarrow i}$ y $M^{\leftarrow i}$, en cuyo caso se incluyen nominales. Esto nos permite expresar, por ejemplo, que "en el futuro el sujeto x sabrá que φ será el caso" ($FK_x\varphi$), y también que "el sujeto x sabe (ahora) que en el futuro φ será el caso" ($K_x^{\rightarrow i}\varphi$).

De lo hasta ahora expuesto se desprende que las combinaciones de lógica temporal y epistémica enriquecen extraordinariamente el tratamiento formal de las nociones epistémicas y doxásticas, al facultarnos para dar cuenta de los cambios que se producen en los conocimientos y creencias de los sujetos a lo largo del tiempo, así como también de los distintos tipos de conocimientos y/o creencias que puede albergar un sujeto en relación al presente, al pasado o al futuro. Nuestra hipótesis, tal y como hemos venido argumentando, es que las lógicas híbridas facilitan la articulación de sistemas temporales-epistémicos, y permiten resolver, de una forma relativamente simple, algunas de las dificultades que se nos presentan.

No obstante, pese a estos avances, continúa siendo un problema abierto el desarrollo de semánticas adecuadas para estas combinaciones de lógicas, en función de las cuales se obtengan sistemas temporal-epistémicos consistentes y completos, y que den cuenta, de una manera adecuada, de las relaciones formales que se establecen entre creencia, conocimiento y tiempo. Pensamos que la principal dificultad con la que tropezamos al intentar alcanzar este objetivo tiene que ver con la necesidad de combinar lo que podríamos denominar "dos puntos de vista distintos": por un lado, un punto de vista temporal *absoluto* y, por otro, un punto de vista epistémico *relativo* a cada sujeto cognoscente. Esto es así porque en la lógica temporal la sucesión de instantes se determina en relación a un "observador absoluto", que se sitúa fuera del mundo, mientras que las nociones epistémicas son siempre relativas al sujeto que conoce. Esto dificulta enormemente la configuración de modelos semánticos para la lógica temporal-epistémica, y de ahí que la investigación futura haya de incidir de manera especial en la superación de las dificultades derivadas de este hecho.

Bibliografía

Areces, C., Blackburn, P. y Marx, M. (2001), "Hybrid Logics: Characterization, Interpolation and Complexity", *The Journal of Symbolic Logic*, 6 (3), pp. 977-1009.

Blackburn, P. (1994), "Tense, Temporal Reference and Tense Logic", *Journal of Semantics*, 11, pp. 83-101.

—— (2000), "Representation, Reasoning, and Relational Structures: A Hybrid Logic Manifesto", *Logic Journal of the IGPL*, 8 (3), pp. 339-365.

Blackburn, P. y Seligman, J. (1998), "What are Hybrid Languages?", en Kracht, M., de Rijke, M., Wansing, H. y Zakharyaschev, M. (eds.), *Advances in Modal Logic*, vol.1, Stanford, CA, CSLI Publications.

Engelfriet, J. (1996), "Minimal Temporal Epistemic Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37 (2), pp. 233-259.

Fagin, R. y Halpern, J. Y. (1988), "Belief, Awareness and Limited Reasoning", *Artificial Intelligence*, 34, pp. 39-76.

Gabbay, D. M., Hodkinson, I. y Reynolds, M. (1994), *Temporal Logic. Mathematical foundations and computational aspects*, vol. 1, Oxford, Clarendon Press.

Gabbay, D. M., Finger, M. y Reynolds, M. (2000), *Temporal Logic. Mathematical foundations and computational aspects*, vol. 2, Oxford, Oxford University Press.

Goranko, V. (2000), "Computation Tree Logics and Temporal Logics with Reference Pointers", *Journal of Applied Non-classical Logics*, 10 (3-4), pp. 221-242.

Kraus, S. y Lehmann, D. (1988), "Knowledge, Belief and Time", *Theoretical Computer Science*, 58, pp. 155-174.

Lenzen, W. (2004), "Epistemic Logic", en Niiniluoto, I., Sintonen, M. y Wolenski, J. (eds.), *Handbook of Epistemology*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 963-983.

Meyer, J.-J. Ch. (2001), "Epistemic Logic", en Goble, L. (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford, Blackwell Publishers, pp. 183-202.

Meyer, J.-J. Ch. y Van der Hoek, W. (1995), *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, Cambridge, Cambridge University Press.

Prior, A. (1967), *Past, Present and Future*, Oxford, Oxford University Press.

Sack, J. (2007), *Adding a Temporal Logic to Dynamic Epistemic Logic*. Tesis doctoral presentada en Indiana University.