

Tecno Lógicas

ISSN: 0123-7799

tecnologicas@itm.edu.co

Instituto Tecnológico Metropolitano

Colombia

Marulanda-Durango, Jesser J.; Sepúlveda-Londoño, Christian D.; Alvarez-López, Mauricio A.  
Estimación de los Parámetros de un Modelo de un Horno de Arco Eléctrico Usando Máxima  
Verosimilitud

Tecno Lógicas, núm. 29, diciembre, 2012, pp. 69-89

Instituto Tecnológico Metropolitano  
Medellín, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=344234330005>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

Artículo de Investigación/Research Article

## **Estimación de los Parámetros de un Modelo de un Horno de Arco Eléctrico Usando Máxima Verosimilitud**

## **Parameter Estimation for an Electric Arc Furnace Model Using Maximum Likelihood**

Jesser J. Marulanda-Durango<sup>1</sup>  
Christian D. Sepúlveda-Londoño<sup>2</sup>  
Mauricio A. Alvarez-López<sup>3</sup>

Fecha de recepción: 13 de julio de 2012  
Fecha de aceptación: 30 de octubre de 2012

---

<sup>1</sup> Programa de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira-Colombia  
jjmarulanda@utp.edu.co

<sup>2</sup> Grupo de investigación en Electrónica de Potencia  
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira-Colombia  
chrisdavid1205@utp.edu.co

<sup>3</sup> Programa de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira-Colombia  
malvarez@utp.edu.co

## Resumen

Este documento presenta una metodología para determinar los parámetros de un modelo de un horno de arco eléctrico usando máxima verosimilitud (*máximo likelihood estimation - MLE*). La estimación por máxima verosimilitud es uno de los métodos de estimación de parámetros clásica más empleada en la práctica. El modelo de horno de arco utilizado considera las variaciones aperiódicas y la no linealidad en su característica voltaje-corriente. Se ha utilizado el toolbox *NETLAB* desarrollado para MATLAB®, para solucionar el sistema de ecuaciones no lineales que relacionan los parámetros del modelo que se requieren estimar. Los resultados obtenidos en simulación del modelo del horno de arco implementado en PSCAD™, se comparan con mediciones reales tomadas en la etapa más crítica de la operación del horno. Se muestra como el modelo del horno de arco captura con gran detalle las formas de onda de voltajes y corrientes reales de los arcos eléctricos generados al interior del horno. Los resultados obtenidos muestran un error máximo de 5,03 % en las corrientes eficaces del arco eléctrico y 11,4 % en los voltajes eficaces de fase del secundario del transformador que energiza los electrodos del horno.

## Palabras clave

Horno de arco, armónicos, modelo dinámico, máxima verosimilitud.

## Abstract

In this paper, we present a methodology for estimating the parameters of a model for an electrical arc furnace, by using maximum likelihood estimation. Maximum likelihood estimation is one of the most employed methods for parameter estimation in practical settings. The model for the electrical arc furnace that we consider, takes into account the non-periodic and non-linear variations in the voltage-current characteristic. We use NETLAB, an open source MATLAB® toolbox, for solving a set of non-linear algebraic equations that relate all the parameters to be estimated. Results obtained through simulation of the model in PSCAD™, are contrasted against real measurements taken during the furnace's most critical operating point. We show how the model for the electrical arc furnace, with appropriate parameter tuning, captures with great detail the real voltage and current waveforms generated by the system. Results obtained show a maximum error of 5% for the current's root mean square error.

## Keywords

Arc furnace, harmonics, dynamic models, maximum likelihood estimation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El horno de arco eléctrico provee un medio relativamente simple para la fusión de metales. Básicamente operan transformando la energía eléctrica en calor aplicado a la chatarra o reducido de metal, por lo que el resultado es un tipo de acero limpio y de alta aleación.

La operación del horno se divide en dos etapas denominadas fusión y afino. En la etapa de fusión el horno se carga con el material a fundir y los electrodos son bajados hacia la carga la cual completa el circuito eléctrico entre las tres fases, ocasionando intencionalmente un cortocircuito para establecer el arco eléctrico. El calor generado por el arco empieza a fundir el metal y permite el avance de los electrodos perforando el material. Durante esta primera parte, el arco eléctrico es fácilmente extinguido, por lo que se debe de establecer continuamente el arco eléctrico. Este proceso de extinción y reinicio del arco eléctrico ocurre una y otra vez de manera aleatoria en la fase de fusión, ocasionando cambios en la impedancia de la carga lo que conlleva a caídas momentáneas de voltaje (flicker) en el barraje de conexión de la instalación y en otros barrajes cercanos a ellas. Cuando la chatarra está totalmente fundida el acero líquido es sometido a un proceso de transformación físico química denominada afino, donde se eliminan las impurezas y se agregan ferro aleaciones para ajustar la composición química.

En los sistemas eléctricos de potencia, el horno de arco es considerado como el principal causante de fluctuaciones de voltaje produciendo caídas momentáneas de tensión (flicker) en el barraje de conexión de la instalación y en otros barrajes aledaños (O'Neill *et al.*, 1999). Además de generar fluctuaciones de tensión, los hornos de arco eléctrico son fuente de armónicos debido a su naturaleza no lineal, lo cual conlleva a efectos adversos en la calidad de la energía del sistema al cual se encuentra conectado. Actualmente, algunas compañías eléctricas enfrentan los problemas causados por el horno de arco; por lo cual establecer un modelo que describa el comportamiento de esta carga es importante para evaluar diversas estrategias de atenuación de dichos problemas.

Varios modelos matemáticos se han propuesto para el horno de arco eléctrico. En Acha *et al.* (1990), se modela el arco eléctrico usando una ecuación diferencial no lineal entre el voltaje y la corriente del arco a partir del principio de conservación de la energía, donde la característica simulada voltaje – corriente del arco eléctrico tiene gran similitud con la característica voltaje – corriente real; sin embargo este modelo no considera las fluctuaciones de baja frecuencia en las amplitudes de corriente y voltaje observadas en los hornos de arco. Un modelo que tiene en cuenta las fluctuaciones en las formas de onda de voltaje y corriente se presenta en Ozgun y Abur (2002). Usando la ecuación diferencial no lineal de Acha *et al.* (1990) se obtienen las formas de onda para el voltaje y la corriente del arco, posterior a esto, con el oscilador de Chua se genera una señal caótica de baja frecuencia que se utiliza para modular en amplitud el voltaje del arco; los resultados obtenidos del índice de severidad de flicker de corta duración o Pst de este modelo son mayores a 1,0, donde los parámetros del modelo se asumen conocidos.

En algunos artículos, los parámetros que definen la dinámica del arco eléctrico se sintonizan de forma heurística, con base en mediciones reales del Pst, o con base a la potencia nominal del horno (Ozgun & Abur, 2002). En Collantes y Gómez (1997) se presenta una metodología para estimar los parámetros del modelo a partir de mediciones reales de voltaje, usando el Toolbox System Identification de MATLAB®. Un algoritmo para estimar los parámetros del modelo presentado en Ozgun y Abur (2002) se muestra en Alves *et al.* (2010), donde se ajustan los parámetros del modelo para estimar el Pst de una nueva instalación, con base en un análisis estadístico de mediciones reales de Pst de instalaciones similares.

En este documento se presenta el procedimiento para la estimación de los parámetros del modelo de horno de arco presentado en Alzate *et al.* (2010), usando estimación por máxima verosimilitud (Bishop, 2006). El ajuste de los parámetros se realiza mediante manipulación matemática del modelo descrito por la ecuación diferencial no lineal de Acha *et al.* (1990), para obtener una ecuación lineal equivalente en los parámetros del modelo. La sintonización de los parámetros se ha realizado con señales muestreadas

de las formas de onda de los voltajes de fase y las corrientes del arco eléctrico en el secundario del transformador que energiza los electrodos del horno, a una frecuencia de muestreo de 2335 muestras por segundo, tomadas al inicio del ciclo de fusión (Cano & Taca, 2005).

El modelo del horno de arco se ha realizado en el programa PSCAD™, y se ha utilizado el toolbox NETLAB (Nabney, 2004) desarrollado para MATLAB®, para solucionar el sistema de ecuaciones no lineales que relacionan los parámetros del modelo que se requieren estimar. La validación del modelo es realizada comparando inicialmente los valores eficaces de las señales modeladas y reales. Luego se compara el espectro armónico de las formas de onda de las corrientes de arco reales y simuladas. Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Circuito Eléctrico del Horno de Arco

El circuito eléctrico que alimenta el horno de arco se basa en la topología presentada en Trassegger (1980). La Fig. 1, presenta el modelo de circuito, realizado en PSCAD™, que consta de los siguientes elementos principales: una fuente trifásica de voltaje con un voltaje línea-línea de 115 kV a 50 Hz, en serie con la impedancia RL serie denominada Z<sub>1</sub>, que modela la impedancia de corto circuito en el punto de acoplamiento común (PCC), también conocida como impedancia de Thevenin.

El sistema presenta dos transformadores de potencia denominados T<sub>1</sub> y T<sub>2</sub>. El transformador T<sub>1</sub> tiene una relación de transformación de 110/20 kV con una potencia nominal de 80 MVA, conexión Y-Y.

El transformador T<sub>2</sub> presenta una relación de transformación de 20/0,7 kV, potencia nominal de 83 MVA, conexión Δ-Δ. El modelo del circuito de baja tensión que considera los cables de conexión y los electrodos, se representa por una impedancia serie tipo RL, usando los valores de Trassegger (1980). Los parámetros de los elementos del circuito se presentan en la Tabla 1.

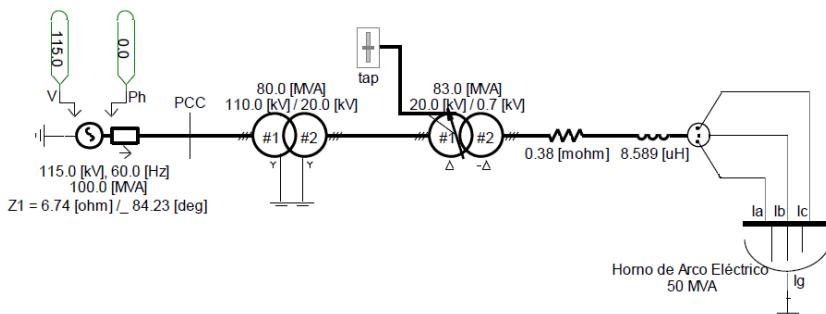


Fig. 1. Diagrama unifilar de la planta de fundición de referencia. Fuente: Autores

Tabla 1. Parámetros de los elementos del circuito. Fuente: Autores

Elemento	Valor
R thévenin	6,74 $\Omega$
X thévenin	84,23 $\Omega$
R transformador T <sub>1</sub>	0,0125 pu
X transformador T <sub>1</sub>	0,125 pu
R transformador T <sub>2</sub>	0,01 pu
X transformador T <sub>2</sub>	0,1 pu
R baja tensión	0,38 m $\Omega$
X baja tensión	3,238 m $\Omega$

## 2.2 Modelo del Horno de Arco

En los hornos de arco eléctrico, el movimiento impredecible del arco distorsiona las señales eléctricas y genera fluctuaciones en sus formas de onda de tensión y corriente. La naturaleza compleja de este fenómeno no favorece a una descripción física para el estudio de la dinámica del arco eléctrico. No obstante, diferentes estudios de este fenómeno han sido realizados sobre la base de presunciones determinísticas (Montarini *et al.*, 1994; Horton *et al.*, 2009),

estocásticas (Manchur & Evren, 1992; Srinivas *et al.*, 1996) y caóticas (O'Neill-Carrillo *et al.*, 1999; Carpinelli *et al.*, 2004) para simular la dinámica del arco.

El modelo utilizado de horno de arco se basa en el modelo presentado en Alzate *et al.* (2010). Este modelo se desarrolla en dos partes, en la primera etapa se considera un comportamiento determinista del arco eléctrico que conduce a formas de onda de voltajes y corrientes estacionarias, capturando la naturaleza no lineal del fenómeno del arco eléctrico. En la segunda etapa se modela la naturaleza variable de la longitud del arco a través de la modulación de amplitud del radio del arco con tres señales de baja frecuencia: una señal sinusoidal, una señal caótica generada con el oscilador de Chua y una señal aleatoria con distribución de probabilidad Gaussiana.

### **2.2.1 Comportamiento determinista del arco eléctrico**

El comportamiento determinista del arco eléctrico se obtiene usando el modelo de arco representado por la ecuación diferencial no lineal derivada en Acha *et al.* (1990), basada en el principio de la conservación de la potencia (1)

$$k_1 r^2 + k_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{r^2} i^2 \quad (1)$$

donde  $r$  es el radio del arco,  $i$  es la corriente instantánea del arco y  $k_n$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) son las constantes de proporcionalidad del modelo. El voltaje instantáneo del arco, se determina a partir de (2)

$$v = R i = \frac{k_3}{r^2} i \quad (2)$$

donde  $v$  es el voltaje del arco instantáneo y  $R$  es la resistencia del arco. Este modelo es capaz de representar con gran detalle el comportamiento del arco en un circuito monofásico y puede ser utilizado en simulación para obtener los arcos eléctricos entre los electrodos de un horno trifásico.

### 2.2.2 Dinámica del arco eléctrico

La naturaleza variable de la longitud del arco se refleja en el modelo introduciendo un comportamiento de tipo determinista, aleatorio y caótico a la variable de estado  $r$  de forma simultánea. Tomando como entradas al modelo las corrientes a través de cada arco, se determina con (1) la variable de estado  $r$  para cada fase. Esta variable se modula en amplitud simultáneamente con tres señales: una señal sinusoidal, una señal aleatoria con distribución de probabilidad Gaussiana y una señal caótica de baja frecuencia (3-25 Hz) generada con el oscilador de Chua (Kennedy, 1993). Despues de añadir el comportamiento aperiódico y aleatorio al modelo, se determina con (2) los voltajes instantáneos de los arcos eléctricos de cada fase, y se incluyen al sistema de potencia a través de fuentes de voltajes controladas en magnitud. El diagrama de bloques del modelo se presenta en la Fig. 2.

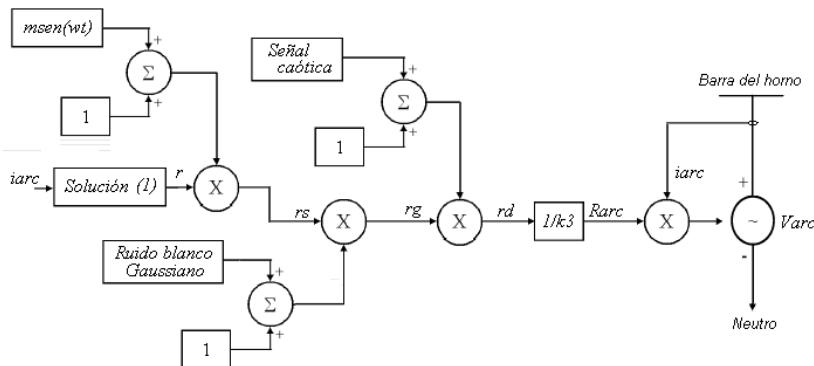


Fig. 2. Diagrama de bloques por fase del modelo de horno de arco. Fuente Autores

El diagrama de bloques del modelo del horno de arco se describe matemáticamente con (3)

$$r_d = r [1 + m_s \operatorname{sen}(\omega t)] (1 + m_g g_n) (1 + m_c c_h) \quad (3)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de las variación sinusoidal,  $m_s$ ,  $m_g$  y  $m_c$  son los factores de modulación de amplitud sinusoidal, aleatorio y caótico respectivamente,  $g_n$  es una señal aleatoria con distribu-

ción de probabilidad normal y  $ch$  es una señal caótica en la banda de frecuencias de [3-25 Hz]. Para ajustar el factor de modulación  $m_s$ , y la frecuencia de modulación  $\omega$  se requieren mediciones reales de voltajes y corrientes del arco eléctrico para cada fase. Con relación a los índices de modulación  $m_g$  y  $m_c$ , se han seleccionado valores diferentes para las tres fases con el objetivo de introducir desbalances en los voltajes del horno, y sus valores son proporcionales al Pst, medido en los nodos superiores del circuito del horno de arco. En la Tabla 2, se presentan los valores de los índices de modulación empleados.

Tabla 2. Parámetros de ajuste de la segunda fase del modelo. Fuente: Autores

Parámetro	Fase a	Fase b	Fase c
$m_s$	0,01	0,02	0,15
$m_g$	0,05	0,025	0,05
$m_c$	0,024	0,025	0,026
$\omega$ (rad/seg)	10π	10π	10π

### 2.3 Estimación por Máxima Verosimilitud

La ecuación (1) que describe el modelo del horno de arco se puede transformar a un modelo de regresión lineal, como se describe en la siguiente sección, y que consiste en una combinación lineal de las variables de entrada (4).

$$y(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N \quad (4)$$

En el modelo de regresión lineal, las observaciones  $z_1, z_2, \dots, z_N$  se relacionan con la función  $y(w,x)$  a través de (5)

$$z_i = y(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) + \varepsilon = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + \varepsilon \quad (5)$$

donde  $\varepsilon$  representa el ruido presente en las observaciones, y explica como las mismas se alejan o se acercan al valor modelado.

En lo que sigue asumimos que  $\varepsilon$  sigue una función de densidad Gaussiana,  $\varepsilon \sim N(0, \beta^{-1})$ .

Dados los coeficientes  $w_0, w_1, \dots, w_N$ , la variable  $z_i$  sigue una función de densidad Guassiana (6),

$$p(z_i) = \mathcal{N}(z_i / y(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i), \beta^{-1}) \quad (6)$$

donde  $w^T = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ . En el análisis de regresión clásico, se asume que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (IID – *Independent and Identically Distributed*), luego (7)

$$p(\mathbf{z} / \mathbf{w}) = \prod_{i=1}^N p(z_i / \mathbf{w}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{N}(z_i / y(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i), \beta^{-1}) \quad (7)$$

donde  $\mathbf{z}$  es el vector aleatorio que contiene todas las observaciones, es decir,  $\mathbf{z}^T = (z_0, z_1, \dots, z_n)$  y  $N$  es el número de observaciones. La ecuación (7) se conoce como la función de verosimilitud. Un método convencional para estimar los parámetros  $\mathbf{w}$  consiste en encontrar los valores del vector  $\mathbf{w}$  que maximizan la función de verosimilitud,  $\ln p(\mathbf{z}/\mathbf{w})$ . Este criterio de estimación se conoce como estimación por máxima verosimilitud (MLE – *Maximum Likelihood Estimation*) y equivale al criterio de mínimos cuadrados en el caso Gausiano.

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 Base de Datos

Los datos que se emplean para estimar los parámetros en el modelo del horno del arco, fueron usados por Cano *et al.* (2005) y consisten de mediciones de los voltajes de fase en el secundario del transformador T<sub>2</sub> y las corrientes del arco eléctrico durante 5 ciclos de 50 Hz, con una frecuencia de muestreo de 2048 muestras por segundo (Cano & Taca, 2005), por lo que es necesario determinar inicialmente el voltaje del arco en cada fase, de acuerdo a los requisitos dados por (1).

### 3.2 Estimación de los Parámetros del Modelo

En esta sección, se muestra una metodología para estimar los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  del modelo matemático del horno de arco dado por (1), con base en mediciones reales. Para este trabajo se tienen muestras de las formas de onda de los voltajes de fase en el secundario del transformador  $T_2$  y las corrientes del arco eléctrico. Los voltajes del arco eléctrico se obtienen a partir de la corriente del arco y el voltaje de fase en el secundario del transformador  $T_2$  (8)

$$V_{\text{arco}} = V_{T_2} - R_{\text{baja}} i_{\text{arco}} - L_{\text{baja}} \frac{d}{dt} i_{\text{arco}} \quad (8)$$

donde  $R_{\text{baja}}$  y  $L_{\text{baja}}$  corresponden a los parámetros del circuito de baja tensión del horno de arco. Antes de realizar la estimación de los parámetros usando máxima verosimilitud, transformamos (1) a un modelo de regresión lineal. En efecto, a partir de (2) se define la variable  $x$  como (9) y (10)

$$\frac{v}{i} = \frac{k_3}{r^2} = \frac{1}{x^2} \quad (9)$$

$$x = \sqrt{\frac{i}{v}} \quad (10)$$

El arco del radio  $r$ , en función de  $x$ , se determina usando (9), tomando la raíz positiva (11)

$$r = \sqrt{k_3} x \quad (11)$$

Debido a que en (1) se requiere la derivada de  $r$ , esta se determina derivando (11) respecto al tiempo, resultando en (12)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{k_3} \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

Reemplazando (11) y (12), en (1) se obtiene (13)

$$k_1 k_3 x^2 + k_2 k_3 x \frac{dx}{dt} = vi \quad (13)$$

realizando las siguientes sustituciones en (13):  $a_1=k_1 k_3$ ,  $a_2=k_2 k_3$ ,  $y=vi$ ,  $x_1=x^2$  y  $x_2=x(dx/dt)$ , se obtiene una ecuación lineal para el cálculo de los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  (14)

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (14)$$

que se puede expresar de forma vectorial como (15)

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (15)$$

donde,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para el enésimo dato  $y_n$ , se tiene (17),

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n + \varepsilon_n \quad (17)$$

donde  $\varepsilon$  es el ruido Gaussiano aditivo. El cálculo de la derivada de  $r$  con respecto al tiempo se puede realizar de diferentes maneras, por ejemplo, utilizando la definición de la derivada de una variable discreta o expresando la variable  $x$  como una combinación lineal de funciones base para realizar su derivada de manera analítica. En este trabajo se determina la derivada usando (18)

$$\frac{dx}{dt}(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{t(k+1) - t(k)} \quad (18)$$

Luego de obtener una ecuación lineal equivalente del modelo del horno de arco, se aplica el algoritmo de máxima verosimilitud

de la siguiente manera: Suponiendo que  $y$  en (15), sigue una función de densidad de probabilidad Gaussiana con media  $\mu$  y precisión  $\beta$ , se tiene (19)

$$p(y_n/\mu, \beta^{-1}) = \mathcal{N}(y_n/\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n, \beta^{-1}) \quad (19)$$

donde,  $\mu = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n$  y  $\beta = 1/\sigma^2$ . Asumiendo que las observaciones son IID,

$$p(y) = \prod_{n=1}^N p(y_n) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n/\mu, \beta^{-1}) \quad (20)$$

Se determina el logaritmo natural de la probabilidad marginal  $p(y)$ , que se conoce como la función de verosimilitud logarítmica (21),

$$\ln p(y) = \ln \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n/\mu, \beta^{-1}) = \sum_{n=1}^N \ln \mathcal{N}(y_n/\mu, \beta^{-1}) \quad (21)$$

donde,

$$\mathcal{N}(y_n/\mu, \beta^{-1}) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(y_n - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n)\right] \quad (22)$$

Reemplazando (22) en (21), se obtiene la función de verosimilitud logarítmica (23),

$$\ln p(y) = \frac{N}{2} \ln \beta - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n)^2 \quad (23)$$

Se debe maximizar la función de verosimilitud con respecto a cada uno de los parámetros  $b$ ,  $A$  y  $\beta$ . Esto se realiza derivando (23) respecto a cada uno de los parámetros e igualando a cero las ecuaciones resultantes para determinar la solución  $\{b_{opt}, A_{opt} y \beta_{opt}\}$  de máxima verosimilitud.

Determinando inicialmente  $\beta_{opt}$ , para esto se deriva (23) respecto a  $\beta$  tomando constantes  $b$  y  $A$ . El resultado es (24)

$$\frac{d}{d\beta} \ln p(y) = \frac{N}{2\beta} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n)^2 = 0 \quad (24)$$

Luego, se deriva (23) respecto al vector  $b$  tomando constantes  $A$  y  $\beta$ , resultando (25)

$$\frac{d}{db} \ln p(y) = \sum_{n=1}^N (y_n - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{A} \mathbf{x}_n = 0 \quad (25)$$

Por último, se deriva (23) respecto a la matriz  $A$ , tomando constantes el vector  $b$  y el escalar  $\beta$ , dando (26)

$$\frac{d}{dA} \ln p(y) = \left[ \sum_{n=1}^N (y_n - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_n) \mathbf{b} \mathbf{x}_n^T \right] = 0 \quad (26)$$

Con la solución simultánea de (24), (25) y (26), se determinan los parámetros  $\{b_{opt}, A_{opt}\}$  y  $\beta_{opt}$  que maximizan la función de verosimilitud. Debido a que el sistema de ecuaciones resultantes es no lineal con los parámetros, la solución se realiza de forma numérica. En este trabajo se utiliza el algoritmo de *Newton-Raphson*, (27)

$$\mathbf{w}_{new} = \mathbf{w}_{old} + \eta \nabla E(\mathbf{w}) \quad (27)$$

donde, los elementos del vector  $w$  se relacionan con los parámetros del modelo a estimar, (28)

$$\mathbf{w} = [\beta \ k_1 \ k_2 \ k_3] \quad (28)$$

El algoritmo se inicializa con valores típicos para las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  (Ozgun & Abur, 2002), y con un valor inicial de 1 para  $\beta$ . En (35),  $w_{new}$  corresponde a el vector de parámetros  $w$  actualizado,  $\eta$  el coeficiente de aprendizaje que en general toma un valor en el intervalo [0,1] y  $\Delta E(w)$  es el gradiente de la función de error, el cual está construido por las derivadas (24), (25) y (26). En la Tabla 3, se indica el vector  $w$  inicial para las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$

Tabla 3. Valores iniciales de los elementos del vector w. Fuente Autores

Constante	Fase a	Fase b	Fase c
$k_1$	22000	20000	11000
$k_2$	10	7	6
$k_3$	8	7	7

Se utilizó la función *scg* (*gradiente conjugado escalado*) del toolbox *NETLAB* desarrollado para MATLAB®, para la solución numérica de (27) con un número máximo de 100 iteraciones.

#### 4. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en simulación del modelo del horno de arco y se comparan estos resultados con las mediciones reales. El ajuste de las constantes del modelo  $k_n$  se ha realizado estimando la derivada usando (18). En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos para las constantes  $k_n$  en las tres fases:

Tabla 4. Valores obtenidos para las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  en cada fase.

Fuente: Autores

Constante	Fase a	Fase b	Fase c
$k_1$	20302	19271	9218
$k_2$	10,89	8,96	6,96
$k_3$	7,66	8,1	6,99

Con base en los resultados obtenidos para las constantes, se realizó la simulación en PSCAD™ del modelo del horno de arco. Una comparación de los valores eficaces reales y simulados de los voltajes y corrientes del secundario del transformador T<sub>2</sub>, se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5. Valores rms de las señales reales y simuladas del arco. Fuente: Autores

	Va (V)	Vb (V)	Vc (V)	Ia (kA)	Ib (kA)	Ic (kA)
Valor real	403,1	428,9	411,8	49,117	51,773	50,377
Valor simulado	414,6	420,4	364,9	46,644	51,512	52,308
Error (%)	2,83	2,06	11,4	5,03	0,42	3,83

El porcentaje de error ha sido calculado con (29)

$$\text{error}(\%) = \left| \frac{\text{valor real} - \text{valor medido}}{\text{valor real}} \right| \times 100\% \quad (29)$$

Calculando de nuevo los valores eficaces del voltaje y la corriente del arco eléctrico con un vector  $w$  inicial diferente para las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , se obtiene la Tabla 6,

Tabla 6. Valores iniciales de los elementos del vector w. Fuente: Autores

Constante	Fase a	Fase b	Fase c
$k_1$	12000	15000	12000
$k_2$	5,0	6,0	7,0
$k_3$	12,0	12,0	11,0

En la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos para las constantes  $k_n$  en las tres fases al inicializar con w con los valores de la Tabla 6

Tabla 7. Valores obtenidos para las constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  en cada fase.

Fuente: Autores

Constante	Fase a	Fase b	Fase c
$k_1$	8934	12803	9276
$k_2$	5,9	13,18	10,69
$k_3$	11,58	14,6	12,2

Una comparación de los valores eficaces reales y simulados, para este otro vector inicial de parámetros se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Valores rms de las señales reales y simuladas del arco. Fuente: Autores

	$V_a$ (V)	$V_b$ (V)	$V_c$ (V)	$I_a$ (kA)	$I_b$ (kA)	$I_c$ (kA)
Valor real	403,1	428,9	411,8	49,117	51,773	50,377
Valor simulado	368,2	444,7	430,9	39,651	33,254	37,09
Error (%)	8,65	3,68	4,6	19,27	35,71	26,37

Lo anterior indica que se debe de tener cuidado en inicializar los parámetros del vector  $w$ , para disminuir los errores que se obtienen en los valores eficaces de voltajes y corrientes del arco eléctrico. Las formas de onda del voltaje de fase del secundario del transformador  $T_2$ , reales y simuladas se presenta en la Fig. 3 inicializando las constantes del modelo con los valores de la Tabla 3.

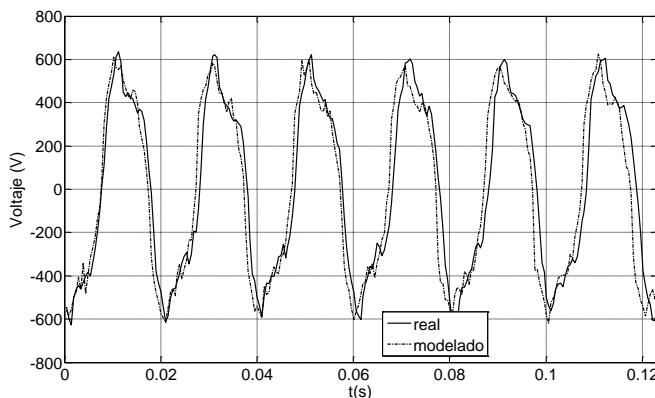


Fig. 3. Voltajes de fase, real y simulado en el secundario de  $T_2$ .  
Fuente: Autores

En la Fig. 3 se observa que el modelo del horno de arco captura la naturaleza no lineal de los voltajes reales, además, los valores de las constantes  $k_n$ , permiten obtener niveles de voltaje similares

a los reales. Una comparación similar se ha realizado para las formas de onda de las corrientes. En la Fig. 4, se presentan las corrientes real y simulada para la fase  $a$ .

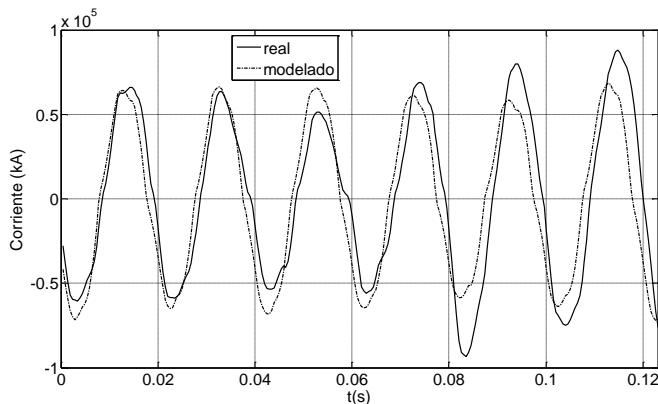


Fig. 4. Formas de onda de las corrientes del arco eléctrico, comportamiento real y comportamiento simulado. Fuente Autores

Debido a que el horno de arco es por naturaleza una fuente de distorsión armónica, el modelo debe reproducir en forma cercana los armónicos generados por el arco. La Fig. 5, muestra el espectro armónico de las corrientes del arco medida y simulada para la fase  $a$ . Las dos curvas presentan un comportamiento similar produciendo componentes inter-armónicas y componentes armónicas de orden par e impar. Resultados similares se obtuvieron para las corrientes de las demás fases.

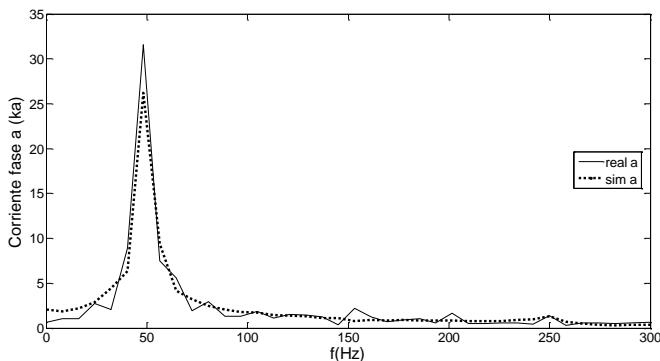


Fig. 5. Contenido armónico de la corriente del arco eléctrico medida y simulada.

Fuente: Autores

## 5. CONCLUSIONES

La comparación de los resultados obtenidos a partir de las simulaciones realizadas con las medidas de una instalación, permiten inferir que el modelo implementado refleja el comportamiento caótico y aleatorio de la carga y valida su inclusión en los problemas que se van a analizar en la red de distribución.

Basados en los resultados obtenidos, se puede concluir que la estimación por máxima verosimilitud aplicada a la sintonización de los parámetros de la primera etapa del modelo del horno de arco, entregan resultados aproximados a las mediciones reales. Sin embargo, se debe de tener cuidado en inicializar correctamente los parámetros del vector  $w$ , debido a la fuerte dependencia de estos con los errores observados de las corrientes y voltajes del arco eléctrico.

## 6. REFERENCIAS

- Acha, E., Semlyen, A., and Rajakovic, N. (1990); A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its applications to electric arcs, IEEE Trans. Power Delivery, 5, 1390-1397.

- Alves, M., Assis, Z., Garcia, C. And Gomes, D. (2010); An integrated model for the study of flicker compensation in electrical networks, Electric Power System Research 80 (2010) 1299-1305.
- Alzate, A., Marulanda, J. and Escobar, A. (2010); Electric arc furnace modeling for power quality analysis, Andescon 2010, Bogota, Colombia.
- Bishop, C. M. (2006); Pattern recognition and Machine Learning, 1-173, Springer science and business media, Cambridge, United Kingdom.
- Cano, E. A., Tacca, H. E. (2005); Arc Furnaces Modeling in ATP-EMTP, International Conference on Power System Transients IPST05, Montréal, Canada.
- Carpinelli G., Iacovone F., Russo, A. and Varilone, P. (2004); Chaos-based modeling of dc arc furnace for power quality issues, IEEE Trans. Power Delivery, 19, 1869-1876.
- Collantes-Bellido, R., and Gomez, T. (1997); Identification and modeling of a three phase arc furnace for voltage disturbance system, IEEE Trans. Power Delivery, 12, 1812-1817.
- Horton, R., Haskew, T. and Burch, R. F. (2009); A time domain AC electric arc furnace model for flicker planning studies, IEEE Trans. Power Delivery, 24, 1450-1457.
- Kennedy M.P. (1993); Three Steps to Chaos, Part 2: A Chua's Circuit Primer, IEEE Trans. Circuit and Syst, Vol 40, 657-674.
- Manchur, G. and Erven, C.C. (1992); Development of a model for predicting flicker from arc furnaces, IEEE Trans. Power Delivery, 7, 416-426.
- Montarini, G. C., Loggini M., Cavallini A. and Zaninelli, D. (1994); Arc furnace model for the study of flicker compensation in electrical networks, IEEE Trans. Power Delivery, 9, 2026-2036.
- Nabney, I. T. (2004); NETLAB Algorithms for Pattern Recognition, Springer, ISBN-10: 1852334401.
- O'Neill-Carrillo, E., Heydt, G.T., Kostelich, E. J., Venkata, S.S. and Sundaram, A. (1999); Nonlinear deterministic modeling of highly varying loads, IEEE Trans. Power Delivery, 14, 537-542.
- Ozgun, O., and Abur, A. (2003); Flicker Study Using a Novel Arc Furnace Model, IEEE Trans. Power Delivery, 17(4), 1158-1163.

Srinivas, V., Elham, B. and Adly, A. (1996); A New Time Domain Voltage Source Model for an Arc Furnace using EMTP, IEEE Transactions on Power Delivery, 11(3).

Tragesser, J.J. (1980); Power Usage and Electrical Circuit Analysis for Electric Arc Furnaces, IEEE Transactions on Industry applications, IA-16(2), 277-284.